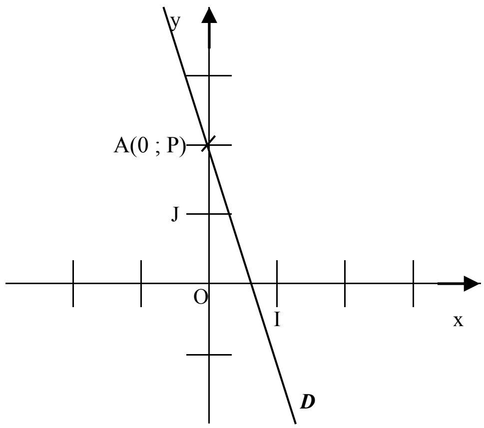
35. Fonctions affines

- Une **fonction affine f** est une fonction qui, à un nombre x, associe le nombre f(x) défini par : **f(x) = Mx + P**, avec M et P deux nombres réels fixés.
- **M** est appelé le **coefficient directeur** et **P** est appelé **l'ordonnée à l'origine.**

Exemple : si M = –3 et P = 2, alors vous obtenez la fonction affine f définie par : f(x) = –3x + 2.



- La représentation graphique d'une fonction affine est une **droite *D* d'équation : y = Mx + P.** Cette droite passe par le point A(0 ; P). Pour trouver un deuxième point, vous choisissez une valeur $\mathbf{x_1}$ et vous calculez son image $\mathbf{y_1 = f(x_1)}$. Vous placez ensuite les deux points : $\mathbf{A(0\,;P)}$ **et** $\mathbf{B(x_1\,;y_1)}$.

Exemple : la représentation graphique de la fonction affine f telle que f(x) = –3x + 2 contient le point B(4 ; y). Déterminez y.

A. –18 **B.** –12 **C.** –10 **D.** 2 **E.** 12

Vous avez : y = –3x + 2 et x = 4, donc en remplaçant x par 4 :
y = –3 × 4 + 2 = –12 + 2 = –10. **Réponse : C.**

> **Attention**
>
> Si P = 0, alors la fonction f est dite « **fonction linéaire** » et sa représentation graphique est une droite passant par l'origine O du repère et par le point B(1 ; M).

Exemple : la fonction g définie par g(x) = 5x est une fonction linéaire et sa représentation graphique est une droite passant par O et par B(1 ; 5).

- Pour déterminer une **fonction affine** telle que $\mathbf{f(x_1) = y_1}$ **et** $\mathbf{f(x_2) = y_2}$ **:**
  - vous calculez M avec la formule : $\mathbf{M = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$;
  - vous obtenez P en remplaçant x par x_1, f(x) par y_1 dans : $\mathbf{y_1 = Mx_1 + P}$.

Exemple : f est une fonction affine telle que f(3) = 5 et f(5) = 9. Que vaut f(2) ?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** 5

Vous calculez M avec la formule : $M = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{9-5}{5-3} = \dfrac{4}{2} = 2$.

Vous obtenez P en remplaçant x par 3, f(x) par 5 dans : 5 = 2 × 3 + P, soit : 5 = 6 + P, donc : P = 5 – 6 = –1 et : **f(x) = 2x – 1**.

Vous calculez f(2) : f(2) = 2 × 2 – 1 = 4 – 1 = 3. **Réponse : C.**

➯ Si **deux droites sont parallèles**, alors **leurs coefficients directeurs sont égaux.**

Exemple : déterminez l'équation de la droite *D'* parallèle à la droite *D* d'équation : y = 3x + 7 et passant par le point C(5 ; 10).

A. y = 2x **B.** y = x – 7 **C.** y = x – 7 **D.** y = 3x + 5 **E.** y = 3x – 5

L'équation de la droite *D'* est de la forme : y = 3x + P. Pour déterminer P, il suffit d'écrire que le point C appartient à *D'* et de remplacer x par 5 et y par 10 :

y = 3 × 5 + P = 15 + P = 10, donc : P = 10 – 15 = –5.

L'équation de la droite *D'* est donc : y = 3x – 5. **Réponse : E.**

➯ Si **deux droites sont perpendiculaires**, alors **le produit de leurs coefficients directeurs** vaut **–1.**

Exemple : les droites *D* d'équation : y = 2x + 7 et *D'* d'équation : y = –0,5x + 2 sont perpendiculaires car le produit de leurs coefficients directeurs vaut : 2 × (–0,5) = –1.

Entraînez-vous ! QCM

1. La fonction f définie par f(x) = (2x + 3)² – 4x² est une fonction :

A. linéaire **B.** affine **C.** carré **D.** cube **E.** quelconque

2. Le point B(2 ; 11) appartient à la droite :

A. y = 2x **B.** y = x – 7 **C.** y = x + 7 **D.** y = 3x + 5 **E.** y = 3x – 5

3. g est une fonction affine telle que g(1) = 1 et g(5) = 7. Que vaut g(4) ?

A. 1/2 **B.** 3/4 **C.** 11/2 **D.** 1/4 **E.** 1/8

4. La représentation graphique de la fonction affine h telle que h(x) = 3x + 2 contient le point C(x ; 4). Que vaut x ?

A. –1 **B.** 0 **C.** 14 **D.** 3/2 **E.** 2/3

5. Les droites *D* d'équation y = x – 2 et *D'* d'équation y = –0,5x + 4 sont sécantes. Quel est leur point d'intersection ?

A. E(5 ; 3) **B.** E(4 ; 2) **C.** E(2 ; 0) **D.** E(1 ; –1) **E.** E(0 ; –2)

36. Systèmes d'équations

I. Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

1. Méthode par combinaison

- Vous multipliez une équation ou les deux équations par des nombres convenablement choisis de telle manière que l'une des inconnues disparaisse par addition ou soustraction membre à membre des deux équations.

2. Méthode par substitution

- Vous exprimez une des inconnues en fonction de l'autre à l'aide d'une des équations, puis vous reportez le résultat obtenu dans l'équation restante.
- Cette méthode est facile d'utilisation quand une des inconnues possède un coefficient égal à 1 ou –1.

Exemple : dans un enclos, il y a des canards et des moutons. On dénombre 44 têtes et 140 pattes. Combien y a-t-il d'animaux de chaque espèce ?

Vous posez : x = nombre de canards et y = nombre de moutons et le système :

$$\begin{cases} x + y = 44 & (L_1) \\ 2x + 4y = 140 & (L_2) \end{cases}$$

Méthode par combinaison :	**Méthode par substitution :**
Vous multipliez les deux membres de l'équation (L_1) par 2 : $\begin{cases} 2x + 2y = 88 & (L_1') = 2 \times (L_1) \\ 2x + 4y = 140 & (L_2) \end{cases}$	Dans l'équation (L_1), vous exprimez x en fonction de y : x = 44 – y. $\begin{cases} x = 44 - y & (L_1') \\ 2x + 4y = 140 & (L_2) \end{cases}$
Pour éliminer l'inconnue x, vous retranchez membre à membre les deux équations : $\begin{cases} 2x + 2y = 88 & (L_1') \\ -2y = -52 & (L_2') = (L_1') - (L_2) \end{cases}$	Vous remplacez x par 44 – y dans l'équation (L_2) : $\begin{cases} x = 44 - y & (L_1') \\ 2(44 - y) + 4y = 140 & (L_2') \end{cases}$
Vous résolvez (L_2') : $\begin{cases} 2x + 2y = 88 & (L_1') \\ y = 26 & (L_2'') \end{cases}$	Vous développez et réduisez (L_2') : $\begin{cases} x = 44 - y & (L_1') \\ 88 + 2y = 140 & (L_2') \end{cases}$
Vous remplacez y par 26 dans (L_1') : $\begin{cases} 2x + 52 = 88 & (L_1'') \\ y = 26 & (L_2'') \end{cases}$	Vous résolvez l'équation (L_2') : $\begin{cases} x = 44 - y & (L_1') \\ y = 26 & (L_2'') \end{cases}$
Vous résolvez (L_1'') : $\begin{cases} x = 18 & (L_1'') \\ y = 26 & (L_2'') \end{cases}$	Vous remplacez y par 26 dans (L_1') : $\begin{cases} x = 18 & (L_1'') \\ y = 26 & (L_2'') \end{cases}$

Réponse : 18 canards et 26 moutons.

Fiches-Méthodes

Astuce

Le système formé par les équations ax + by = c et a'x + b'y =c' admet pour déterminant :

D = ab' – a'b. Si **D ≠ 0**, alors : $\mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{cb' - c'b}}{\mathbf{D}}$ et $\mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{ac' - a'c}}{\mathbf{D}}$.

Ici, D = 1 × 4 – 2 × 1 = 2, donc : x = (44 × 4 – 140 × 1)/2 = 18 et y = (1 × 140 – 2 × 44)/2 = 26.

II. Systèmes de 3 équations à 3 inconnues

- Vous essayez d'exprimer toutes les inconnues en fonction d'une seule.
- Il suffit ensuite de remplacer les inconnues par leur expression en fonction de l'unique inconnue : le problème revient à résoudre une équation à une seule inconnue.

Fiches-Méthodes

Entraînez-vous ! QCM

1. Christine achète 1 cahier et 2 stylos pour 38 €. Clément achète 2 cahiers et 1 stylo pour 34 €. Combien paiera Aline si elle achète 3 cahiers et 2 stylos ?

A. 36 **B.** 44 **C.** 58 **D.** 60

2. Raphaëlle vient de commander 3 pains au chocolat et 2 croissants à la boulangerie. Elle a payé 4,60 €. Soudain, elle se ravise et dit à la boulangère :
« Excusez-moi, je me suis trompée, c'était le contraire.
- Bien sûr, répond la boulangère. »
Elles font l'échange et la boulangère lui rend 20 centimes d'euros.
Quel est le prix d'un pain au chocolat ?

A. 0,80 € **B.** 1 € **C.** 1,20 € **D.** 1,40 €

3. Quelle est la valeur de y solution du système : $\begin{cases} 3x + y - 3z = 5 \\ x - y + 2z = 7 \\ -4x + 2y + z = -4 \end{cases}$?

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

4. Clarisse a assez d'argent pour acheter 3 caramels et 2 sucres d'orge ou 8 réglisses et 3 oursons. Camille a assez d'argent pour acheter 6 oursons ou 2 caramels et 3 sucres d'orge. Combien de réglisses valent 4 caramels et 1 sucre d'orge ?

A. 10 **B.** 12 **C.** 14 **D.** 16

Attention

Pour qu'un système ait une unique solution, il faut que le **nombre d'inconnues** soit égal au **nombre d'équations indépendantes**, c'est à dire que les équations ne doivent être :

- **ni liées** (X + Y = 2 et 2X + 2Y = 4 sont liées puisque la seconde équation vaut le double de la première) ;
- **ni incompatibles** (X + Y = 2 et X + Y = 3 sont incompatibles puisqu'elles fournissent des informations contradictoires).

37. Inéquations

↳ Une inéquation est une **inégalité** liant **une ou plusieurs inconnues.**

I. Inéquations du 1^er^ degré

Si $a > b$ et c réel, alors :	$a + c > b + c$.
Si $a > b$ et c réel, alors :	$a - c > b - c$.
Si $a > b$ et $c > d$, alors :	$a + c > b + d$.
Si $a > b$ et $c > 0$, alors :	$a \times c > b \times c$ et $a/c > b/c$.
Si $a > b$ et **$c < 0$**, alors :	**$a \times c < b \times c$** et **$a/c < b/c$**.
Si $a > b > 0$ et $c > d > 0$, alors :	$a \times c > b \times d$.
Si $a > b$, alors :	$-a < -b$.
Si $a > b > 0$, alors :	$0 < 1/a < 1/b$.
Si $0 > a > b$, alors :	$1/a < 1/b < 0$.
Si $a > 0$ et $b < 0$, alors :	$1/a > 0 > 1/b$.
Si $a > b$ et $c > d$, alors :	$a + c > b + d$.
Si $a < b$ et $c < d$, alors :	$a + c < b + d$.

Exemple : $5X + 2 > 3X - 4 \Leftrightarrow 5X - 3X > -4 - 2 \Leftrightarrow 2X > -6 \Leftrightarrow X > -3$.

Attention

Si on multiplie par un nombre **strictement négatif**, l'inégalité **change de sens !**

Exemple : $5X + 2 > 8X - 4 \Leftrightarrow 5X - 8X > -4 - 2 \Leftrightarrow -3X > -6 \Leftrightarrow X < 2$.

Exemple : $1/X > 2 \Leftrightarrow X < 1/2$.

II. Inéquations X² > A

↳ Si $A < 0$, $X^2 > A \Leftrightarrow$ X représente n'importe quel réel.

↳ Si $A = 0$, $X^2 > A \Leftrightarrow$ X représente n'importe quel réel différent de 0.

↳ Si $A > 0$, $X^2 > A \Leftrightarrow X > \sqrt{A}$ ou $X < -\sqrt{A}$.

Exemple : $X^2 > 16 \Leftrightarrow X > 4$ ou $X < -4$.

Fiches-Méthodes

III. Relation d'ordre

↳ Dans les **questions de relation d'ordre**, vous pouvez utiliser les **initiales des prénoms** comme inconnues.

Exemple : Audrey n'est pas la plus rapide puisqu'elle est plus lente que Lise, mais elle est plus rapide que Rose. Rose est plus lente que Manon qui est plus rapide que Lise. Paula est plus rapide que Manon.
Qui est la plus rapide ?

A. Manon **B.** Lise **C.** Audrey **D.** Paula

En prenant les initiales des prénoms et en classant selon la rapidité, vous obtenez :

$A < L$; $R < A$; $R < M$; $L < M$ et $M < P$.

Finalement : $R < A < L < M < P$, donc : Rose < Audrey < Lise < Manon < Paula.

Paula est la plus rapide. **Réponse : D.**

Entraînez-vous ! QCM

1. Si $X < Y < 10$ et $Z > 5$, alors que peut-on conclure ?

A. $Z < 10$ **B.** $Z < X < Y$ **C.** $Z < Y < 10$ **D.** on ne peut pas savoir

2. Que vaut X dans l'inéquation : $X^2 > 16$?

A. $X > 4$ **B.** $X < -4$ **C.** $X > 4$ et -4 **D.** $X > 4$ et < -4

3. A et B sont deux entiers relatifs positifs tels que : $45 < A \times B < 60$.
Si A est égal au triple de B, que vaut $A - B$?

A. 6 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 12

4. À eux deux, Théo et Maverick ont plus d'argent que Lucas et Adrien réunis.
De plus, Lucas et Dimitri ensemble sont plus riches que Maverick et Fabrice réunis.
Quelle est, parmi les quatre propositions, la seule dont on peut être certain qu'elle soit vraie ?

A. À eux deux, Théo et Adrien sont plus riches que Lucas et Maverick réunis.
B. À eux deux, Adrien et Dimitri sont plus pauvres que Théo et Lucas réunis.
C. À eux deux, Théo et Dimitri sont plus riches que Fabrice et Adrien réunis.
D. À eux deux, Maverick et Lucas sont plus pauvres que Théo et Adrien réunis.

Fiches-Méthodes

38. Instructions et si… que vaut…

↳ Dans certaines de ces questions, on vous donne des conditions sur un ou plusieurs nombres vous permettant de résoudre le problème posé.

Exemple : X et Y sont deux nombres réels non nuls. Si X + Y = 0, combien vaut X/Y ?

A. –1 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Si X + Y = 0, alors : X = –Y et donc : X/Y = –Y/Y = –1. **Réponse : A.**

Exemple : si U/V = 24 et V = 1/3, que vaut U/4 ?

A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

Si U/V = 24, alors : U = 24V et si V = 1/3, alors : U = 24/3 = 8. Donc : U/4 = 8/4 = 2.
Réponse : B.

Exemple : si a = 2b, $2b^2 = 3c$ et 6c = 4d, alors que vaut a^2/d ?

A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

Dans a^2/d vous remplacez a par 2b, puis $2b^2$ par 3c et enfin c par 4d :

$\frac{a^2}{d} = \frac{(2b)^2}{d} = \frac{4b^2}{d} = \frac{2 \times 2b^2}{d} = \frac{2 \times 3c}{d} = \frac{6c}{d} = \frac{4d}{d} = 4$. **Réponse : C.**

↳ Dans d'autres questions, on vous donne une **formule** à appliquer directement.

Exemple : la distance de freinage d'une voiture pour qu'elle s'arrête totalement est donnée par la formule suivante : $d = \frac{4V^2}{1\,000K}$, avec d la distance en mètres, V la vitesse en km/h et K le coefficient d'adhérence de la route. Quelle est la distance de freinage pour une voiture qui roule à 90 km/h sur une route dont le coefficient d'adhérence vaut 0,36 ?

A. 90 m **B.** 100 m **C.** 120 m **D.** 150 m

Après avoir vérifié que la vitesse est exprimée en km/h, vous remplacez V par 90 et K par 0,36 : $d = \frac{4 \times 90^2}{1\,000 \times 0{,}36} = \frac{4 \times 90^2}{360} = \frac{4 \times 90^2}{4 \times 90} = 90$ m. **Réponse : A.**

↳ Dans d'autres questions, on vous donne un **algorithme** ou **bloc d'instructions** à exécuter.

Exemple : voici un bloc d'instructions :

```
s prend la valeur 5
pour i variant de 1 à 3 :
    s prend la valeur s – i + 1
fin pour.
```

Quelle est la valeur de la variable s à la sortie de ce bloc d'instructions ?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Fiches-Méthodes

L'instruction initiale vous donne : s = 5. Vous exécutez « pour i variant de 1 à 3 » :

- pour i = 1, s devient : s – i + 1 = 5 – 1 + 1 = 5 ;
- pour i = 2, s devient : s – i + 1 = 5 – 2 + 1 = 4 ;
- pour i = 3, s devient : s – i + 1 = 4 – 3 + 1 = 2.

À la sortie de ce bloc d'instructions, la variable s vaut : 2. **Réponse : C.**

Entraînez-vous ! QCM

1. Quelle est la valeur de $\frac{A}{B}$ si $B = \frac{B - A}{5}$?

A. –4 **B.** –2 **C.** 0 **D.** 2

2. Si $x \neq 0$ et $\frac{(x + y)^2 - (x - y)^2}{x} = 1$, alors que vaut y ?

A. –1 **B.** 1/2 **C.** 1/4 **D.** 4

3. Si le quart des deux tiers d'une valeur est égal à la moitié du tiers de 24, quelle est cette valeur ?

A. 16 **B.** 20 **C.** 24 **D.** 36

4. Si a = 4, b = 1 et c = 3, que vaut $(2a^2 - 5b^3 + 3ab + 4a^2bc + 3c^2)$?

A. 225 **B.** 258 **C.** 261 **D.** 293

5. A et B sont deux entiers relatifs positifs tels que : 4A – 3B = 45.
Si A est égal au triple de B, que vaut A – B ?

A. 20 **B.** 16 **C.** 12 **D.** 10

6. Voici un bloc d'instructions :

s prend la valeur 2
pour i variant de 1 à 3 :
  s prend la valeur $s^2 - 2s + i$
fin pour.

Quelle est la valeur de la variable s à la sortie de ce bloc d'instructions ?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3