

Table des matières

Introduction	1
Notations usuelles	5
PREMIÈRE PARTIE Principes de base	7
I Introduction aux principes de l'assurance	9
1 Préambule	9
2 De l'utilité des assurances, premières caractéristiques	12
2.1 Histoire succincte	12
2.2 Déroulement dans le temps de l'assurance	16
2.3 Assurance et mathématique	18
2.4 Exemples d'assurance et de tarif, avec discussion	24
3 Contraintes encadrant l'assurance	27
3.1 Mutualisation et segmentation des risques	27
3.2 Temps discret et temps continu	32
3.3 Assurance vie et assurance non-vie	35
3.4 Différentes primes	36
4 Mathématique et assurance	37
4.1 Modèle individuel et modèle collectif de Lundberg	37
4.2 Aléa, variabilité du risque et risque de variance	38
4.3 Probabilité de ruine, proportion de coût en excès à la ruine, ensemble de risques assurable	41
4.4 Inhomogénéité des risques, régression et crédibilité	45
4.5 Modèle individuel, probabilité de ruine et grandes déviations, distribution de risque non assurable	47
5 Conclusion	49
6 Solution des exercices	49
7 Bibliographie	50
II Introduction aux mathématiques de l'assurance	51
1 Préambule	51
2 Modèles mathématiques de base en temps discret	51
2.1 Modèle individuel	52
2.2 Modèle collectif et loi composée	53
2.3 Critères de ruine, de la nécessité d'un chargement de la prime pure	56
2.4 Approximations normale et autres de la probabilité de ruine	60
2.5 Modèle normal et mutualisation des risques	65
3 Exemple pour les différentes mutualisations des risques	70
3.1 Modèle du versement d'un capital au décès	71

3.2	Prime pure, variabilité du risque et mutualisation des risques . . .	74
3.3	Approximation de la fonction de répartition du montant cumulé .	78
3.4	Plein	83
3.5	Discussion	85
4	Modèle collectif en temps continu	87
5	Solution des exercices	89
6	Bibliographie	100
III	Moments et fonction génératrice des moments	103
1	Préambule	103
2	Moments et fonction génératrice des moments	104
2.1	Moments d'une loi de probabilité et d'une variable aléatoire . . .	104
2.2	Fonction génératrice des moments	109
2.3	Fonction génératrice d'une distribution sur \mathbb{N}	113
3	Fonction génératrice des moments des modèles individuel et collectif . . .	115
4	Fonction génératrice des moments d'un vecteur aléatoire	116
4.1	Définition	116
4.2	Propriétés	117
5	Preuve de la relation entre les modèles individuel et collectif	119
6	Solution des exercices	121
7	Bibliographie	124
DEUXIÈME PARTIE	Grandes déviations et assurabilité	125
IV	Modèle individuel, TLC et grandes déviations I	127
1	Préambule	127
2	Autour du théorème limite central	131
2.1	Théorème limite central	131
2.2	Inégalité de Berry-Esseen et développement d'Edgeworth	133
2.3	Théorème limite central multivarié	135
3	Grandes déviations sous la condition de Cramér	136
3.1	Preuve de l'inégalité de markov exponentielle	136
3.2	Transformée de Fenchel-Legendre de $\log L_p$	137
3.3	Preuve du résultat de grande déviation à l'ordre 1	146
3.4	Versement d'un capital au décès et grandes déviations	151
4	Espérance de coût en excès sachant un événement de grande déviation . .	152
4.1	Premier pas	153
4.2	Approfondissement du développement de grande déviation	154
4.3	Preuve du théorème IV.2	159
5	Solution des exercices	160
6	Bibliographie	177
V	Modèle individuel et grandes déviations II	179
1	Préambule	179
2	Loi lognormale et loi de Pareto	182
2.1	Loi lognormale	183
2.2	Loi de Pareto	187
2.3	Preuve du corollaire V.1	192
3	Grandes déviations quand la condition de Cramér n'est pas vérifiée	193

3.1	Préliminaires à la preuve du théorème V.3	196
3.2	Achèvement de la preuve du théorème V.3	202
3.3	Preuve de la proposition V.3	208
4	Espérance de coût en excès sachant un événement de grande déviation . .	213
4.1	Préliminaires	215
4.2	Preuve du théorème V.4	218
4.3	Preuve de la proposition V.5	220
5	Solution des exercices	222
6	Bibliographie	233
Annexes		234
A	Rappels d'analyse	234
1	Espace métrique complet	234
2	Série entière	235
3	Fonction \mathcal{C}^∞ et développable en série entière	236
B	Rappels d'intégration	238
1	Préliminaire sur la théorie de la mesure	238
2	Préliminaire sur l'intégration	238
3	Intégrale sur des espaces produits	240
4	Propriétés de convergence	240
5	Intégrale et mesure	241
C	Rappels de calcul des probabilités	242
1	Convergence en loi et en probabilité	243
2	Loi des grands nombres	244
3	Théorème de sélection de Helly	244
4	Fonction génératrice des moments sur \mathbb{R} et sur \mathbb{R}^d	245
Bibliographie		246
Glossaire mathématique		248
Index		250