Bouchaïb Radi
Abdelkhalak El Hami

MPSI
MP2I

# Maths

Cours, exercices et problèmes corrigés

NOUVEAUX PROGRAMMES

ellipses

# Chapitre 1

# Raisonnement et vocabulaire ensemblistes

## 1.1 Rudiments de logique

**Définition 1.1** *Une assertion est une phrase soit vraie, soit fausse, pas en même temps vraie et fausse.*

Si $P$ est une assertion et $Q$ est une autre assertion, on définit de nouvelles assertions construites à partir de $P$ et de $Q$.

- L'assertion « $P$ et $Q$ » est vraie si et seulement si $P$ est vraie et $Q$ est vraie.
- L'assertion « $P$ ou $Q$ » est vraie si et seulement si l'une des deux assertions $P$ ou $Q$ est vraie.
- L'assertion « non $P$ » est vraie si $P$ est fausse, et fausse si $P$ est vraie.
- L'assertion $\forall x \in E \quad P(x)$ est vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments $x$ de l'ensemble E, se lit « *Pour tout $x$ appartenant à $E$, $P(x)$* », sous-entendu « *Pour tout $x$ appartenant à $E$, $P(x)$ est vraie* ».
- L'assertion $\exists x \in E \quad P(x)$ est vraie lorsqu'on peut trouver au moins un $x$ de $E$ pour lequel $P(x)$ est vraie, se lit « *Il existe $x$ appartenant à $E$ tel que $P(x)$ soit vraie* ».

Les négations des quantificateurs correspondantes sont

- La négation de « pour tout $x \in E \quad P(x)$ » est « il existe $x \in E$ non $P(x)$ ».
- La négation de « il existe $x \in E \quad P(x)$ » est « pour tout $x \in E$ non $P(x)$ ».
- L'assertion « (non $P$) ou $Q$ » est notée « $P \Rightarrow Q$ ».

**Remarques 1.1** 1. L'ordre des quantificateurs est très important. Par exemple, les deux phrases logiques

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R}\ (x + y > 0) \quad \text{et} \quad \exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ (x + y > 0)$$

sont différentes. La première est vraie, la seconde est fausse.

2. Quand on écrit « $\exists x \in \mathbb{R} \quad (f(x) = 0)$ ». Cela signifie seulement qu'il existe un réel $x$ pour lequel $f$ s'annule. Rien ne dit que ce $x$ est unique. Dans un premier temps, on peut lire la phrase ainsi : « *Il existe au moins un réel $x$ tel que $f(x) = 0$* ».

**Implication**
L'assertion « $P \Rightarrow Q$ » se lit en français « $P$ *implique* $Q$ ».
**Equivalence**
L'équivalence est définie par : « $P \Leftrightarrow Q$ ». C'est l'assertion « $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ ».

On dit : « $P$ *est équivalent à* $Q$ » ou « $P$ *équivaut à* $Q$ » ou encore « $P$ *si et seulement si* $Q$ ».
Cette assertion est vraie lorsque $P$ et $Q$ sont vraies ou lorsque $P$ et $Q$ sont fausses.

**Propositions 1.1** *Soient $P$,$Q$,$R$ trois assertions. On a les équivalences suivantes :*

1. $P \Leftrightarrow$ *non(non(P))*
2. *(P et Q)* $\Leftrightarrow$ *(Q et P)*
3. *(P ou Q)* $\Leftrightarrow$ *(Q ou P)*
4. *non(P et Q)* $\Leftrightarrow$ *(non P) ou (non Q)*
5. *non(P ou Q)* $\Leftrightarrow$ *(non P) et (non Q)*
6. *(P et (Q ou R)* $\Leftrightarrow$ *(P et Q) ou (P et R)*
7. *P ou (Q et R)* $\Leftrightarrow$ *(P ou Q) et (P ou R)*
8. « $P \Rightarrow Q$ » $\Leftrightarrow$ « *non(Q)* $\Rightarrow$ *non(P)* »

**Modes de raisonnement**

**Direct :** Pour montrer que l'assertion « $P \Rightarrow Q$ » est vraie. On suppose que $P$ est vraie et on montre qu'alors $Q$ est vraie.

**Contraposé :** Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence des assertions :
« $P \Rightarrow Q$ »et « non$(Q) \Rightarrow$ non$(P)$ ».

**Par l'absurde :** Pour montrer « $P \Rightarrow Q$ »: on suppose à la fois que $P$ est vraie et que $Q$ est fausse et on cherche une contradiction.

**Par analyse-synthèse :** Le raisonnement se fait en deux étapes :

- Phase d'analyse : on suppose le problème résolu et on en déduit des conditions nécessaires.
- Phase de synthèse : on montre que les conditions obtenues sont suffisantes.

**Raisonnement par récurrence**

**Simple :** Pour démontrer une propriété portant sur tous les entiers naturels, on peut utiliser un raisonnement par récurrence. Notons la propriété en question $P(n)$ pour indiquer la dépendance en l'entier $n$. On peut alors l'obtenir pour tout entier $n$ en démontrant ces deux assertions :

1. $P(0)$ (0 vérifie la propriété) : c'est l'initialisation (ou la base) de la récurrence ;
2. Pour tout entier $n$, $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ : c'est l'hérédité (on dit que $P$ est héréditaire).

On dit alors que la propriété $P$ s'en déduit par récurrence pour tout entier $n$. On précise parfois « récurrence simple », quand il est nécessaire de distinguer ce raisonnement d'autres formes de récurrence.

**Double :** Il peut arriver que, pour l'hérédité, quand il s'agit de démontrer $P(n+1)$, on ait besoin de supposer la propriété aux deux rangs précédents, c'est-à-dire non seulement pour $n$, mais aussi pour $n+1$. On est amené à utiliser le principe de récurrence suivant :

Soit $P(n)$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$, si :

- $P(0)$ vraie
- $P(1)$ vraie
- $[P(n)$ et $P(n+1)] \Rightarrow P(n+2)$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$)

alors $P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cette propriété est en apparence plus forte que la récurrence simple, puisque l'on a une hypothèse supplémentaire à notre disposition, mais lui est en fait équivalente, puisque cela revient à démontrer $[P(n)$ et $P(n+1)]$ par récurrence simple.

**Forte :** La récurrence précédente peut être généralisée à plus d'hypothèses, 3, 4, etc. Mais tous ces principes apparaissent comme des cas particuliers du principe de récurrence suivant, parfois appelé récurrence forte, qui permet, pour démontrer la propriété au rang suivant de la supposer vraie pour tous les rangs inférieurs. On a une version plus forte de l'hérédité :
Soit $P(n)$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$, si :

- $P(0)$ vraie
- $[\forall k \leq n, P(k)] \Rightarrow P(n+1)$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$)

alors $P(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
L'initialisation reste identique, mais l'hérédité est modifiée. Pour démontrer la propriété au rang $n+1$, on peut supposer la propriété vraie non seulement pour $n$ mais aussi pour tous les entiers inférieurs à $n$.

## 1.2 Ensembles

**Définition 1.2 (Ensemble)** *On appelle ensemble une collection d'éléments. Un ensemble particulier est l'ensemble vide, noté $\emptyset$, ne contenant aucun élément.*

Soit $E$ un ensemble. L'écriture : $x \in E$, signifie que $x$ est un élément de $E$. On dit que $x$ appartient à $E$. Lorsque $x$ n'appartient pas à $E$, on écrit $x \notin E$.

Considérons deux ensembles $E$ et $F$. L'écriture : $E \subset F$, signifie que $E$ est une partie de $F$ ou $E$ est un sous ensemble de $F$. On dit que $E$ est inclus dans $F$.

On a $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

**Opérations sur les parties d'un ensemble**

$E \cap F$, désigne l'ensemble formé par les éléments qui sont à la fois dans $E$ et dans $F$. Ainsi, $E \cap F = \{x \mid x \in E \text{ et } x \in F\}$ . $E \cap F$ se lit « $E$ inter $F$ ».

$E \cup F$, désigne l'ensemble formé par les éléments qui sont soit dans $E$, soit dans $F$. Ainsi, $E \cup F = \{x \mid x \in E \text{ ou } x \in F\}$. $E \cup F$ se lit « $E$ union $F$ ».

On suppose que $A \subset B$. L'écriture : $B \setminus A$, désigne l'ensemble formé par les éléments qui appartiennent à $B$ sans appartenir à $A$.

Dans le cas où $A \subset B$, on a : $E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\} = \complement_E^A$, noté aussi $\bar{A}$. $\complement_E^A$ se lit « complémentaire de $A$ dans $E$ ».

**Définition 1.3 (Produit cartésien)** *Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Le produit cartésien, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples $(x,y)$ où $x \in E$ et $y \in F$.*

**Exemple 1.1** $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) | \, x,y \in \mathbb{R}\}$.

L'ensemble des parties de $E$ est noté $\mathcal{P}(E)$. Par exemple si $E = \{1,2\}$ alors $\mathcal{P}(1,2) = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$.

**Définition 1.4 (Recouvrement disjoint)** *Un recouvrement d'un ensemble $E$ est une famille disjointe $(X_i)_{i\in I}$ d'ensembles dont l'union contient $E$, c'est-à-dire telle que tout élément de $E$ appartient à au moins l'un des $X_i$.*

**Définition 1.5 (Partition)** *Un recouvrement est une partition de $E$ s'ils sont des sous-ensembles de $E$ non vides et deux à deux disjoints.*

**Exemple 1.2** Pour $E = \{1,2,3,4\}$, la famille $(\emptyset,\{1,2,3\},\{3,4\})$ n'est qu'un recouvrement alors que $(\{1,2\},\{3,4\})$ est une partition.

## 1.3 Applications et relations

**Définition 1.6 (Application)** *Une application (ou une fonction) $f : E \to F$, est la donnée pour chaque élément $x \in E$ d'un unique élément de $F$ noté $f(x)$.*

Par exemple, l'application : $x \mapsto x$, de $E$ dans lui même, est appelée application identique et est notée par : $id_E$ ou $\mathbb{1}_E$. On note $\mathcal{F}(E,F)$ ou $F^E$ l'ensemble des applications de $E$ dans $F$.

**Définition 1.7** *Soient $f : E \to F$ une application de $E$ dans $F$, $a \in E$ et $b = f(a) \in F$. L'élément $b$ est appelé image de $a$ par $f$ et $a$ est l'antécédant de $b$. $E$ est appelé ensemble de départ de $f$ et $F$ est l'ensemble d'arrivée de $f$.*

**Théorème 1.1** *Deux applications $f, g : E \to F$ sont égales si et seulement si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$.*

Le graphe de $f : E \to F$ est $\Gamma_f = \{(x,f(x) \in E \times F \mid x \in E\}$.

**Définition 1.8 (Famille d'éléments d'un ensemble)** *Soient $E$ et $I$ deux ensembles. On appelle famille d'éléments de $E$ indexée par $I$, toute application de $I$ dans $E$. L'ensemble $I$ s'appelle ensemble des indices. Si $x : i \mapsto x(i)$ est une famille, on note $x_i$ l'image de $i$ par $x$ et $(x_i)_{i\in I}$ cette famille.*

Si $I$ est une partie de $\mathbb{N}$, alors la famille est une suite.
Si $I$ est un ensemble fini, alors la famille est dite finie.
Si $E$ est remplacé par $\mathcal{P}(E)$, alors $(x_i)_{i\in I}$ est appelée une famille de parties de $E$.

**Définition 1.9 (Indicatrice)** *La fonction indicatrice d'un sous-ensemble $A$ de l'ensemble $E$ notée $\mathbb{1}_A$ est la fonction définie sur $A$ qui vaut $1$ sur $A$ et $0$ à l'extérieur de $A$ :*

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \in E \setminus A. \end{cases}$$

**Définition 1.10 (Restriction et Prolongement)** *Soient $E$ et $F$ deux ensembles, $E_1$ un sous-ensemble de $E$, $f\colon E \to F$ et $f_1\colon E_1 \to F$. On suppose que pour tout élément $x$ de $E_1$, on a $f(x) = f_1(x)$. Alors, on dit que $f_1$ est la restriction de $f$ à $E_1$ et que $f$ est un prolongement de $f_1$ à $E$. On note $f_1 = f\,|_{E_1}$ .*

**Définition 1.11 (Image directe/réciproque)** *Soient $E$ et $F$ deux ensembles $f\colon E \to F$, $A \subset E$ et $B \subset F$. L'image directe par $f$ de $A$, notée $f\,(A)$ , est*

$$f\,(A) = \{y \in F \mid \exists\, x \in A : y = f\,(x)\} = \{f\,(x) \mid x \in A\}$$

*L'image réciproque par $f$ de $B$, notée $f^{-1}\,(B)$ , est*

$$f^{-1}\,(B) = \{x \in E \mid f\,(x) \in B\}\,.$$

**Définition 1.12 (Composition d'applications)** *Soient $f\colon E \to F$, et $g\colon F \to G$ deux applications. On désigne par : $g \circ f$, l'application de $E$ dans $G$ définie par : $(g \circ f)\,(x) = g\,(f\,(x))$ , pour tout $x \in E$.*

Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $f\colon E \to F$.

1. On dit que $f$ est *injective* si, pour tous $x,x' \in E$, on a : $x \neq x' \Rightarrow f\,(x) \neq f\,(x')$ , ce qui est équivalent à : $f\,(x) = f\,(x') \Rightarrow x = x'$.
2. On dit que $f$ est *surjective* si, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que : $y = f\,(x)$ .
3. On dit que $f$ est *bijective*, s'il existe une application $g\colon F \to E$ telle que : $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$.
   Lorsque $f$ est bijective, l'application $g$ est notée par $f^{-1}$ et est appelée réciproque (ou inverse) de $f$.

**Théorème 1.2 (Caractérisation de la bijection)** *On dit que $f$ est bijective si et seulement si, $f$ est à la fois injective et surjective, ou si et seulement si, pour tout $y \in F$, il existe un élément et un seul $x \in E$ tel que : $y = f\,(x)$ .*

**Théorème 1.3** *Soient $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ des applications bijectives. L'application $g \circ f$ est bijective et sa bijection réciproque est $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

**Définition 1.13 (Relation binaire)** *Une relation binaire sur un ensemble $E$, est la donnée pour tout couple $(x,y) \in E \times E$ de « Vrai » (s'ils sont en relation), ou de « Faux » sinon.*

**Définition 1.14 (Relation d'équivalence)** *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire entre éléments de $E$. $\mathcal{R}$ est dite une relation d'équivalence si elle possède les propriétés suivantes :*

**i)** *$\mathcal{R}$ est réflexive : pour tout élément $x$ de $E$, on a : $x\mathcal{R}x$.*

**ii)** *$\mathcal{R}$ est symétrique : $x\mathcal{R}y$ entraîne $y\mathcal{R}x$.*

**iii)** *$\mathcal{R}$ est transitive : pour tous $x$, $y$ et $z$ éléments de $E$ si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$.*

**Définition 1.15 (Partition d'un ensemble)** *Une partition de $E$ est un ensemble de parties non vides de $E$, disjointes deux à deux, dont la réunion est $E$.*

**Définition 1.16 (Classe d'équivalence)** *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble $E$. Soit $x \in E$, la classe d'équivalence de $x$ est*

$$cl(x) = \{y \in E \mid y\mathcal{R}x\}.$$

$cl(x)$ est donc un sous-ensemble de $E$, on le note aussi $\bar{x}$. Si $y \in cl(x)$, on dit que $y$ est un représentant de $cl(x)$.

**Théorème 1.4 (Propriétés des classes d'équivalence)** *Soit $E$ un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence. On a les propriétés suivantes :*

*i)* $cl(x) = cl(y) \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$.

*ii)* *Pour tout $x,y \in E$, $cl(x) = cl(y)$ ou $cl(x) \cap cl(y) = \emptyset$.*

*iii)* *Soit $C$ un ensemble de représentants de toutes les classes alors $\{cl(x) \mid x \in C\}$ constitue une partition de $E$.*

**Définition 1.17 (Congruence)** • *La relation dans $\mathbb{R}$ définie, quels que soient $x$ et $x'$ de $\mathbb{R}$, par :*

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad \textit{tel que } x - x' = k2\pi$$

*est une relation d'équivalence appelée congruence modulo $2\pi$ dans $\mathbb{R}$. On écrit : $x \equiv x'\ [2\pi]$.*

• *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a,b \in \mathbb{Z}$. On dit que $a$ est congru à $b$ modulo $n$ si $n \mid (b - a)$, i.e. s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a + kn$ ; cette relation entre $a$ et $b$ se note $a \equiv b\ [n]$.*

**Définition 1.18 (Relation d'ordre)** *Une relation binaire $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre dans un ensemble $E$, si elle est réflexive, antisymétrique (c'est à dire si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ alors $x = y$) et transitive.*

**Définition 1.19 (Ordre total, ordre partiel)** *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur $E$. On dit que $\mathcal{R}$ définit un ordre total sur $E$ lorsque deux éléments de $E$ sont toujours comparables pour $\mathcal{R}$, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad (x\mathcal{R}y \textit{ ou } y\mathcal{R}x).$$

*Dans le cas contraire, on parle d'ordre partiel.*

## 1.4 Exercices résolus

**Exercice 1.1** *Soient les quatre assertions suivantes :*
*a)* $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0$ *;*
*b)* $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y>0$ *;*
*c)* $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0$ *;*
*d)* $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2>x$*.*
*Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ? Donner leur négation.*

**Solution.**

a) L'assertion est fausse, car sa négation qui est $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y \leq 0$ est vraie. Étant donné $x \in \mathbb{R}$, il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x+y \leq 0$, par exemple on peut prendre $y=-(x+1)$ et alors $x+y=x-x-1=-1 \leq 0$.
b) L'assertion est vraie, pour un $x$ donné, on peut prendre (par exemple) $y=-x+1$ et alors $x+y=1>0$. La négation de (b) est $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y \leq 0$.
c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0$ est fausse, par exemple $x=-1$, $y=0$. La négation est $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x+y \leq 0$.
d) L'assertion est vraie, on peut prendre $x=-1$. La négation est :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad y^2 \leq x.$$

**Exercice 1.2** *Écrire la négation des assertions suivantes où P,Q,R,S sont des propositions.*
*a)* $P \Rightarrow Q$*,*
*b) P et non Q,*
*c) P et (Q et R),*
*d) P ou (Q et R),*
*e)* $(P \text{ et } Q) \Rightarrow (R \Rightarrow S)$*.*

**Solution.**
a) $P$ et non $Q$;
b) « non P ou $Q$ »ce qui est la même chose que « $P \Rightarrow Q$ »;
c) (non $P$) ou ((non $Q$) ou (non $R$)) ;
d) non $P$ et (non $Q$ ou $R$) (ici les parenthèses sont importantes) ;
e) $P$ et $Q$ et $R$ et non $S$.

**Exercice 1.3** *Montrer que si* $a,b \in \mathbb{Q}$ *alors* $a+b \in \mathbb{Q}$*.*

**Solution.** On prend $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$. On rappelle que $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des réels s'écrivant $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Alors $a=\frac{p}{q}$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$ et un certain $q \in \mathbb{N}^*$. De même $b=\frac{p'}{q'}$ avec $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{N}^*$. On a $a+b=\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}=\frac{pq'+qp'}{qq'}$. Or le numérateur $pq'+qp'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$ ; le dénominateur $qq'$ est lui un élément de $\mathbb{N}^*$. Donc $a+b$ s'écrit bien de la forme $a+b=\frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}$, $q'' \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $a+b \in \mathbb{Q}$.

**Exercice 1.4** *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Montrer que si* $n^2$ *est pair alors* $n$ *est pair.*

**Solution.** Par l'absurde, on suppose que $n$ n'est pas pair. On veut montrer que $n^2$ n'est pas pair. Comme $n$ n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2l+1$ avec $l = 2k^2+2k \in \mathbb{N}$, et donc $n^2$ est impair. On a montré que si $n$ est impair alors $n^2$ est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si $n^2$ est pair alors $n$ est pair.

**Exercice 1.5** *Soient $a,b \geq 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.*

**Solution.** On raisonne par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$. Comme $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a(1+a) = b(1+b)$ donc $a + a^2 = b + b^2$ d'où $a^2 - b^2 = b - a$. Cela conduit à $(a-b)(a+b) = -(a-b)$. Comme $a \neq b$ alors $a - b \neq 0$ et donc en divisant par $a - b$ on obtient $a + b = -1$. La somme de deux nombres positifs ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction. Conclusion : si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

**Exercice 1.6** *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.*

**Solution.** Pour $n \geq 0$, on note $P(n)$ l'assertion suivante : $2^n > n$.
On va démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

**Initialisation.** Pour $n = 0$ on a $2^0 = 1 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.
**Hérédité.** On fixe $n \geq 0$. On suppose que $P(n)$ est vraie. On montre que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n + 2^n \\ &> n + 2^n \quad \text{car par } P(n) \text{ on sait que } 2^n > n, \\ &> n + 1 \quad \text{car } 2^n \geq 1. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.
**Conclusion.** Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire $2^n > n$ pour tout $n \geq 0$.

**Exercice 1.7** *On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

*Montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1}^2 - u_{n+2}u_n = (-1)^n.$$

**Solution.**
Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $u_1^2 - u_2u_0 = 1^2 - 1 \times 0 = 1 = (-1)^0$, donc la formule est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : Supposons que la formule soit vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé.
On a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2}^2 - u_{n+3}u_{n+1} &= u_{n+2}^2 - (u_{n+2} + u_{n+1})u_{n+1} \\ &= (u_{n+2}^2 - u_{n+2}u_{n+1}) - u_{n+1}^2 \\ &= u_{n+2}(u_{n+2} - u_{n+1}) - u_{n+1}^2 \\ &= u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 \\ &= -(u_{n+1}^2 - u_{n+2}u_n) \\ &= -(-1)^n = (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$