1 Modes de raisonnement

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit P et Q deux propositions mathématiques.

1. P implique Q est équivalent à non(P) implique non(Q). ☐ Vrai ☐ Faux
2. P implique Q est équivalent à non(Q) implique non(P). ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

1. Soit $n \geq 0$. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par contraposée, que si n^2 est un entier pair alors n aussi.
2. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 3 –

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $2^n > n$.

Exercice 4 –

On pose $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ et :

$$\forall n \geq 0,\ a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$$

Montrer par récurrence double que :

$$\forall n \geq 0,\ \frac{a_n}{n!} \leq 1$$

Exercice 5 –

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence forte, que tout entier $n \geq 2$ s'écrit comme un produit de nombres premiers.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 6 –

Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par $u_2 = 1$ et :

$$\forall n \geq 2,\ u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur à 2, on a $0 \leq u_n \leq 1$.

Exercice 7 –
Soit u la suite définie par $u_0 = 5$, $u_1 = 6$ et :

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$$

Montrer que :

$$\forall n \geq 0,\ u_n = (-3n + 5)\, 3^n$$

Exercice 8 –
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer :

$$\forall \varepsilon > 0,\ x^2 \leq \varepsilon \implies x = 0$$

Pour aller plus loin

Exercice 9 –
Soit $b > 0$. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation :

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = bu_n^2$$

Exercice 10 –
Déterminer la (ou les) fonction(s) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle(s) que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

Exercice 11 – Le vrai/faux de la fin

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si n est le carré d'un entier, $2n$ ne l'est pas. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Tout entier positif est somme de trois carrés d'entiers naturels. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. P implique Q est équivalent à non(P) implique non(Q). ☐ Vrai ☒ Faux
2. P implique Q est équivalent à non(Q) implique non(P). ☒ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

1. On souhaite montrer que si n^2 est pair, alors n aussi. Supposons donc que n n'est pas pair et montrons que n^2 n'est pas pair. L'entier n est donc impair : il existe un entier $k \geq 0$ tel que $n = 2k + 1$. Alors :

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

et $2k^2 + 2k$ est un entier donc n^2 est impair. On a ainsi montré le résultat souhaité par contraposée.

Méthode

Soit P et Q deux propositions mathématiques. Montrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie est équivalent à montrer que l'implication $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$ est vraie. Autrement dit, pour montrer $P \Rightarrow Q$, on peut supposer que Q est fausse et montrer que P est fausse.

2. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel. Sachant que ce nombre est strictement positif, il existe donc deux entiers naturels non nuls p et q tels que :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

et sans perte de généralité, on peut supposer que cette fraction est irréductible. On a alors $q\sqrt{2} = p$ donc $2q^2 = p^2$. On en déduit que p^2 est un entier pair donc p aussi d'après la question 1. Ainsi, il existe un entier naturel k tel que $p = 2k$. Alors :

$$2q^2 = p^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

ce qui implique que $q^2 = 2k^2$. Ainsi, q^2 est pair donc q aussi d'après la question 1. On en déduit que p et q sont tous les deux divisibles par 2 ce qui est absurde car la fraction est irréductible. On vient donc de montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Cours

L'ensemble des rationnels, noté $\mathbb{Q}$, est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\}$$

Un réel est irrationel si il n'est pas rationnel.

Méthode

Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.

Exercice 3 –

On a $2^1 = 2 > 1$ donc l'inégalité souhaitée est vraie au rang 1.

Soit $n \geq 1$ tel que $2^n > n$. Montrons que $2^{n+1} > n + 1$. On a :

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2n$$

par hypothèse de récurrence. Or $n \geq 1$ donc $2n = n + n \geq n + 1$. On en déduit que :

$$2^{n+1} > 2n \geq n + 1$$

ce qui montre le résultat souhaité.

La propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire. Par principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1.

Méthode

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Pour démontrer par récurrence une propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant d'un entier $n \geq n_0$, on suit le raisonnement suivant :

— *Initialisation* : on montre que la propriété est vraie au rang n_0.

— On prouve l'*hérédité* : on considère un entier $n \geq n_0$ pour lequel $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montre alors que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

— On conclut.

Exercice 4 –

On a :

$$\frac{a_0}{0!} = 1 \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{a_1}{1!} = 1 \leq 1$$

L'inégalité à montrer est donc vraie aux rangs 0 et 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\frac{a_n}{n!} \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} \leq 1$$

Montrons que :

$$a_{n+2} \leq (n+2)!$$

On a par hypothèse de récurrence et sachant que les termes sont positifs :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1} + (n+1)a_n \\ &\leq (n+1)! + (n+1)n! \\ &\leq 2(n+1)! \\ &\leq (n+2)(n+1)! \\ &\leq (n+2)! \end{aligned}$$

et c'est ce qu'il fallait prouver.

Par récurrence double, on vient donc de montrer l'inégalité souhaitée :

$$\forall n \geq 0, \ \frac{a_n}{n!} \leq 1$$

Méthode

Pour démontrer par récurrence double une propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant d'un entier $n \geq 0$, on suit le raisonnement suivant :

— *Initialisation* : on montre que la propriété est vraie aux rangs 0 et 1.

— On prouve l'*hérédité* : on considère un entier $n \geq 0$ pour lequel $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies et montre alors que $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.

— On conclut.

Ce type de raisonnement est particulièrement adapté dans le cas de certaines suites dont un terme dépend des deux précédents. On adapte évidemment le raisonnement si la propriété est définie à partir d'un autre rang que 0.

Exercice 5 –

$2 = \prod_{k=1}^{1} 2$ est bien un produit de nombres premiers (2 est premier).

Soit $n \geq 2$ tel que $2, 3, \dots, n-1$ vérifient la propriété souhaitée. Distinguons deux cas. Si n est premier, le résultat est évident. Sinon, il existe deux entiers naturels i et j, compris entre 2 et $n-1$ tels que $n = ij$. Par hypothèse de récurrence, i et j s'écrivent comme un produit de nombres premiers donc $n = ij$ aussi.

On vient donc de montrer par récurrence forte que tout entier $n \geq 2$ s'écrit comme un produit de nombres premiers.

Méthode

Pour démontrer par récurrence forte une propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant d'un entier $n \geq n_0$, on suit le raisonnement suivant :

- *Initialisation* : on montre que la propriété est vraie au rang n_0.
- On prouve l'*hérédité* : on considère un entier $n \geq n_0$ pour lequel $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout entier $k \in \{n_0, \dots, n-1\}$ et montre alors que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
- On conclut.

Exercice 6 –

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq 1$.

Pour $n = 2$, $u_2 = 1$ et $0 \leq 1 \leq 1$. Ainsi la propriété est vérifiée au rang 2.

Soit n un entier supérieur ou égal à deux tel que :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

Montrons que :

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

On sait que :

$$u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Par hypothèse de récurrence on sait que $0 \leq u_n \leq 1$. Il est clair que :

$$1 - \frac{1}{n^2} \leq 1$$

et on a :

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \geq 0$$

car $n \geq 2$. Ainsi, u_n et $1 - \frac{1}{n^2}$ sont deux nombres compris entre 0 et 1. Par produit, u_{n+1} appartient donc lui aussi à $[0, 1]$.

La propriété est vraie pour $n = 2$ et est héréditaire. Par principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2.

Exercice 7 –

On a :

$$(-3 \times 0 + 5)\, 3^0 = 5 = u_0 \quad \text{et} \quad (-3 \times 1 + 5)\, 3^1 = 2 \times 3 = 6 = u_1$$

L'égalité souhaitée est donc vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Soit $n \geq 0$ tel que :

$$u_n = (-3n + 5)\, 3^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = (-3(n+1) + 5)\, 3^{n+1} = (-3n + 2)\, 3^{n+1}$$

Montrons que :

$$u_{n+2} = (-3(n+2) + 5)\, 3^{n+2} = (-3n - 1)\, 3^{n+2}$$

Par définition de u, on sait que :

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$$

donc par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 6\,(-3n + 2)\, 3^{n+1} - 9\,(-3n + 5)\, 3^n \\ &= 2\,(-3n + 2)\, 3^{n+2} - (-3n + 5)\, 3^{n+2} \\ &= (-6n + 4 + 3n - 5)\, 3^{n+2} \\ &= (-3n - 1)\, 3^{n+2} \end{aligned}$$

et c'est ce que l'on voulait montrer.

Par récurrence double, on vient donc de montrer que la propriété de l'énoncé est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Cours

Ce type de suite est appelé suite récurrente linéaire d'ordre deux. Un résultat du programme permet d'obtenir leur terme général (voir fiche 18).

Exercice 8 –

Raisonnons par contraposée. Soit x un réel non nul.

Montrons l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que $x^2 > \varepsilon$.

Non$(\forall \varepsilon > 0,\ x^2 \leq \varepsilon) = (\exists \varepsilon > 0 \mid x^2 > \varepsilon)$

Posons :

$$\varepsilon = \frac{x^2}{2}$$

Sachant que x est non nul, il est clair que $\varepsilon \in \left]0, x^2\right[$ ce qui donne le résultat souhaité.

Exercice 9 –

On a :

Il est toujours utile de calculer les premiers termes d'une suite définie par récurrence. Cela permet de conjecturer le signe, les variations, l'expression du terme général...

$$u_1 = bu_0^2$$

puis :

$$u_2 = bu_1^2 = b(bu_0^2)^2 = b^3 u_0^4$$

et :

$$u_3 = bu_2^2 = b^7 u_0^8$$

On conjecture alors :

Attention : $u_0^{2^n}$ n'est pas $(u_0^2)^n$

$$\forall n \geq 0,\ u_n = b^{2^n-1} u_0^{2^n}$$

On montre cette égalité par récurrence. Elle est vraie au rang 0 car :

$$b^{2^0-1} u_0^{2^0} = b^0 u_0^1 = u_0$$

Soit $n \geq 0$ tel que :

$$u_n = b^{2^n-1} u_0^{2^n}$$

Montrons que :

$$u_{n+1} = b^{2^{n+1}-1} u_0^{2^{n+1}}$$

Par définition de la suite, on a :

$$u_{n+1} = bu_n^2$$

donc par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= b\left(b^{2^n-1} u_0^{2^n}\right)^2 \\ &= bb^{2(2^n-1)} u_0^{2\times 2^n} \\ &= b^{1+2^{n+1}-2} u_0^{2^{n+1}} \\ &= b^{2^{n+1}-1} u_0^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

et c'est ce que l'on voulait montrer.

La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc par principe de récurrence, on en déduit que :

$$\forall n \geq 0,\ u_n = b^{2^n-1} u_0^{2^n}$$

Exercice 10 –

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit f une fonction solution du problème posé :

On dit que f est solution d'une équation fonctionnelle

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

On en déduit qu'en particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x - f(0)) = 1 - x$$

En remplaçant x par $x + f(0)$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - x - f(0)$$

Pour $x = 0$, on en déduit que $f(0) = 1 - f(0)$ donc $f(0) = \frac{1}{2}$ et finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2} - x$$

Synthèse. Vérifions que la fonction f obtenue est bien solution. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} f(x - f(y)) &= f(x - \tfrac{1}{2} + y) \\ &= \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2} + y\right) \\ &= 1 - x - y \end{aligned}$$

La seule solution du problème posé est donc $f : x \mapsto \frac{1}{2} - x$.

Méthode

Le raisonnement par analyse-synthèse est très utile pour des problèmes du type :

- Trouver les fonctions telles que ...
- Trouver les suites telles que ...
- Trouver les couples de réels tels que ...

Dans l'analyse, on considère une solution du problème et en utilisant les données de l'énoncé, on essaie de trouver des conditions sur cette solution. Dans la synthèse, on vérifie si les conditions trouvées suffisent (il peut arriver que non : on peut alors tenter de trouver d'autres conditions et il peut arriver qu'aucune solution n'existe).

Exercice 11 –

1. Vrai. Soit $n \geq 1$ s'écrivant comme le carré d'un entier : $n = k^2$ où $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons par l'absurde que $2n$ est aussi le carré d'un entier : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $2n = p^2$. On en déduit que $p^2 = 2k^2$ donc par stricte positivité de p et k :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{k}$$

ce qui implique que $\sqrt{2}$ est rationnel ce qui est absurde. Ainsi, $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

2. Faux. Il suffit de trouver un contre-exemple. En étudiant les premières valeurs de n, on remarque que la propriété est fausse pour $n = 7$. En effet, si il existe $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que :

$$7 = a^2 + b^2 + c^2$$

alors a, b et c appartiennent nécessairement à $\{0, 1, 2\}$ (sinon, la somme est supérieure ou égale à 9). On vérifie alors facilement qu'aucun triplet n'est solution.

Méthode

Pour montrer qu'une propriété dépendant d'un entier $n \geq 0$ est fausse, il suffit de donner un contre-exemple concret.