

1 - Raisonnement, vocabulaire ensembliste, calculs algébriques

Rappels de cours

Un ensemble est un *symbole* « doté de vertus » que l'on a coutume d'attribuer à une *collection d'objets*. Pour écrire que x est élément de E , on écrit $x \in E$.

L'ensemble sans élément est noté \emptyset .

Les ensembles sont susceptibles de satisfaire à certaines relations. Nous considérons comme comprise la notion de **relation** R .

On appelle **négation** de R , notée $(\text{non } R)$ et alors $\text{non}(\text{non } R)$ est R .

- **Conjonction** : c'est la relation (notée R_1 et R_2). Elle est vraie si R_1 et R_2 le sont.

- **Disjonction** de deux relations R_1, R_2 (notée R_1 ou R_2). Elle est vraie si l'une au moins des deux est vraie.

- **Implication** (notée $R_1 \Rightarrow R_2$) est : R_2 ou $(\text{non } R_1)$.

- **Équivalence** : (notée $R_1 \iff R_2$). C'est $(R_1 \Rightarrow R_2 \text{ et } R_2 \Rightarrow R_1)$

- **Raisonnement par l'absurde** :

montrer $R_1 \Rightarrow R_2$ est équivalent à : montrer $(\text{non } R_2) \Rightarrow (\text{non } R_1)$.

- **Relation d'inclusion** : si E et F sont deux ensembles, on dit que E est contenu dans F ou E est une partie de F si $x \in E \Rightarrow x \in F$.

- **Relation d'égalité** : $E = F$ si $E \subset F$ et $F \subset E$.

- **Quantificateurs**

Pour tout x , la relation R est vérifiée : $\forall x, R$.

Il existe x tel que R soit vérifiée : $\exists x, R$.

$$\text{non } (\exists x \in E, R) \iff (\forall x \in E, \text{non } R)$$

$$\text{non } (\forall x \in E, R) \iff (\exists x \in E, \text{non } R)$$

- Opérations sur les parties d'un ensemble.

- $\mathcal{P}(E)$ ensemble des parties de l'ensemble E .

- $C_E(A) = E \setminus A = \bar{A} = A^c$ le complémentaire dans E de la partie A .

• **Intersection et réunion de deux ensembles**

$$x \in A \cap B \iff (x \in A) \text{ et } (x \in B)$$

$$x \in A \cup B \iff (x \in A) \text{ ou } (x \in B)$$

$$C_E(\emptyset) = E \text{ et } C_E(E) = \emptyset,$$

$$C_E(A \cup B) = (C_E(A)) \cap (C_E(B)) \text{ et } C_E(A \cap B) = (C_E(A)) \cup (C_E(B)).$$

$$A \cap A = A ; A \cap B = B \cap A ; A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

$$A \cup A = A ; A \cup B = B \cup A ; A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) ; A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont *disjoints*.

• **Produit cartésien de deux ensembles**

C'est l'ensemble des couples (x, y) , $x \in E$ et $y \in F$. Il est noté $E \times F$.

• Relations binaires. \mathcal{R} est dite

réflexive, si $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$,

symétrique, si $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$,

antisymétrique, si $\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$,

transitive, si $\forall (x, y, z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$,

\mathcal{R} est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique, transitive.

\mathcal{R} est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique, transitive.

On appelle **classe d'équivalence** de x pour la relation \mathcal{R} , l'ensemble des y de E tels que $x\mathcal{R}y$.

Les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence \mathcal{R} sur E , sont non vides, deux à deux disjointes de réunion E .

On dit que x est congru à y modulo a dans \mathbb{R} (on note $x \equiv y [a]$) s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = ka$.

On dit que x est congru à y modulo n dans \mathbb{Z} (on note $x \equiv y [n]$) s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = kn$.

Applications

• Une application f de E dans F associe à tout élément x de E un unique élément y de F que l'on note $y = f(x)$.

• La restriction de f à $A \subset E$ est $f|_A : A \mapsto F, x \mapsto f(x)$.

• Si $A \subset E$, on note \mathbb{I}_A la fonction caractéristique de A . C'est l'application de E dans $\{0, 1\}$ définie par $\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in C_E(A) \end{cases}$

• Image directe de $A \subset E$ est la partie $f(A) = \{f(x) \in F \mid x \in A\}$.

• Image réciproque de $B \subset F$ par f est $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$ *i.e.* l'ensemble des antécédents des éléments de B .

• Si $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$, on définit $g \circ f \in \mathcal{F}(E, G)$ par la formule

$$\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

- $f \in \mathcal{F}(E, F)$ est **injective** si deux éléments distincts de E ont des images distinctes, ce qui s'écrit :

$$\forall (x, x') \in E^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

i.e. $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

- $f \in \mathcal{F}(E, F)$ est **surjective** si tout élément de F a au moins un antécédent par f *i.e.*

$$(\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)) \text{ i.e. } f(E) = F.$$

- $f \in \mathcal{F}(E, F)$ est **bijective** si elle est à la fois surjective et injective *i.e.* si

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x).$$

- La composée de deux applications injectives (*resp.* surjectives, *resp.* bijectives), est injective (*resp.* surjective, *resp.* bijective).

Dans ce dernier cas, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Énoncés des exercices

1. Montrer $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$.

2. Montrer $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

3. Montrer : $\begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \Rightarrow B \subset C$.

4. Soient A et B des parties d'un ensemble E .

Montrer : $B \subset A \iff \forall X \in \mathcal{P}(E), (A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)$.

5. Soient A et B des parties d'un ensemble E . On définit $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, $X \mapsto (X \cap A, X \cap B)$.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante d'injectivité de f .

b. Idem avec la surjectivité.

6. Soit f une application de E dans lui-même.

Montrer que f est bijective si, et seulement si, pour toute partie A de E on a $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ où \overline{A} désigne le complémentaire de A dans E .

7. Soit f une bijection de \mathbb{N} sur lui-même.

a. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq n$ montrer $f = Id$.

b. Idem si l'on suppose $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \geq n$.

c. On suppose enfin : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \neq n$. Prouver que $\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) < n\}$ et $\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) > n\}$ sont des parties infinies de \mathbb{N} .

8. Soit E un ensemble. Montrer que la relation \mathcal{R} relation définie sur $\mathcal{P}(E)$ par :
- $$A\mathcal{R}B \iff A = B \text{ ou } A = \overline{B}$$
- est une relation d'équivalence.

9. Soit \mathcal{R} la relation définie sur \mathbb{R} par : $x\mathcal{R}y \iff xe^y = ye^x$.
- Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
 - Pour tout nombre réel x préciser le cardinal de la classe d'équivalence de x .

10. Montrer $\binom{n+1}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \dots + \binom{n}{p}$ si $0 \leq p \leq n$

a. Par récurrence sur n .

b. En utilisant $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$.

c. Déterminer des nombres réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$k^2 = \alpha \frac{k(k-1)}{2} + \beta k \text{ et } k^3 = \gamma \frac{k(k-1)(k-2)}{6} + \delta \frac{k(k-1)}{2} + \varepsilon k.$$

Retrouver alors $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$ et $\sum_{k=1}^n k^3$.

11. Soient E un ensemble de cardinal n et $\mathcal{A}_n = \{f : E \rightarrow \mathbb{N} \mid \sum_{x \in E} f(x) \leq p\}$ où p est un entier naturel fixé.

Montrer par récurrence sur n que \mathcal{A}_n contient $\binom{n+p}{n}$ éléments.

12. Soit (Σ_2)
$$\begin{cases} x - my + m^2z = 2m \\ mx - m^2y + mz = 2m \\ mx + y - m^3z = 1 - m \end{cases} \text{ où } m \in \mathbb{R}.$$

À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et en discutant suivant les valeurs de m préciser, dans les cas où ce système admet des solutions, la nature géométrique de l'ensemble de ces solutions.

13. On considère le système (Σ_1)
$$\begin{cases} ax + by + z = \alpha \\ x + aby + z = \beta \\ x + by + az = \gamma \end{cases} \text{ où } (a, b, \alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^5.$$

À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et en discutant suivant les valeurs de $(a, b, \alpha, \beta, \gamma)$ préciser, dans les cas où ce système admet des solutions, la nature géométrique de l'ensemble de ces solutions.

14. Soient f une application de E dans F et A_1, A_2 deux parties de E . Montrer que
- $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.
 - $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
 - $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ avec égalité si f est injective.
 - $f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2)$ avec égalité si f est injective.

15. Soient f une application de E dans F et B_1, B_2 deux parties de F . Montrer que
- $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
 - $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
 - $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
 - $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$
-
16. Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G .
- Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
 - Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
-

Solutions des exercices

1. Supposons $A \cup B = A \cap C$.
 $B \subset A \cup B = A \cap C \subset A$ donc $B \subset A$.
 De même $A \subset A \cup B = A \cap C \subset C$ d'où $A \subset C$.
 Réciproquement si $B \subset A \subset C$ alors $A \cup B = A$ et $A \cap C = A$ d'où $A \cup B = A \cap C$.
-
2. Si $x \in (A \cup B) \setminus C$ alors ou bien $x \in A$ ou bien $x \in B$ mais, comme $x \notin C$, cela montre que ou bien $x \in A \setminus C$ ou bien $x \in B \setminus C$, ce qui prouve $(A \cup B) \setminus C \subset (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
 Réciproquement si $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ alors x est soit dans A soit dans B donc dans $A \cup B$ mais $x \notin C$ donc $x \in (A \cup B) \setminus C$.
 En définitive on a montré : $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
-
3. Soit $x \in B$, distinguons deux cas :
- ou bien $x \in A$ et alors $x \in A \cap B \subset A \cap C \subset C$,
 - ou bien $x \notin A$ donc $x \in (A \cup B) \setminus A \subset (A \cup C) \setminus A \subset C$.
- Dans tous les cas $x \in C$. On a effectivement montré $B \subset C$.
-
4. Supposons $B \subset A$. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$.
 $(A \cap X \subset A \text{ et } B \subset A) \Rightarrow (A \cap X) \cup B \subset A$
 et aussi $A \cap X \subset X \Rightarrow (A \cap X) \cup B \subset X \cup B$, donc $(A \cap X) \cup B \subset A \cap (X \cup B)$.
 D'autre part si $x \in A \cap (X \cup B)$ ou bien $x \in X$ et alors $x \in A \cap X$, ou bien $x \in B$.
 En fin de compte $x \in (A \cap X) \cup B$. En résumé $(A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)$.
 Supposons $(A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)$ pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$.
 En particulier lorsque $X = \emptyset$ cela donne $\emptyset \cup B = A \cap B \subset A$ d'où $B \subset A$.
-
5. a. $f(\emptyset) = (\emptyset, \emptyset) = f\left(\bigcup_x (A \cup B)\right)$ et donc une condition nécessaire d'injectivité est $A \cup B = E$.
 Réciproquement si cette égalité est vérifiée et si $f(X) = f(Y)$,

on a $X = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y$.

Une condition nécessaire et suffisante d'injectivité est donc $A \cup B = E$.

b. Si $f(X) = (A \cap B, \emptyset)$ alors $X \cap A = A \cap B$ d'où $X \cap A \cap B = A \cap B = \emptyset$ donc $A \cap B = \emptyset$ est une condition nécessaire de surjectivité.

Réciproquement si cette condition est remplie et si $(Y, Z) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, en posant $X = Y \cup Z$ on a $X \cap A = (Y \cup Z) \cap A = (Y \cap A) \cup (Z \cap A) = Y$ car $Y \subset A$ et $Z \cap A \subset B \cap A = \emptyset$. De même $X \cap B = (Y \cap B) \cup (Z \cap B) = Z$, d'où $f(X) = (Y, Z)$, ce qui montre que f est surjective.

Par suite f est surjective si, et seulement si, $A \cap B = \emptyset$.

6. Supposons f bijective et soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

Si $x \in \overline{A}$ et $y \in f(A)$ alors $f^{-1}(y) \in A$ donc $x \neq f^{-1}(y)$ et, par injectivité de f , $f(x) \neq y$, d'où $f(x) \in \overline{f(A)}$.

De même si $y \in \overline{f(A)}$ alors $f^{-1}(y) \in \overline{A}$ car, sinon $y = f(f^{-1}(y)) \in f(A)$, donc $y \in f(\overline{A})$. En résumé $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Supposons réciproquement que, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Si $(x, y) \in E^2$ et $x \neq y$, si $A = \{x\}$ alors $y \in \overline{A}$, donc $f(y) \in \overline{f(A)} = \overline{\{f(x)\}}$ ce qui montre que $f(x) \neq f(y)$ et, donc, f est injective.

D'autre part $\overline{f(E)} = f(\overline{E}) = f(\emptyset) = \emptyset$ i.e. $f(E) = E$ et f est surjective.

En définitive f est bijective.

7. a. Procédons par récurrence.

On a $f(0) \leq 0$ par hypothèse d'où $f(0) = 0$.

Si l'on suppose l'existence de $n \in \mathbb{N}$ tel que $k \in [0, n] \Rightarrow f(k) = k$ alors, par hypothèse, $f(n+1) \leq n+1$ et, comme $f(n+1) \notin \{f(0), f(1), \dots, f(n)\}$ par injectivité de f , il vient $f(n+1) = n+1$.

Par théorème de récurrence $f = Id$.

b. Procédons de même.

Si k_0 est l'antécédent de 0 alors, par hypothèse, $0 = f(k_0) \geq k_0$, d'où $k_0 = 0$.

Si l'on suppose l'existence de $n \in \mathbb{N}$ tel que $k \in [0, n] \Rightarrow f(k) = k$ alors, en notant k_{n+1} l'antécédent de $n+1$, on a $n+1 = f(k_{n+1}) \geq k_{n+1}$ et, comme $f(k_{n+1}) \notin \{f(0), f(1), \dots, f(n)\}$, nécessairement $k_{n+1} \notin [0, n]$, d'où $k_{n+1} = n+1$.

Par théorème de récurrence $f = Id$.

c. Soit $X = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) < n\}$, supposons que cet ensemble est fini.

La question b. et l'hypothèse $f \neq Id$ montrent que X est non vide. Soit p son maximum. Alors $n \geq p+1 \Rightarrow f(n) > n$ d'où $f(\llbracket p+1, +\infty \rrbracket) \subset \llbracket p+2, +\infty \rrbracket$.

Comme f est surjective, nécessairement $\llbracket 0, p+1 \rrbracket \subset f(\llbracket 0, p \rrbracket)$ qui est au plus de cardinal $p+1$: c'est impossible. Par suite X est infini.

De même soit $Y = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) > n\}$, alors $f(Y) = \{k \in \mathbb{N} \mid f^{-1}(k) < k\}$ car f est bijective. Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(k) \neq k$, le début de la question montre que $f(Y)$ est infini et, donc, Y aussi.

8. Soient $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$.

$A = A \Rightarrow ARA$, \mathcal{R} est réflexive.

$ARB \Rightarrow (A = B \text{ ou } A = \overline{B}) \Rightarrow (B = A \text{ ou } B = \overline{A}) \Rightarrow BRA$, \mathcal{R} est symétrique.

$(ARB \text{ et } BRC) \Rightarrow (A = B \text{ ou } A = \overline{B}) \text{ et } (B = C \text{ ou } B = \overline{C})$

d'où $(A = C \text{ ou } A = \overline{C})$ puis ARC , \mathcal{R} est transitive.

Par suite \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

9. a. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$xe^x = xe^x \Rightarrow x\mathcal{R}x.$$

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow xe^y = ye^x \Rightarrow ye^x = xe^y \Rightarrow y\mathcal{R}x.$$

$(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow xe^y = ye^x \text{ et } ye^z = ze^y \Rightarrow xe^{-x} = ye^{-y} = ze^{-z} \Rightarrow x\mathcal{R}z$, par suite \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

b. On vient de voir : $x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$ où l'on a posé $f : x \mapsto xe^{-x}$.

f est dérivable sur \mathbb{R} avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ d'où le tableau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+ 1 +$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\nearrow 1/e$	$\searrow 0$

Par suite f réalise une bijection de $] -\infty, 1]$ sur $] -\infty, 1/e]$ et aussi une bijection de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1/e[$.

Si $x \leq 0$ ou $x = 1/e$ alors la classe de x est réduite à x , sinon elle contient deux éléments.

10. a. Notons \mathcal{P}_n la propriété : $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

$$\binom{0}{0} = 1 = \binom{1}{1} \text{ d'où } \mathcal{P}_0.$$

Supposons \mathcal{P}_n et soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\text{alors } \sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}.$$

De plus si $p = n+1$ alors $\binom{n+1}{p} = 1 = \binom{n+2}{p+1}$, d'où \mathcal{P}_{n+1} .

$$\text{b. Tout d'abord } \binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1} \Rightarrow \binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}.$$

$$\text{Posons } x_k = \binom{k}{p+1} \text{ si } p \leq k \leq n, \text{ alors } \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^n (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_p$$

$$\text{par télescopage, donc } \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

c. $k(k-1) = k^2 - k$ donc $(\alpha, \beta) = (2, 1)$ convient.

De même $k(k-1)(k-2) = k^3 - 3k^2 + 2k$ d'où $k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) = k^3 - k$ d'où $(\gamma, \delta, \varepsilon) = (6, 6, 1)$ convient.

$$S_1 = \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \alpha \sum_{k=1}^n \binom{k}{2} + \beta \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \alpha \binom{n+1}{3} + \beta \binom{n+1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{soit } S_2 &= 2 \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n(n+1)}{6} [2(n-1)+3] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \\ S_3 &= \sum_{k=1}^n k^3 = 6 \sum_{k=1}^n \binom{k}{3} + 6 \sum_{k=1}^n \binom{k}{2} + \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} \\ &= 6 \binom{n+1}{4} + 6 \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} + (n+1)n(n-1) + \frac{(n+1)n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{4} [(n-1)(n-2) + 4(n-1) + 2] = \frac{n(n+1)}{4} (n^2 + n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

11. $\mathcal{A}_0 = \mathbb{N}^\emptyset$ de cardinal $1 = \binom{p}{0}$.

Pour ceux que le cas $n = 0$ effraie on va traiter le cas $n = 1$: \mathcal{A}_1 est en bijection avec $\llbracket 0, p \rrbracket$ de cardinal $p + 1 = \binom{p+1}{1}$.

Supposons que \mathcal{A}_n est de cardinal $\binom{n+p}{n}$ et soit E de cardinal $n + 1$.

Fixons x_0 dans E , alors $E \setminus \{x_0\}$ est de cardinal n et $f \in \mathcal{A}_{n+1}$ si, et seulement si, il existe k dans $\llbracket 0, p \rrbracket$ tel que $f(x_0) = k$ et $\sum_{x \in E \setminus \{x_0\}} f(x) \leq p - k$.

Si l'on note $\mathcal{B}_k = \{f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{N} \mid \sum_{x \in E \setminus \{x_0\}} f(x) \leq p - k\}$ alors $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$

est une partition de \mathcal{A}_{n+1} d'où $\text{card}(\mathcal{A}_{n+1}) = \sum_{k=0}^p \text{card}(\mathcal{B}_k) = \sum_{k=0}^p \binom{n+p-k}{n}$

soit $\text{card}(\mathcal{A}_{n+1}) = \sum_{\ell=n}^{n+p} \binom{\ell}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$ d'après l'exercice précédent.

Cela termine la récurrence.

12. On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - mL_1$ puis $L_2 \leftrightarrow L_3$ et on obtient le

$$\text{système équivalent} \begin{cases} x - my + m^2z = 2m \\ (1+m^2)y - 2m^3z = 1-m-2m^2 \\ m(1-m^2)z = 2m(1-m) \end{cases}$$

- Si $m \in \{0, 1\}$ les deux premières lignes sont indépendantes et la troisième ligne est $0 = 0$, l'ensemble des solutions est donc une droite.
- Si $m = -1$ les deux premières lignes sont indépendantes et la troisième ligne est $0 = -4$, l'ensemble des solutions est vide.
- Sinon les trois lignes sont indépendantes, l'intersection des trois plans est réduite à un point.

13. Si $a = 1$ la condition de compatibilité est $\alpha = \beta = \gamma$ et on obtient le plan d'équation $x + by + z = \alpha$. Désormais $a \neq 1$.

Effectuons $L_1 \leftarrow L_1 - aL_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$, on obtient le

$$\text{système équivalent} \begin{cases} (2-a-a^2)z = \alpha + \beta - (a+1)\gamma \\ b(a-1)y + (1-a)z = \beta - \gamma \\ x + by + az = \gamma \end{cases}$$