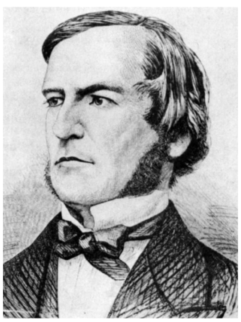
Chapitre 1

Raisonnements mathématiques

UN MATHÉMATICIEN



Né dans une famille de commerçants, **George Boole** est un parfait autodidacte. Il apprend seul le latin et le grec et lit avec passion les textes de grands mathématiciens tels Joseph Lagrange et Pierre-Simon Laplace. Dans sa principale publication, *An investigation into the Laws of Thought*, publié en 1854, il innove en fondant sur des bases mathématiques le raisonnement logique, jusque-là considéré comme une branche de la philosophie.

Un peu d'histoire

On considère les Grecs anciens comme les fondateurs des mathématiques car les premiers, ils ont eu le souci de justifier leurs résultats par des démonstrations. Des philosophes comme Aristote ou les Stoïciens ont même réfléchi à la notion de raisonnement.

Au milieu du XIX^e, les mathématiciens anglais George Boole et Augustus De Morgan s'intéressent au raisonnement logique en tant que tel. Le premier définit des opérations logiques telles la négation d'une proposition, la conjonction ou la disjonction de deux d'entre elles. Le second, s'inspirant d'Aristote, introduit la notion de quantificateur.

Au tournant du XX^e siècle, des mathématiciens comme Giuseppe Peano ou Bertrand Russell utilisent le langage de la théorie des ensembles pour fonder le raisonnement mathématique sur des bases solides.

Objectifs

les incontournables

- ▷ Savoir effectuer un raisonnement par récurrence.
- ▷ Savoir utiliser un raisonnement par récurrence d'ordre 2.

et plus si affinités

- ▷ Savoir effectuer un raisonnement par récurrence d'ordre supérieur ou égal à 2.
- ▷ Savoir mettre en œuvre un raisonnement par l'absurde.
- ▷ Savoir manipuler les connecteurs logiques et les quantificateurs.

Résumé de cours

Les éléments du raisonnement

Proposition

Définition 1.1. — On appelle *proposition* toute phrase $\mathcal{P}$ dont on peut dire si elle est vraie ou fausse. Lorsque l'énoncé d'une proposition porte sur une variable x, nous pourrons la noter $\mathcal{P}(x)$.

Remarque 1.1. — On écrira indifféremment " $\mathcal{P}$ " ou " $\mathcal{P}$ est vraie ".

Exemple 1.1. — Pour tout réel x strictement positif, "$\ln(x) > 0$" est une proposition dépendante de la variable x. Elle est vraie si $x > 1$, et fausse sinon.

Exemple 1.2. — "*La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante*" est une proposition. Notons qu'elle ne dépend pas de l'entier n.

Exemple 1.3. — Pour un dé lancé, "*le numéro sorti est pair*" est une proposition.

Exemple 1.4. — Pour tout réel x, " $(2x+1)e^{-x}$ " n'est pas une proposition.

Quantificateurs

Notation 1.1. — Le signe " $\forall$ " placé devant une variable x signifie "*quel que soit* x...".
Le signe " $\exists$ " placé devant une variable x signifie "*il existe (au moins) un* x...".
Le signe " $\exists!$ " placé devant une variable x signifie "*il existe un unique* x...".
" $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+1>0$ " se lit : "quel que soit le réel x, x^2+1 est strictement positif" ou "pour tout réel x, x^2+1 est strictement positif".
" $\exists x \in\ ]0,+\infty[,\ x^2-6x+1=0$ " se lit : "il existe au moins un réel x strictement positif tel que x^2-6x+1 est égal à 0" (il y a d'ailleurs deux tels x : $3+2\sqrt{2}$ et $3-2\sqrt{2}$).
" $\exists! n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{n(n+1)}{2}=3$ " se lit : "il existe un unique entier naturel n non nul tel que $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est égal à 3" (il s'agit du nombre 2).

Remarque 1.2. — Notons que, dans un énoncé, l'expression "*il existe un* x" signifiera toujours implicitement qu'il en existe au moins un. Si unicité il y a, elle sera explicitement mentionnée.

Propriété 1.1. — En général, la proposition $(\forall x, \exists y, \mathcal{P}(x,y))$ est différente de $(\exists y, \forall x, \mathcal{P}(x,y))$.

Exemple 1.5. — La proposition " $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z},\ n \le x < n+1$ " énonce que, quel que soit le réel x, il existe un entier n, tel que x soit compris entre n et $n+1$, cette dernière valeur étant exclue. C'est une proposition vraie (qui définit d'ailleurs ce que l'on appelle la partie entière du réel x). Elle est différente de la suivante : " $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, n \le x < n+1$ " qui affirme, quant à elle, que tous les réels sont compris entre deux entiers fixés. Elle est évidemment fausse.

❑ Connecteurs logiques

Définition 1.2. — La proposition contraire de $\mathcal{P}$, notée non$\mathcal{P}$ et appelée *négation* de $\mathcal{P}$, est la proposition qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et qui est fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.

Propriété 1.2. — La négation de $(\forall x, \mathcal{P}(x))$ est la proposition $(\exists x, \text{non}\,\mathcal{P}(x))$.
La négation de $(\exists x, \mathcal{P}(x))$ est la proposition $(\forall x, \text{non}\,\mathcal{P}(x))$.

Exemples 1.6. — • Pour un dé lancé trois fois, le contraire de "*les trois numéros obtenus sont pairs*" est "*au moins un des numéros obtenus est impair*".

• La négation de " $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z},\ n \le x < n+1$ " est :

" $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ x < n$ ou $x \ge n+1$ "

La première proposition est vraie puisqu'elle définit l'entier n qui est la partie entière de x (voir **exemple 1.5**) et la deuxième est fausse car il n'existe pas de réel x tel qu'aucun entier ne soit dans l'intervalle $]x-1, x]$.

Définition 1.3. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On appelle *disjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ la proposition ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$), le "ou" étant entendu ici inclusivement (soit $\mathcal{P}$, soit $\mathcal{Q}$, soit les deux).

Exemple 1.7. — Pour un dé lancé, on considère $\mathcal{P}$: "*le numéro sorti est pair*", et $\mathcal{Q}$: "*le numéro sorti est supérieur ou égal à* 3". Alors, ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) est : "*le numéro sorti est* 2,3,4,5 *ou* 6".

Définition 1.4. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On appelle *conjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ la proposition ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) (les deux simultanément).

Exemple 1.8. — En reprenant l'**exemple 1.7**, ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) est : "*le numéro sorti est* 4 *ou* 6".

Définition 1.5. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ *implique* $\mathcal{Q}$, et on note $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, lorsque, si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ est vraie (l'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est appelée *réciproque* de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$).

Vocabulaire — Lorsque $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est une condition suffisante de $\mathcal{Q}$, et que $\mathcal{Q}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{P}$.

⇨ **Méthode 1.1. Comment établir que $f(x) \le f(y)$?**
⇨ **Méthode 1.2. Comment établir une inégalité quelconque ?**
⇨ **Méthode 1.3. Comment montrer une proposition par implication ?**

Exemple 1.9. — Pour tout réel x, on a : $(x = x^2) \Rightarrow (x \ge 0)$ (l'implication réciproque est fausse).

Définition 1.6. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ *équivaut* à $\mathcal{Q}$ (ou que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes), et on note $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, lorsqu'on a, à la fois, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

Vocabulaire — Lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes, on dit que $\mathcal{P}$ est vraie si, et seulement si, $\mathcal{Q}$ est vraie. On dit aussi que $\mathcal{P}$ est une *condition nécessaire et suffisante* de $\mathcal{Q}$.

Exemple 1.10. — $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ (\ln a < \ln b) \Leftrightarrow (a < b)$.

Exemple 1.11. — Pour tout entier n, n est multiple de 6 si, et seulement si, n est multiple à la fois de 2 et de 3.

■ Différents types de raisonnements

❑ Démonstration par l'absurde

Théorème 1.1. — Quelles que soient les propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, pour montrer que $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, on suppose que $\mathcal{P}$ est vraie, que $\mathcal{Q}$ est fausse, et on montre que c'est impossible.

⇨ **Méthode 1.4. Comment montrer une proposition par l'absurde ?**

❑ Démonstration par récurrence

Récurrence simple

Théorème 1.2. — Soit un entier naturel n_0.
Considérons une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n.
Si $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et si, en supposant la proposition $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n supérieur ou égal à n_0, on montre que la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

⇨ **Méthode 1.5. Comment montrer une proposition par récurrence ?**

Vocabulaire — La preuve de $\mathcal{P}(n_0)$ s'appelle l'*initialisation* de la récurrence. La vérité de l'implication $\left(\mathcal{P}(n) \text{ est vraie}\right) \Rightarrow \left(\mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie}\right)$ s'appelle l'*hérédité* de la proposition.
Attention ! Dans l'étude de l'hérédité, on ne suppose surtout pas que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n (sinon, il n'y a plus rien à prouver !). On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier n, et on montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

Remarque 1.3. — La plupart du temps, on a $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$.

Récurrence d'ordre p (avec $p \geq 2$)

Il arrive que, pour établir une proposition à un certain rang, on ait besoin de savoir qu'elle est vraie aux p rangs précédents (souvent $p = 2$). On a alors :

Théorème 1.3. — Considérons une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n.
Si les p premières propositions $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(p-1)$ sont vraies et si, en supposant les p propositions $\mathcal{P}(n), \mathcal{P}(n+1), \ldots, \mathcal{P}(n+p-1)$ vraies, pour un certain entier naturel n de $\mathbb{N}$, on montre que $\mathcal{P}(n+p)$ est vraie, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit l'entier n de $\mathbb{N}$.

⇨ **Méthode 1.6. Comment montrer une proposition par récurrence d'ordre 2 ?**

❑ La contraposition

Théorème 1.4. — Montrer que $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$ revient à montrer que, si $\mathcal{Q}$ n'est pas vraie, alors $\mathcal{P}$ n'est pas vraie.

■■ Méthodes

■ Comparaison d'expressions

❑ Méthode 1.1. Comment établir que $f(x) \leq f(y)$?

Si une fonction f est monotone sur un ensemble I, et si x et y appartiennent à I, alors comparer x et y suffit pour comparer $f(x)$ et $f(y)$.

Plus précisément :

• Si f est croissante sur I, alors : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

• Si f est décroissante sur I, alors : $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

Remarque : si l'on veut établir des équivalences au lieu d'implications, il faut signaler en plus la bijectivité de f (ce qui établit l'implication réciproque grâce aux variations de f^{-1} qui sont les mêmes que celles de f).

⇨ **Exercice 1.4**

Exemple. Montrer que quel que soit l'entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n} \quad \text{(nous noterons cette inégalité } (I)\text{)}$$

Remarque importante de présentation — Nous allons commencer par une analyse qui se fait au brouillon, ou même, avec un peu d'habitude, mentalement. Nous proposerons une rédaction "au propre" dans un second temps.

Au brouillon :

• Compte tenu des règles sur les exposants, (I) s'écrit : $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \leq \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right]^n$.

• Puisque la fonction $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et puisque les deux membres de l'inégalité sont positifs (car $n \geq 2$), alors cette dernière inégalité équivaut à la suivante :

$$1-\frac{2}{n} \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^2.$$

• Mais, en développant le membre de droite, nous nous rendons compte que cette inégalité est évidente. En effet, elle s'écrit : $1-\frac{2}{n} \leq 1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}$, c'est-à-dire : $0 \leq \frac{1}{n^2}$, ce qui est vrai.

Sur la copie :
Il suffit de "partir" de la fin du raisonnement au brouillon :

$\forall n \geq 2$, $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2 = 1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2} \geq 1-\dfrac{2}{n}$ (car $\dfrac{1}{n^2} \geq 0$) donc : $1-\dfrac{2}{n} \leq \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2$.

La fonction $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et chaque membre est positif (car $n \geq 2$)

donc : $\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n \leq \left[\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2\right]^n$.

Cette inégalité s'écrit bien : $\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n \leq \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$.

❑ Méthode 1.2. Comment établir une inégalité quelconque ?

Si l'inégalité que l'on se propose de prouver ne peut pas se mettre sous la forme étudiée à la **méthode 1.1,** alors en "passant tout" dans un même membre, on se ramène à prouver qu'une expression est positive (ou négative, selon les cas). Il sera par exemple possible, mais non obligatoire (voir ci-dessous), d'étudier les variations de la fonction définie par cette expression.

⇨ **Exercice 1.4**

Exemple 1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geq 2\sqrt{x}-1$.

Pour tout réel x positif, on a la chance de constater que : $x-2\sqrt{x}+1 = \left(\sqrt{x}-1\right)^2$.

Comme un carré est positif, on en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x-2\sqrt{x}+1 \geq 0$.

On a bien montré que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geq 2\sqrt{x}-1$.

Exemple 2. Montrer que : $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ \ln(1+x) \leq x$.

On pose $f(x) = x-\ln(1+x)$ et on étudie la fonction f sur $\left]-1, +\infty\right[$.

Cette fonction est bien sûr dérivable et on a : $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ f'(x) = 1-\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$.

Comme $1+x>0$, le signe de $f'(x)$ est celui de x, ce qui prouve que f décroît sur $\left]-1, 0\right[$ et croît sur $\left]0, +\infty\right[$. Elle atteint donc son minimum pour $x=0$.

On a alors : $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ f(x) \geq f(0)$. Comme $f(0)=0$ on obtient : $x-\ln(1+x) \geq 0$.

Conclusion :

$$\forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ \ln(1+x) \leq x$$

Méthodes

■ Différents types de raisonnement

❑ Méthode 1.3. Comment montrer une proposition par implication ?

La plupart du temps, pour prouver une proposition, on procède par implication (sans se sentir obligé d'utiliser le symbole $\Rightarrow$) en construisant un raisonnement "direct".

➩ **Exercice 1.5**

Exemple. Montrer que, si $x < 1$, alors $|x-4| > 3$.

Si $x < 1$, alors $x - 4 < -3$. Par décroissance de la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}_-$, on en déduit que : $|x-4| > |-3|$. Ceci veut bien dire que : $|x-4| > 3$.

Avec des notations plus symboliques, on vient de montrer que : $(x < 1) \Rightarrow (|x-4| > 3)$.

❑ Méthode 1.4. Comment montrer une proposition par l'absurde ?

Pour montrer qu'une implication est vraie, il suffit de supposer l'hypothèse vraie et la conclusion fausse, puis d'en déduire alors une contradiction.

➩ **Exercice 1.6**

Exemple. Montrer que pour tout nombre réel x différent de -3, on a : $\dfrac{x+1}{x+3} \neq 1$.

Par l'absurde, si l'on avait $\dfrac{x+1}{x+3} = 1$, alors on en déduirait $x+1 = x+3$, ce qui équivaut à $1 = 3$.

Ceci étant manifestement faux, on en déduit que : $\forall x \neq -3,\ \dfrac{x+1}{x+3} \neq 1$.

■ Récurrences

❑ Méthode 1.5. Comment montrer une proposition par récurrence ?

n_0 est ici un entier naturel fixé.

On veut montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n à partir de n_0.

- Initialisation : on vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- Hérédité : on considère que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier n supérieur ou égal à n_0. En utilisant $\mathcal{P}(n)$, on montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.
- Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est alors vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0.

➩ **Exercices 1.7, 1.8, 1.9, 1.11**