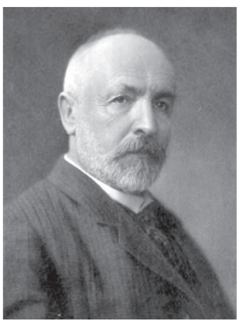
Chapitre 1

Vocabulaire de la logique, des ensembles et des applications

UN MATHÉMATICIEN



« *L'essence même des mathématiques, c'est leur liberté* » disait **Georg Cantor**, mathématicien allemand né à Saint Pétersbourg, connu pour avoir été le père de la théorie des ensembles. C'est dans les années 1870 qu'il fonde cette théorie en lien avec son compatriote Richard Dedekind et qu'il définit la notion de cardinal pour les ensembles infinis. Ses théories révolutionnaires furent mal accueillies par certains mais sont désormais acceptées par tous.

Un peu d'histoire

Au milieu du XIX^{e}, les mathématiciens anglais George Boole et Augustus De Morgan s'intéressent au raisonnement logique en tant que tel. Le premier définit des opérations logiques telles la négation d'une proposition, la conjonction ou la disjonction de deux d'entre elles. Le second, s'inspirant d'Aristote, introduit la notion de quantificateur.

Au tout début des années 1870, Georg Cantor s'intéresse aux points où certaines fonctions ont des comportements atypiques. Cela l'amène à étendre la notion de cardinal (nombre d'éléments) à des ensembles infinis.

Giuseppe Peano rédige en 1895 un formulaire mathématique qui popularise la théorie des ensembles ; il introduit plusieurs symboles que nous utilisons encore. Bertrand Russell énonce un paradoxe qui montre que l'on ne peut nommer ensemble n'importe quoi ce qui conduit Ernst Zermelo basée cette théorie sur des axiomes.

Objectifs

les incontournables

- Savoir utiliser à bon escient les quantificateurs, les connecteurs élémentaires non, et, ou, les implications et les équivalences.
- Savoir exprimer un énoncé ou un raisonnement en langage formel et en français.
- Savoir démontrer une implication simple, des implications successives, ou une équivalence.
- Savoir nier un énoncé, maîtriser le concept de contraposée.
- Savoir comprendre la définition d'un ensemble, écrire une définition d'un ensemble.
- Maîtriser les opérations sur les ensembles (réunion, intersection, complémentaire, produit cartésien).
- Savoir utiliser un raisonnement par récurrence.
- Maîtriser les concepts d'injection, de surjection, de bijection.

et plus si affinités

- Savoir utiliser un raisonnement par disjonction des cas, par l'absurde, par analyse-synthèse.
- Distinguer inclusion et appartenance.
- Être capable d'expliciter une réciproque.

Résumé de cours

Vocabulaire des ensembles

Premières définitions

Définition : *Un ensemble est une collection d'objets. Ces objets sont appelés les éléments de notre ensemble, on dit qu'ils appartiennent à l'ensemble. On note $x \in E$ pour dire que x est un élément d'un ensemble E. $x \notin E$ signifie que x n'est pas un élément de E.*

Vocabulaire : *$\emptyset$, l'ensemble vide, est l'ensemble n'ayant aucun élément. Un ensemble réduit à un seul élément est appelé un singleton, un ensemble réduit à deux éléments est appelé une paire. $[v,w]$ (avec v et w deux réels tels que $v \leq w$) est l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}$ tel que $v \leq x$ et $x \leq w\}$, $[\![p,q]\!]$ (avec p et q deux entiers tels que $p \leq q$) est l'ensemble $\{x \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leq x$ et $x \leq q\}$.*

Remarque : un ensemble est parfaitement défini dès lors qu'on est capable de préciser sans ambiguïté les éléments qui le composent. Il y a plusieurs façons de décrire un ensemble :

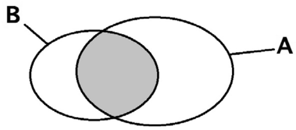
- **Définition en extension :** On peut définir un ensemble en précisant les objets qui le contiennent (comme $\{1;3;5;7\}$), en donnant la forme de ces objets (l'ensemble précédent peut s'écrire $\{2k+1, k \in \{0;1;2;3\}\}$). On peut utiliser des points de suspension si la logique reliant les objets entourant ces points de suspension est évidente. Ainsi, $\{1;3;5;7;9;11;13;15\}$ peut s'écrire $\{1;3;5;\cdots;15\}$.
- **Définition en compréhension :** On peut aussi le définir par ce qui caractérise ses éléments. $\big\{x$ entiers impairs tels que $x^2 \in [1;50]\big\}$ est ainsi l'ensemble $\{-7;-5;-3;\cdots;7\}$.

Définition : *Soit E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F ou que F contient E ou que E est une partie de F lorsque tous les éléments de E sont en particulier des éléments de F. On note alors que $E \subset F$. On dit que $E = F$ lorsque $E \subset F$ et $F \subset E$, c'est-à-dire lorsque E et F ont exactement les mêmes éléments. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, c'est-à-dire l'ensemble des sous-ensembles de E.*

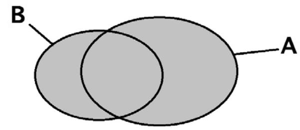
Opérations sur les ensembles

Définition : *Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. On définit les opérations suivantes :*

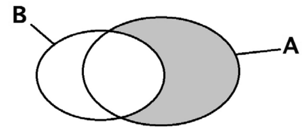
- *$A \cap B = \{x \in E$ tels que $x \in A$ et $x \in B\}$. C'est l'intersection de A et B, c'est l'ensemble contenant les éléments appartenant à la fois à A et B. On dit que deux ensembles sont disjoints si leur intersection est vide.*
- *$A \cup B = \{x \in E$ tels que $x \in A$ ou $x \in B\}$. C'est l'union de A et B, c'est l'ensemble contenant les éléments appartenant au moins à A ou à B.*
- *$A \backslash B = \{x \in E$ tels que $x \in A$ et $x \notin B\}$. C'est A privé de B.*
- *$\overline{A} = \mathcal{C}_E A = E \backslash A = \{x \in E$ tels que $x \notin A\}$. C'est le complémentaire de A dans E.*



$A \cap B$



$A \cup B$



$A \backslash B$

Proposition 1.1.— Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E. On a :

1. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativité).
2. $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$.
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité).
4. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (Lois de Morgan).

Définition : *Soit E et F deux ensembles, x et x' deux éléments de E et y et y' deux éléments de F. On définit le couple (x, y) par la propriété suivante :*

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \quad \text{et} \quad y = y'.$$

$E \times F$, ensemble appelé produit cartésien de E et F, est $\{(x, y), x \in E, y \in F\}$.

■ Vocabulaire de la logique

Premières propriétés

Définition : *Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux propositions.*

- *La négation de la proposition $\mathscr{P}$ est la proposition, notée non $(\mathscr{P})$ ou $\overline{\mathscr{P}}$, qui est vraie lorsque $\mathscr{P}$ est fausse et fausse lorsque $\mathscr{P}$ est vraie.*
- *La conjonction de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ est la proposition, notée $(\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q})$, qui est vraie uniquement si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont toutes les deux vraies.*
- *La disjonction de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ est la proposition, notée $(\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q})$, qui est vraie si et seulement si l'une au moins des propositions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ est vraie.*

Proposition 1.2.— Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux propositions.

- La négation de la proposition $(\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q})$ est la proposition non $(\mathscr{P})$ ou non $(\mathscr{Q})$.
- La négation de la proposition $(\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q})$ est la proposition (non $(\mathscr{P})$ et non $(\mathscr{Q})$.

Définition : *Soit $\mathscr{P}(x)$ une proposition dépendant d'une variable x.*

- *Pour écrire que $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour tout x appartenant à l'ensemble E, on peut utiliser le quantificateur universel $\forall$, qui se lit "Pour tout", de la façon suivante :*

  $$\forall x \in E, \mathscr{P}(x)$$

  ce qui signifie que, pour tous les éléments de E, la proposition $\mathscr{P}(x)$ est vraie.
- *Pour écrire que $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour au moins un x appartenant à l'ensemble E, on peut utiliser le quantificateur existentiel $\exists$, qui se lit "il existe", de la façon suivante :*

  $$\exists x \in E \text{ tel que } \mathscr{P}(x)$$

ce qui signifie qu'il existe au moins un x appartenant à l'ensemble E telle que la proposition $\mathscr{P}(x)$ soit vraie.

- *Pour écrire que $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour un unique x appartenant à l'ensemble E, on peut utiliser le quantificateur $\exists!$, qui se lit "il existe un unique", de la façon suivante :*

$$\exists! x \in E \text{ tel que } \mathscr{P}(x)$$

ce qui signifie qu'il existe un unique x appartenant à l'ensemble E tel que la propriété $\mathscr{P}(x)$ soit vraie.

Remarque : lorsqu'on nie une proposition, les quantificateurs $\forall$ sont tous remplacés par des $\exists$ et les quantificateurs $\exists$ sont tous remplacés par des $\forall$. La négation de la proposition "$\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}$ tel que : $y > x^2$" est : "$\exists x \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall y \in \mathbb{R}, y \leq x^2$".

Les raisonnements classiques

Définition : *Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathscr{P}$ implique $\mathscr{Q}$, et on note $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ lorsque $\mathscr{P}$ est fausse ou bien lorsque $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont toutes les deux vraies. On dit alors que $\mathscr{P}$ est une condition suffisante pour que $\mathscr{Q}$ soit vraie ou que $\mathscr{Q}$ est une condition nécessaire pour que $\mathscr{P}$ soit vraie. On dit que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont équivalentes, et on note $\mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{Q}$, lorsque $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ et $\mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{P}$, autrement dit lorsque $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont ou bien toutes les deux vraies ou bien toutes les deux fausses. On dit aussi que $\mathscr{P}$ est une condition nécessaire et suffisante pour $\mathscr{Q}$. On résume ces définitions dans des tables de vérité :*

P	*V*	*V*	*F*	*F*
Q	*V*	*F*	*V*	*F*
non P	*F*	*F*	*V*	*V*
P ou Q	*V*	*V*	*V*	*F*
P et Q	*V*	*F*	*F*	*F*
P* $\Rightarrow$ *Q	*V*	*F*	*V*	*V*
P* $\Leftrightarrow$ *Q	*V*	*F*	*F*	*V*

Proposition 1.3.— Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux propositions. On a :

- Si $\mathscr{P}$ est vraie et $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})$ alors $\mathscr{Q}$ est vraie. C'est le raisonnement par déduction.
- Si $\mathscr{P}$ est vraie et $(\mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{Q})$ alors $\mathscr{Q}$ est vraie. C'est le raisonnement par équivalence.
- $(\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q})$ équivaut à dire que $(\mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{P}$ et $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})$. C'est le raisonnement par double implication.
- $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})$ équivaut à dire que $(\text{non}\,(\mathscr{Q}) \Rightarrow \text{non}\,(\mathscr{P}))$. C'est le raisonnement par contraposée.
- Si $\mathscr{P}$ est supposée vraie et qu'on en déduit que $\mathscr{Q}$ est vraie et fausse alors on peut affirmer que $\mathscr{P}$ est fausse. C'est le raisonnement par l'absurde.
- Soit $\mathscr{R}(x)$ une proposition dépendant d'une variable x. Si :

$$\forall x \in A,\ \mathscr{P}(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in B,\ \mathscr{P}(x)$$

alors, $\forall x \in A \cup B,\ \mathscr{P}(x)$. C'est le raisonnement par disjonction des cas.

Le raisonnement par récurrence

Proposition 1.4.— Voici trois types de récurrence à connaître (raisonnement détaillé dans les méthodes) qui prouvent chacune que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur à n_0 :

- **Récurrence faible :** On prouve que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et que, pour tout entier n supérieur à n_0, $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$.
- **Récurrence double :** On prouve que $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies et que, pour tout entier n supérieur à n_0, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ entraînent $\mathcal{P}(n+2)$.
- **Récurrence forte :** On prouve que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et que, pour tout entier n supérieur à n_0, $\mathcal{P}(n_0), \cdots, \mathcal{P}(n)$ impliquent $\mathcal{P}(n+1)$.

■ Les applications

Dans toute cette partie, E, F et G désigneront trois ensembles.

Définitions

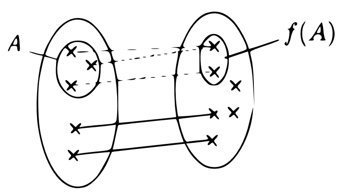
Définition : *Une application f de E, appelé ensemble de départ, dans F, appelé ensemble d'arrivée, est un procédé qui à chaque élément x de E associe un unique élément de F, l'image de x par f, que l'on note $f(x)$. On note ainsi les applications :* $f : \begin{cases} E & \to F \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$ *ou* $f : x \mapsto f(x)$ *ou* $E \xrightarrow{f} F$.
On dit que deux applications sont égales si elles ont même ensemble de départ, même ensemble d'arrivée et associe les mêmes images.

Vocabulaire : *Si* $E \xrightarrow{f} F$ *et si* $y \in F$ *alors un élément* x *de* E *est qualifié d'antécédent de* y *par* f *si* $f(x) = y$.

Définition : *Soit* $E \xrightarrow{f} F$ *et* $A \xrightarrow{g} F$ *deux applications avec* A *une partie de* E. g *est* ***la*** *restriction de* f *à* A *si* $\forall\, x \in A, f(x) = g(x)$. *On note alors* $g = f|_A$. f *sera alors* ***un*** *prolongement de* g *à* E.

Remarque : une fois A fixé, la restriction de f à A est unique. Il y a en revanche plusieurs façons de prolonger une fonction.

Définition : *Soit* $E \xrightarrow{f} F$ *une application et* A *une partie de* E. *L'image directe de* A *par* f *est une partie de* F *que l'on note* $f(A)$. *C'est l'ensemble des images des éléments de* A *par* f, *soit* $\{f(x),\ x \in A\}$.



Définition : *Soit* $E \xrightarrow{f} F$ *et* $F \xrightarrow{g} G$ *deux applications. On définit la composée de* f *par* g *l'application notée* $g \circ f$ *par :* $\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$.

Injections, surjections, bijections

f désignera dans tout cette partie une application de G dans F.

Définition : *On dit que f est injective si :*

$$\forall\ (x,x') \in G^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

Il revient au même de dire que f est injective si et seulement si tout élément de F possède au plus un antécédent par f. On peut aussi dire que f est injective si et seulement si :

$$\forall\ (x,x') \in G^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Définition : *On dit que f est surjective si :*

$$\forall\, y \in F,\ \exists\, x \in G \text{ tel que } f(x) = y$$

Il revient au même de dire que f est surjective si et seulement si tout élément de F possède au moins un antécédent par f.

Définition : *On dit que f est bijective si f est injective et surjective. Il revient au même de dire que f est bijective si et seulement si tout élément de F possède exactement un antécédent par f. On peut aussi dire que f est bijective si et seulement si :*

$$\forall\, y \in F, \exists\,!\, x \in G \text{ tel que } f(x) = y.$$

Remarque : Si, pour tout y de F, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x dans G a :

- pile une solution alors f est bijective.
- au moins une solution alors f est surjective.
- au plus une solution (0 ou 1) alors f est injective.

Proposition 1.5.— En cas d'existence, la composée de deux injections est une injection, la composée de deux surjections est une surjection et, enfin, la composée de deux bijections est une bijection.

Définition : *On suppose f bijective. On définit sa réciproque, notée f^{-1}, qui est l'application de F dans G telle que, pour tout y de F, $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent par f de y. On a donc :*

$$f \circ f^{-1} = id_F \text{ et } f^{-1} \circ f = id_G.$$

Proposition 1.6.— f est bijective si et seulement si f vérifie la condition suivante :

$$\text{Il existe } F \xrightarrow{g} G \text{ une application telle que } g \circ f = id_G \quad \text{et} \quad f \circ g = id_F$$

Si g vérifie ces conditions alors f^{-1}est g.

Proposition 1.7.— Si f et g sont deux applications bijectives composables alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1}$ est $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Méthodes

Les ensembles

Méthode 1.1.— Comment montrer que $E \subset F$, $E = F$
$E = F$ se prouve en démontrant que $E \subset F$ et $F \subset E$. Si E et F sont de cardinal fini et si $\text{Card}\ (E) = \text{Card}\ (F)$ alors, pour prouver l'égalité $E = F$, il suffit de prouver que $E \subset F$ ou bien de prouver que $F \subset E$ (une simple inclusion suffit pour avoir l'égalité). Pour prouver que $E \subset F$, on prend x, un élément quelconque de E, et on montre que x est nécessairement dans F. Parfois, à l'aide des propriétés du cours comme la distributivité, l'associativité, les lois de Morgan, on peut prouver la relation sans avoir à redescendre jusqu'au niveau de l'élément.

Mise en œuvre : exercice 1.1.

Exemple : Montrons que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (C \cap B) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$ avec A, B et C trois parties d'un ensemble E. Inutile de redescendre au niveau de l'élément, on peut s'en sortir directement en exploitant le cours. Par distributivité, on a :

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (C \cap B) &= [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \cup (C \cap B)\\ &= [A \cap (B \cup C)] \cup (B \cap C)\\ &= [A \cup (B \cap C)) \cap ((B \cup C) \cup (B \cap C))\\ &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C)\end{aligned}$$

Méthode 1.2.— Comment prouver et utiliser que $x \in A \cup B$
On prend un élément x. Deux grandes techniques pour prouver que $x \in A \cup B$

1. Première technique, celle du bilan. On fait une hypothèse, on prouve alors que x est dans un ensemble A. On fait une autre hypothèse, on prouve que x est dans B. Si nos hypothèses recouvrent tous les cas possibles que peut rencontrer x alors on peut affirmer que x appartient à $A \cup B$.
2. Deuxième technique, celle de l'ajout d'hypothèse. Pour montrer que $x \in A \cup B$, il suffit de prouver que si $x \notin B$, alors $x \in A$.

Quand on nous dit que $x \in A \cup B$, on ne sait pas si x est dans A ou dans B mais on est sûr qu'il est au moins dans l'un des deux ! Pour exploiter cette information, il suffit de distinguer les cas :

— Si x est dans A alors... blabla...

— Si x est dans B alors... blabla...

et de faire une conclusion ! L'avantage de procéder ainsi est de pouvoir exploiter les propriétés de A (dans le premier cas) puis de B (second cas).

Mise en œuvre : exercice 1.3.