

Jean Franchini
Jean-Claude Jacquens

MATHS

Cours

Exercices et travaux dirigés corrigés

PC-PC*

NOUVEAUX
PROGRAMMES !

ellipses

Table des matières

1. COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE	1
I. Produit et somme	1
A. Produit	1
B. Sommes	2
C. Décomposition de E en somme directe	4
II. Matrices et endomorphismes	5
A. Stabilité et blocs	5
B. Polynômes d'endomorphisme	8
C. Trace	11
D. Interpolation de Lagrange	12
Exercices	14
Travaux dirigés	32
Noyaux itérés	32
Commutateurs	35
Automorphismes de $\mathcal{L}(E)$	36
Splines cubiques	39
2. RÉDUCTION	41
I. Éléments propres	41
A. Cas d'un endomorphisme	41
B. Cas d'une matrice	43
C. Polynôme caractéristique	44
II. Réduction en dimension finie	48
A. Endomorphisme diagonalisable	48
B. Matrice diagonalisable	49
C. Puissances d'une matrice diagonalisable	50
D. Trigonalisation	51
Exercices	52
Travaux dirigés	61
Convergence de (A^m)	61
Problème de Dirichlet discret	62
Endomorphismes de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ conservant le rang	65
Produit tensoriel	69
3. ESPACES VECTORIELS NORMÉS	71
I. Normes et distances et convergences	71
A. Définitions	71
B. Exemples fondamentaux	73

C. Applications lipschitziennes	75
D. Suites	76
E. Comparaison des normes	78
II. Topologie et fonctions	79
A. Point intérieur, partie ouverte	79
B. Point adhérent, partie fermée	80
C. Topologie et normes équivalentes	81
D. Limite et continuité	81
III. Cas de la dimension finie	85
A. Équivalence des normes	85
B. Suites	85
C. Applications linéaires ou multilinéaires	86
Exercices	87
Travaux dirigés	96
Intersection de boules fermées	96
Distance d'un point à une partie	97
Commutant d'une matrice	98
4. SUITES ET SÉRIES	101
I. Séries numériques	101
A. Comparaison à une intégrale	101
B. Règle de d'Alembert	103
C. Formule de Stirling	104
D. Théorème spécial des séries alternées	105
E. Produit de Cauchy	106
II. Suites et séries de fonctions	108
A. Modes de convergence	108
B. Permutations de limites	113
III. Séries entières	116
A. Rayon de convergence	116
B. Régularité de la somme	119
C. Fonctions développables en série entière	121
Exercices	123
Travaux dirigés	144
Somme de relations de comparaison	144
Convergence monotone	146
Théorème de Bernstein	147
Comportement aux bornes de l'intervalle de convergence	149

5. INTÉGRATION	153
I. Fonctions continues par morceaux	153
A. Généralités	153
B. Intégrale sur un segment	154
II. Intégrales généralisées	155
A. Convergence, absolue convergence	155
B. Intégrabilité	157
C. Calcul effectif	159
III. Suites et séries de fonctions intégrables	160
A. Théorème de convergence dominée	160
B. Intégration terme à terme	161
C. Utilisation des deux théorèmes dans le cas positif	162
IV. Intégrales à paramètre	162
A. Continuité	162
B. Classe \mathcal{C}^k	163
C. Exemple de la fonction Γ	164
Exercices	165
Travaux dirigés	183
Transformation de Laplace	183
Application de la transformation de Laplace à un système différentiel	186
Formule de Stirling	187
Calcul de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n dt$	188
Fonction définie par une intégrale	190
Intégration des relations de comparaison	192
6. ESPACES EUCLIDIENS	195
I. Isométries vectorielles	195
A. Définitions	195
B. Groupe orthogonal	195
C. Symétries orthogonales	196
II. Matrices orthogonales	197
A. Définitions	197
B. Orientation	198
III. Isométries vectorielles d'un plan euclidien	198
A. Notations	198
B. Groupe des rotations	198
C Ensemble des isométries indirectes	199
IV. Endomorphismes autoadjoints	200
Exercices	202

Travaux dirigés	213
Caractérisations des espaces euclidiens	213
Matrices symétriques positives	215
Polynômes orthogonaux ; généralités	218
Polynômes de Legendre	221
Polynômes de Tchebychev de première espèce	225
Déterminant de Gram	226
Endomorphismes antisymétriques	229
7. PROBABILITÉS	233
I. Espaces probabilisés	233
A. Ensembles dénombrables, familles sommables	233
B. Espaces probabilisés	235
C. Conditionnement et indépendance	238
II. Variables aléatoires discrètes	240
A. Variable discrète et loi	240
B. Couple de variables aléatoires	241
C. Lois discrètes usuelles	244
D. Moments d'une variable aléatoire	247
E. Fonctions génératrices	254
Exercices	256
Travaux dirigés	265
Autour des records	265
Somme de variables aléatoires	269
8. CALCUL DIFFÉRENTIEL	273
I. Dérivabilité des fonctions vectorielles	273
A. Généralités	273
B. Opérations	274
C. Classe C^k	277
II. Fonctions de plusieurs variables	278
A. Ordre 1	278
B. Ordre 2	282
Exercices	286
Travaux dirigés	291
Équations aux dérivées partielles	291
Équation de la chaleur	294
Annexe : structures et morphismes	299
Index	303