Sylvain Rondy
Pierre Berlandi
Jean-Paul Huvelin
Pascal Mano
Gianfranco Niffoi
Anne-Sophie Pierson-Fertel
Nicolas Pierson

BL

2e année

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHS

2e édition

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

ellipses

Chapitre 1

Fonctions polynômes

UN MATHÉMATICIEN

De son vrai nom **Niccolo Fontana, Tartaglia** (1499-1557) est issu d'une famille pauvre. Devenu adulte, il gagne sa vie en enseignant les mathématiques et en donnant des conseils à des commerçants pour mieux gérer leurs affaires. La connaissance de la formule de résolution des équations polynomiales du troisième degré lui permet de remporter de nombreux concours. C'est cependant le mathématicien et médecin milanais Jérôme Cardan qui publie cette formule en 1545.

Un peu d'histoire

Les premiers polynômes sont apparus dans des problèmes se ramenant à des équations polynomiales du second ou du troisième degré. Pour le second degré, Brahmagupta au VII^e^ siècle puis Al-Khwarizmi au début du IX^e^ siècle en ont donné les solutions. Les mathématiciens italiens de la Renaissance, Cardan, Tartaglia et Ferrari, ont résolu celles du troisième et du quatrième degré.

Par la suite, les polynômes ont joué un rôle important en analyse sous la forme de fonctions, en particulier pour obtenir des approximations de fonctions plus complexes : ce sont les développements limités introduit par Joseph Lagrange en 1797. Il faut attendre le tournant du XX^e^ siècle pour voir apparaître les polynômes formels, c'est-à-dire détachés de la notion de fonction ou d'équation.

Objectifs

Les incontournables

- Savoir déterminer le degré et le coefficient dominant d'un polynôme.
- Maîtriser les opérations sur les polynômes et connaître les formules sur le degré d'une somme ou d'un produit de polynômes.
- Connaître le théorème de la division euclidienne.
- Savoir dériver un polynôme.
- Connaître et utiliser la notion de racines multiples.
- Savoir factoriser un polynôme.

Et plus si affinités

- Savoir établir certaines propriétés sur des familles de polynômes définies par récurrence.

Résumé de cours

Rappels

Définition 1.1. — On appelle *scalaire* tout nombre qui est, soit réel, soit complexe.

Définition 1.2. — On appelle fonction polynôme à coefficients réels toute fonction P, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par une expression de la forme $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ (avec la convention $x^0 = 1$), où a_0, a_1, ..., a_n ($n \in \mathbb{N}$) sont des réels appelés *coefficients* de P.
Si tous les coefficients de P sont nuls, P est appelé le polynôme nul et on note $P = 0$.

Notation 1.1 — L'ensemble des polynômes à coefficients réels est noté $\mathbb{R}[x]$.

Définition 1.3. — Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}[x]$ défini par $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, où n est un entier tel que $a_n \neq 0$. L'entier n est appelé *degré* de P (on note $\deg P = n$) et a_n est appelé *coefficient dominant* de P.
Si $a_n = 1$, le polynôme P est dit *normalisé* ou *unitaire*.

Notation 1.2 — L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{R}_n[x]$.
Les polynômes de degré 0 sont les polynômes constants et non nuls.
Par convention, le polynôme nul est de degré $-\infty$.

Propriété 1.1. — Deux polynômes sont égaux s'ils ont même degré et mêmes coefficients.

Propriété 1.2. — L'addition des polynômes, la multiplication d'un polynôme par un scalaire et le produit des polynômes se déduisent des opérations en vigueur sur les fonctions.

⇨ **Méthode 1.1. Comment multiplier deux polynômes factorisés ?**
⇨ **Méthode 1.2. Comment multiplier deux polynômes développés ?**

Exemple 1.1. — Si $P(x) = 3x^2 + 5x - 1$ et $Q(x) = 2x - 3$, alors on a, par exemple :
$(2P - 3Q)(x) = 2(3x^2 + 5x - 1) - 3(2x - 3) = 6x^2 + 10x - 2 - 6x + 9 = 6x^2 + 4x + 7$.
$(PQ)(x) = (3x^2 + 5x - 1)(2x - 3) = 6x^3 - 9x^2 + 10x^2 - 15x - 2x + 3 = 6x^3 + x^2 - 17x + 3$.

Propriété 1.3. — Soit P et Q deux polynômes.

$$PQ = 0 \Leftrightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0 .$$

Propriété 1.4. — Soit P et Q deux polynômes.

$$\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q) .$$

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q .$$

Remarque 1.1. — Si P et Q sont de degrés distincts, alors : $\deg(P+Q) = \max(\deg P, \deg Q)$.

■ La division euclidienne

Théorème 1.1. — Théorème de la division euclidienne.
Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$ avec $B \neq 0$. Alors, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{R}[x]$ tel que $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$.

⇨ **Méthode 1.3. Comment diviser deux polynômes avec la méthode des coefficients indéterminés ?**
⇨ **Méthode 1.4. Comment diviser deux polynômes en « posant » la division euclidienne ?**

Définition 1.4. — Les polynômes Q et R sont appelés respectivement *quotient* et *reste* dans la division euclidienne de A par B.

⇨ **Méthode 1.7. Comment déterminer le reste dans une division ?**

Théorème 1.2. — Si $\deg A > \deg B$, alors on a : $\deg Q = \deg A - \deg B$.

Définition 1.5. — On dit qu'un polynôme non nul B divise un polynôme A ou que A est divisible par B si le reste dans la division de A par B est nul. Autrement dit, B divise A s'il existe un polynôme Q tel que $A = BQ$. On dit aussi que A est multiple de B.

⇨ **Méthode 1.5. Comment montrer qu'un polynôme *B* divise un polynôme *A* donné ?**

■ Polynôme dérivé

Définition 1.6. — Soit P le polynôme défini par $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.
Si P est un polynôme constant, alors le polynôme dérivé de P est le polynôme nul.
Si $\deg P \geq 1$, alors le polynôme dérivé de P est le polynôme noté P' défini par :

$$P'(x) = \sum_{i=1}^{n} i\, a_i\, x^{i-1}$$

Définition 1.7. — On définit les polynômes dérivés successifs de P, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, par $P^{(k)} = \left(P^{(k-1)}\right)'$, avec la convention : $P^{(0)} = P$.

Théorème 1.3. — Soit P le polynôme de degré n défini par $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad (a_n \neq 0)$.

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\deg P^{(k)} = n-k$ et $P^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{n} \frac{i!}{(i-k)!} a_i\, x^{i-k}$. En particulier : $P^{(n)}(x) = n!a_n$.

$\forall k \in [\![n+1,+\infty[\![$, $P^{(k)} = 0$.

■ Racines d'un polynôme

Définition 1.8. — Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ et r un scalaire. On dit que r est une racine du polynôme P si $P(r) = 0$.

Théorème 1.4. — Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ et r un scalaire.
r est racine de P si et seulement si le polynôme $x-r$ divise P.

Théorème 1.5. — Soit n un entier naturel non nul. Si P est un polynôme qui admet n racines distinctes $r_1, r_2, ..., r_n$, alors le polynôme $\prod_{i=1}^{n}(x-r_i)$ divise P.

Propriété 1.5. — Tout polynôme non nul de degré n admet au plus n racines distinctes.

Propriété 1.6. — Un polynôme de degré inférieur ou égal à n et qui possède au moins $n+1$ racines est le polynôme nul.
En particulier, tout polynôme qui admet une infinité de racines est nul.

⇨ **Méthode 1.6. Comment montrer que deux polynômes sont égaux ?**

Théorème 1.6. — Tout polynôme de degré *impair* admet au moins une racine *réelle*.

Définition 1.9. — Soit P un polynôme, r un scalaire et m un entier naturel non nul.
On dit que r est racine d'ordre de multiplicité m du polynôme P si $(x-r)^m$ divise $P(x)$ et si $(x-r)^{m+1}$ ne divise pas $P(x)$.

Propriété 1.7. — Autrement dit, r est racine d'ordre de multiplicité m de P s'il existe un polynôme Q tel que $P(x)=(x-r)^m Q(x)$ avec $Q(r)\neq 0$.

Théorème 1.7. — Soit P un polynôme et m un entier naturel non nul. Le scalaire r est une racine d'ordre de multiplicité m de P si et seulement si :

$$\forall k\in [\![0,m-1]\!],\ P^{(k)}(r)=0 \text{ et } P^{(m)}(r)\neq 0$$

Exemple 1.2. — Soit P le polynôme défini par $P(x)=2x^4-3x^3-x^2+3x-1$. Montrer que 1 est racine double de P.
On a : $P'(x)=8x^3-9x^2-2x+3$, $P''(x)=24x^2-18x-2$.
On vérifie aisément que $P(1)=P'(1)=0$ et que $P''(1)\neq 0$: 1 est donc bien racine double de P.

■ Factorisation d'un polynôme

❑ Factorisation dans $\mathbb{C}[x]$

Théorème 1.8. — Théorème de d'Alembert-Gauss.
Tout polynôme de degré n à coefficients réels admet exactement n racines complexes, comptées chacune avec leur ordre de multiplicité.

Théorème 1.9. — Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ de degré n. Si l'on note r_1, r_2,..., r_p les p racines complexes distinctes de P d'ordres de multiplicité respectifs α_1, α_2,..., α_p (avec p un entier naturel non nul) tel que $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i=n$, on a : $P(x)=a_n\prod_{i=1}^{p}(x-r_i)^{\alpha_i}$, où a_n est le coefficient dominant de P.

⇨ **Méthode 1.8. Comment factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[x]$?**

❑ Factorisation dans $\mathbb{R}[x]$

Propriété 1.8. — Soit a un complexe et P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$.
Si a est racine du polynôme P alors $\overline{a}$ est aussi racine de P avec le même ordre de multiplicité.

Théorème 1.10. — Tout polynôme P de $\mathbb{R}[x]$ peut s'écrire comme produit de polynômes à coefficients réels de degré 1 et de polynômes à coefficients réels de degré 2 n'ayant pas de racines réelles.

⇨ **Méthode 1.9. Comment factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}[x]$?**

Exemple 1.3. — $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ et $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$.

Méthodes

Produit de polynômes

Méthode 1.1. Comment multiplier deux polynômes factorisés ?

C'est le cas le plus simple, il suffit de regrouper les facteurs communs.

⇨ Exercice 1.10

Exemple. On pose $P(x)=\left(x^2-1\right)^2$ et $Q(x)=x^2(x-1)^3(x+1)$.

On écrit d'abord $P(x)=(x-1)^2(x+1)^2$, puis on a $(PQ)(x)=x^2(x-1)^5(x+1)^3$.

Méthode 1.2. Comment multiplier deux polynômes développés ?

Soient P et Q deux polynômes définis par : $P(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ et $Q(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$.

Par convention, on décide que : $\forall i>n$, $a_i=0$ et $\forall j>m$, $b_j=0$.

On a alors $(PQ)(x)=\sum_{p=0}^{n+m} c_p x^p$, avec : $\forall p\in[\![0,n+m]\!]$, $c_p=\sum_{k=0}^{p} a_k b_{p-k}$.

⇨ Exercice 1.10

Exemple. On pose pour tout entier naturel n : $P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}x^k$ et $Q(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k}{k!}x^k$.

Exprimer simplement le produit PQ.

On a $(PQ)(x)=\sum_{p=0}^{2n} c_p x^p$ avec : $\forall p\in[\![0,2n]\!]$, $c_p=\sum_{k=0}^{p}\frac{2^k}{k!}\frac{3^{p-k}}{(p-k)!}=\frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{p}\frac{p!}{k!(p-k)!}2^k 3^{p-k}$.

$c_p=\frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}2^k 3^{p-k}=\frac{5^p}{p!}$ (binôme de Newton). Finalement : $(PQ)(x)=\sum_{p=0}^{2n}\frac{5^p}{p!}x^p$.

■ Division euclidienne

❑ Méthode 1.3. Comment diviser deux polynômes avec la méthode des coefficients indéterminés ?

> Deux polynômes de même degré sont égaux s'ils ont les mêmes coefficients : ceci justifie la méthode d'identification des coefficients présentée ci-dessous.

⇨ **Exercice 1.7**

Exemple. Déterminer quotient et reste dans la division de $2x^3-5x^2-3x+4$ par $x-2$.
Le quotient est de degré 2 et le reste est constant, on peut donc poser :
$2x^3-5x^2-3x+4=(x-2)(ax^2+bx+c)+d$.

On développe et on ordonne : $2x^3-5x^2-3x+4=ax^3+(-2a+b)x^2+(-2b+c)x+(-2c+d)$.

On identifie les coefficients des monômes de même degré :

$\begin{cases} a=2 \\ -2a+b=-5 \\ -2b+c=-3 \\ -2c+d=4 \end{cases}$. D'où : $\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=-5 \\ d=-6 \end{cases}$. On a donc : $2x^3-5x^2-3x+4=(x-2)(2x^2-x-5)-6$.

❑ Méthode 1.4. Comment diviser deux polynômes en « posant » la division euclidienne ?

> On remarquera la similitude de cette méthode avec celle de la division euclidienne sur des entiers. Le plus simple est de suivre l'exemple ci-dessous.
> Voici le détail du début : « en A, combien de "fois" B » ou encore « en $2x^3$, combien de "fois" x^2 » ? Il y va $2x$ fois. Puis on développe $2x(x^2-1)$. Le résultat est placé sous le dividende auquel on le retranche. La division s'arrête lorsque le reste est de degré inférieur strictement à celui du diviseur.

⇨ **Exercices 1.1, 1.2, 1.4**

Exemple. Déterminer quotient et reste dans la division de $2x^3-x^2-x+2$ par x^2-1.

$$\begin{array}{rr|l}
 & 2x^3-x^2-x+2 & x^2-1 \\ \cline{3-3}
 & -(2x^3 \quad -2x) & 2x-1 \\ \cline{1-2}
 & -x^2+x+2 & \\
 & -(-x^2 \quad +1) & \\ \cline{1-2}
 & x+1 &
\end{array}$$

Le quotient est donc $2x-1$ et le reste est $x+1$.