

David Lafolie



# Mathématiques, statistiques et probabilités

## BUT « Techniques de commercialisation »

Cours et exercices corrigés



# Chapitre 1

## Évolutions

### Ce que dit le Programme National

Pourcentages, taux de variation, indices, élasticité

*Dans ce chapitre, les grandeurs étudiées seront toutes positives.*

### 1.1 Variation d'une grandeur

#### Définitions 1

La **variation absolue** est une valeur permettant de mesurer l'écart d'une grandeur entre deux périodes. Elle est donnée par la relation :  
 $V = \text{valeur finale} - \text{valeur initiale}$ .

Le **taux de variation** est une valeur permettant de mesurer l'évolution d'une grandeur entre deux périodes. Il est donné par la relation :  
 $\tau = \frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}} - 1$ .

Le **coefficient multiplicateur** est le rapport d'une grandeur entre deux périodes. Il est donné par la relation :  $CM = \frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}}$ .

L'**indice simple** évalue le rapport d'une grandeur à une valeur de référence (appelée base), correspondant généralement à l'indice 100. Dans ce cas, il est donné par la relation :  $I = \frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}} \times 100$ .

**Remarques 2 :**

- un taux de variation n'a pas d'unité (il est par exemple le même pour une masse passant de 5 kg à 10 kg et pour un prix passant de 5€ à 10€).
- pour exprimer le taux de variation sous la forme d'un pourcentage, il suffit de multiplier le résultat obtenu par 100.

**Exemple 3 :** le prix d'un article est passé de 120€ à 180€ :

- la variation absolue est de  $180 - 120 = 60€$  ;
- le taux de variation est de  $\frac{180}{120} - 1 = 0,5$  soit une hausse de 50% ;
- le coefficient multiplicateur est  $\frac{180}{120} = 1,5$  ;
- l'indice du nouveau prix, base 100, est  $\frac{180}{120} \times 100 = 150$ .

Ainsi, une hausse de 50% correspond à un coefficient multiplicateur de 1,5 et à un indice de 150.

**Propriétés 4**

On déduit des définitions les relations suivantes :

- $\tau = CM - 1$  ou encore  $CM = \tau + 1$ ,
- $I = CM \times 100$  ou encore  $CM = \frac{I}{100}$ .

**Remarques 5 :**

- si un taux de variation est exprimé sous la forme d'un pourcentage, il faudra bien veiller à revenir à sa forme décimale (c'est-à-dire à le diviser par 100) avant d'utiliser la relation  $CM = \tau + 1$  ;
- si l'évolution d'une grandeur est à la hausse, alors  $\tau > 0$ ,  $CM > 1$  et  $I > 100$  (indice base 100) ;
- si l'évolution d'une grandeur est à la baisse, alors  $\tau < 0$ ,  $CM < 1$  et  $I < 100$  (indice base 100).

**Propriété 6****Évolutions successives**

Soient  $v_1, v_2, v_3$  les valeurs d'une grandeur sur trois périodes. Notons  $CM_{1,2}$  le coefficient multiplicateur de  $v_1$  à  $v_2$  (on a donc  $CM_{1,2} = \frac{v_2}{v_1}$ ) et

$CM_{2,3}$  le coefficient multiplicateur de  $v_2$  à  $v_3$  (on a donc  $CM_{2,3} = \frac{v_3}{v_2}$ ).  
Alors, le coefficient multiplicateur de  $v_1$  à  $v_3$  est  $CM_{1,2} \times CM_{2,3}$ .

**Exemple 7** : un prix a baissé de 25%, puis augmenté de 25%. Alors, le coefficient multiplicateur global est :  

$$\underbrace{(1 - 0,25)}_{\searrow 25\%} \times \underbrace{(1 + 0,25)}_{\nearrow 25\%} = 0,75 \times 0,25 = 0,9375$$
ce qui correspond à un taux de variation global de  $0,9375 - 1 = -0,0625$  soit à une baisse de 6,25% du prix. Contrairement aux idées reçues, une hausse de 25% « n'annule pas » une précédente baisse de 25% !

**Propriété 8**
*Évolution réciproque*

Soient  $v_1$  et  $v_2$  les valeurs d'une grandeur sur deux périodes. Notons  $CM_{1,2}$  le coefficient multiplicateur de  $v_1$  à  $v_2$  (on a donc  $CM_{1,2} = \frac{v_2}{v_1}$ ).  
Alors, le coefficient multiplicateur de  $v_2$  à  $v_1$  est  $\frac{1}{CM_{1,2}}$ .

**Exemple 9** : un ticket de caisse ne contenant que des produits alimentaires affiche un total de 89,03€ TTC. On cherche à retrouver le prix HT et le montant de TVA de ce ticket (sachant que la TVA sur l'essentiel des produits alimentaires est de 5,5%).

Le taux de TVA étant de 5,5%, le coefficient multiplicateur du prix HT au prix TTC est 1,055. On en déduit que le coefficient multiplicateur du prix TTC au prix HT est  $\frac{1}{1,055}$ .

Ainsi, le prix HT est :  $89,03 \times \frac{1}{1,055} \approx 84,39\text{€}$  soit un montant de TVA sur ce ticket de  $89,03 - 84,39 = 4,64\text{€}$ .

## 1.2 Variation moyenne d'une grandeur

### Définition 10

Le taux de croissance moyen (TCM) permet de calculer un taux d'évolution moyen sur  $n$  périodes.

Si  $v_1$  est la valeur d'une grandeur et  $v_n$  la valeur de cette même grandeur  $n$  périodes plus tard, alors le taux de croissance moyen sur une période (pendant ces  $n$  périodes) est donné par la relation :

$$TCM = \sqrt[n]{\frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}}} - 1 = \left(\frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}}\right)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

**Exemple 11 :** la population de la ville de Paris est passée de 2 125 246 habitants en 1999 à 2 206 488 en 2015 (c'est-à-dire en 16 ans).

Le taux d'évolution annuel moyen de la population de la ville de Paris entre 1999 et 2015 est donc :  $\sqrt[16]{\frac{2\,206\,488}{2\,125\,246}} - 1 \approx 0,0023$  soit 0,23%.

En moyenne, la population de la ville de Paris a donc augmenté de 0,23% par an de 1999 à 2015.

### Propriété 12

Soit  $C$  le coefficient multiplicateur global d'une grandeur sur  $n$  périodes.

Le coefficient multiplicateur moyen (CMM) sur une période (pendant ces  $n$  périodes) est alors :  $CMM = \sqrt[n]{C} = C^{\frac{1}{n}}$ .

**Exemple 13 :** au 1<sup>er</sup> mars 2008, l'Euro s'échangeait contre 1,51890 Dollar et au 1<sup>er</sup> mars 2015, il s'échangeait contre 1,11819 Dollar (c'est-à-dire en 7 ans).

Le coefficient multiplicateur global de la valeur du Dollar en 2008 à la valeur du Dollar en 2015 est égal à  $\frac{1,11819}{1,51890} \approx 0,74$  et le coefficient multiplicateur annuel moyen est alors égal à  $\sqrt[7]{0,74} \approx 0,96$ .

En moyenne, la valeur d'échange Euro/Dollar a donc été multipliée par 0,96 par an du 1<sup>er</sup> mars 2008 au 1<sup>er</sup> mars 2015.

**Remarque 14 :** on déduit de tout cela que  $TCM = CMM - 1$  ou encore  $CMM = TCM + 1$ .

## 1.3 Élasticité

### Définitions 15

- L'**élasticité** est un nombre mesurant l'impact de la variation d'une grandeur sur une autre grandeur.
- La **demande** est la quantité d'un produit donné que les consommateurs sont prêts à acheter.
- L'**élasticité de la demande** mesure la demande d'un produit lorsque son prix varie. Elle est égale au quotient du taux de variation de la demande par le taux de variation du prix.
- L'**offre** est la quantité d'un produit donné que les entreprises sont prêtes à vendre.
- L'**élasticité de l'offre** mesure l'offre d'un produit lorsque son prix varie. Elle est égale au quotient du taux de variation de l'offre par le taux de variation du prix.

### Remarques 16 :

- lorsque l'élasticité de la demande est égale à 0, cela signifie que la variation de la demande n'est pas sensible à la variation du prix. On dit alors que la demande est inélastique au prix.
- lorsque l'élasticité de la demande est comprise entre  $-1$  et  $1$ , cela signifie que la variation de la demande est (très) peu sensible à la variation du prix. On dit alors que la demande est (très) faiblement élastique au prix.
- lorsque l'élasticité de la demande est supérieure à  $1$  ou inférieure à  $-1$ , cela signifie que la variation de la demande est (très) sensible à la variation du prix. On dit alors que la demande est (très) fortement élastique par rapport au prix.
- lorsque l'élasticité de la demande est positive, cela signifie que la variation du prix et la variation de la demande sont soit toutes les deux positives (hausse du prix et hausse de la demande), soit toutes les deux négatives (baisse du prix et baisse de la demande).
- lorsque l'élasticité de la demande est négative, cela signifie que la variation du prix et la variation de la demande sont de signe contraire (hausse du prix et baisse de la demande ou inversement).

- il en est de même pour l'élasticité de l'offre.
- pour calculer une élasticité, on peut utiliser librement un taux de variation écrit sous forme décimale ou sous la forme d'un pourcentage, à condition de prendre la même forme pour le taux de variation de la demande (ou de l'offre) et pour le taux de variation du prix.

### Exemples 17 :

- la demande d'un produit baisse de 15% lorsque son prix augmente de 10%. L'élasticité de la demande de ce produit est donc égale à  $\frac{-15}{10} = -1,5$ . Dans cet exemple, la demande est élastique au prix.
- l'offre d'un produit augmente de 5% lorsque son prix augmente de 20%. L'élasticité de l'offre de ce produit est donc égale à  $\frac{0,05}{0,20} = 0,25$ . Dans cet exemple, l'offre est inélastique au prix.

### Ce qu'il faut retenir

- **Variation absolue** :  $V = \text{valeur finale} - \text{valeur initiale}$
- **Taux de variation** :  $\tau = \frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}} - 1$
- **Coefficient multiplicateur** :  $CM = \frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}}$
- **Indice (base 100)** :  $I = \frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}} \times 100$
- **Relations entre ces grandeurs** :
  - $\tau = CM - 1$  ou  $CM = \tau + 1$
  - $I = CM \times 100$  ou  $CM = \frac{I}{100}$
- **Évolutions successives** :  $CM_{1,3} = CM_{1,2} \times CM_{2,3}$
- **Évolution réciproque** :  $CM_{2,1} = \frac{1}{CM_{1,2}}$
- **Taux de croissance moyen** :
 
$$TCM = \sqrt[n]{\frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}}} - 1 = \left(\frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$
- **Coefficient multiplicateur moyen** :  $CMM = \sqrt[n]{C} = C^{\frac{1}{n}}$
- **Relations entre ces grandeurs** :  $TCM = CMM - 1$  ou  $CMM = TCM + 1$
- **Élasticité** :  $\varepsilon = \frac{\text{taux de variation de la demande (ou de l'offre)}}{\text{taux de variation du prix}}$

## 1.4 Exercices

### Exercice 1

« *Lien entre taux de variation, coefficients multiplicateurs et indices* »

Compléter les phrases suivantes :

1. Une hausse de 5% correspond à un coefficient multiplicateur de ... et à un indice base 100 de ... .
2. Une baisse de 75% correspond à un coefficient multiplicateur de ... et à un indice base 100 de ... .
3. Une hausse de 300% correspond à un coefficient multiplicateur de ... et à un indice base 100 de ... .
4. Un coefficient multiplicateur de 0,955 correspond à un taux de variation de ... et à un indice base 100 de ... .
5. Un coefficient multiplicateur de 1,3 correspond à un taux de variation de ... et à un indice base 100 de ... .
6. Un coefficient multiplicateur de 2 correspond à un taux de variation de ... et à un indice base 100 de ... .
7. Un indice base 100 de 250 correspond à un taux de variation de ... et à un coefficient multiplicateur de ... .
8. Un indice base 100 de 120 correspond à un taux de variation de ... et à un coefficient multiplicateur de ... .
9. Un indice base 100 de 95 correspond à un taux de variation de ... et à un coefficient multiplicateur de ... .

### Exercice 2

« *Le prix du pain* »

Le prix du pain est passé de 0,56€ en 1993 à 0,87€ (en moyenne) en 2016.

1. Calculer la variation absolue, le taux de variation et le coefficient multiplicateur du prix du pain de 1993 à 2016.

Interpréter ces grandeurs.

2. Calculer l'indice base 100 l'année 1993 du prix du pain en 2016.
3. Calculer le taux de croissance moyen et le coefficient multiplicateur moyen du prix du pain de 1993 à 2016.

Interpréter ces résultats.

### Exercice 3

« *Le prix du carnet de tickets de métro* »

Le prix du carnet de 10 tickets de métro à Paris était de 14,90€ au 1<sup>er</sup> août 2017 et l'indice de ce prix base 100 au 1<sup>er</sup> juillet 2001 est 160,2. Déterminer le prix du carnet de 10 tickets de métro au 1<sup>er</sup> juillet 2001.

### Exercice 4

« *Offres spéciales* »

*Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Pendant les soldes, le prix d'un pantalon passe de 85€ à 65€. Quel est le pourcentage de réduction ?
2. Une enseigne affiche la promotion suivante : « Trois paquets de café pour le prix de deux ! ». Quel est le pourcentage de réduction ?
3. Une enseigne affiche la promotion suivante : « Pour 50€ d'achats, bénéficiez de 50% de remise sur votre prochain achat d'une valeur de 50€ ! ».  
Lorraine a effectué un premier achat de 50€. Quel est le pourcentage de réduction minimale à l'issue de ces deux achats ?
4. Un site de vente en ligne propose des frais de livraison à 3,90€ et il offre ces frais pour un achat d'une valeur minimale de 25€. Quel est le pourcentage de remise maximale ?
5. Pendant une campagne promotionnelle, un commerçant souhaite faire des « prix ronds » et vendre tous les articles d'un rayon à 10€. Dans ce rayon, il y a des articles à 12,99€, à 14,99€ et à 17,99€.  
(a) Quel est le pourcentage de remise sur chacun des articles ?