

## Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Notations usuelles</b>	<b>5</b>
<b>PREMIÈRE PARTIE      Principes de base</b>	<b>7</b>
<b>I      Introduction aux principes de l'assurance</b>	<b>9</b>
1    Préambule . . . . .	9
2    De l'utilité des assurances, premières caractéristiques . . . . .	12
2.1    Histoire succincte . . . . .	12
2.2    Déroulement dans le temps de l'assurance . . . . .	16
2.3    Assurance et mathématique . . . . .	18
2.4    Exemples d'assurance et de tarif, avec discussion . . . . .	24
3    Contraintes encadrant l'assurance . . . . .	27
3.1    Mutualisation et segmentation des risques . . . . .	27
3.2    Temps discret et temps continu . . . . .	32
3.3    Assurance vie et assurance non-vie . . . . .	35
3.4    Différentes primes . . . . .	36
4    Mathématique et assurance . . . . .	37
4.1    Modèle individuel et modèle collectif de Lundberg . . . . .	37
4.2    Aléa, variabilité du risque et risque de variance . . . . .	38
4.3    Probabilité de ruine, proportion de coût en excès à la ruine, ensemble de risques assurable . . . . .	41
4.4    Inhomogénéité des risques, régression et crédibilité . . . . .	45
4.5    Modèle individuel, probabilité de ruine et grandes déviations, distribution de risque non assurable . . . . .	47
5    Conclusion . . . . .	49
6    Solution des exercices . . . . .	49
7    Bibliographie . . . . .	50
<b>II     Introduction aux mathématiques de l'assurance</b>	<b>51</b>
1    Préambule . . . . .	51
2    Modèles mathématiques de base en temps discret . . . . .	51
2.1    Modèle individuel . . . . .	52
2.2    Modèle collectif et loi composée . . . . .	53
2.3    Critères de ruine, de la nécessité d'un chargement de la prime pure . . . . .	56
2.4    Approximations normale et autres de la probabilité de ruine . . . . .	60
2.5    Modèle normal et mutualisation des risques . . . . .	65
3    Exemple pour les différentes mutualisations des risques . . . . .	70
3.1    Modèle du versement d'un capital au décès . . . . .	71

3.2	Prime pure, variabilité du risque et mutualisation des risques . . .	74
3.3	Approximation de la fonction de répartition du montant cumulé .	78
3.4	Plein . . . . .	83
3.5	Discussion . . . . .	85
4	Modèle collectif en temps continu . . . . .	87
5	Solution des exercices . . . . .	89
6	Bibliographie . . . . .	100
<b>III</b>	<b>Moments et fonction génératrice des moments</b>	<b>103</b>
1	Préambule . . . . .	103
2	Moments et fonction génératrice des moments . . . . .	104
2.1	Moments d'une loi de probabilité et d'une variable aléatoire . . .	104
2.2	Fonction génératrice des moments . . . . .	109
2.3	Fonction génératrice d'une distribution sur $\mathbb{N}$ . . . . .	113
3	Fonction génératrice des moments des modèles individuel et collectif . . .	115
4	Fonction génératrice des moments d'un vecteur aléatoire . . . . .	116
4.1	Définition . . . . .	116
4.2	Propriétés . . . . .	117
5	Preuve de la relation entre les modèles individuel et collectif . . . . .	119
6	Solution des exercices . . . . .	121
7	Bibliographie . . . . .	124
<b>DEUXIÈME PARTIE</b>	<b>Grandes déviations et assurabilité</b>	<b>125</b>
<b>IV</b>	<b>Modèle individuel, TLC et grandes déviations I</b>	<b>127</b>
1	Préambule . . . . .	127
2	Autour du théorème limite central . . . . .	131
2.1	Théorème limite central . . . . .	131
2.2	Inégalité de Berry-Esseen et développement d'Edgeworth . . . . .	133
2.3	Théorème limite central multivarié . . . . .	135
3	Grandes déviations sous la condition de Cramér . . . . .	136
3.1	Preuve de l'inégalité de markov exponentielle . . . . .	136
3.2	Transformée de Fenchel-Legendre de $\log L_p$ . . . . .	137
3.3	Preuve du résultat de grande déviation à l'ordre 1 . . . . .	146
3.4	Versement d'un capital au décès et grandes déviations . . . . .	151
4	Espérance de coût en excès sachant un événement de grande déviation . .	152
4.1	Premier pas . . . . .	153
4.2	Approfondissement du développement de grande déviation . . . . .	154
4.3	Preuve du théorème IV.2 . . . . .	159
5	Solution des exercices . . . . .	160
6	Bibliographie . . . . .	177
<b>V</b>	<b>Modèle individuel et grandes déviations II</b>	<b>179</b>
1	Préambule . . . . .	179
2	Loi lognormale et loi de Pareto . . . . .	182
2.1	Loi lognormale . . . . .	183
2.2	Loi de Pareto . . . . .	187
2.3	Preuve du corollaire V.1 . . . . .	192
3	Grandes déviations quand la condition de Cramér n'est pas vérifiée . . . .	193

3.1	Préliminaires à la preuve du théorème V.3 . . . . .	196
3.2	Achèvement de la preuve du théorème V.3 . . . . .	202
3.3	Preuve de la proposition V.3 . . . . .	208
4	Espérance de coût en excès sachant un événement de grande déviation . . . . .	213
4.1	Préliminaires . . . . .	215
4.2	Preuve du théorème V.4 . . . . .	218
4.3	Preuve de la proposition V.5 . . . . .	220
5	Solution des exercices . . . . .	222
6	Bibliographie . . . . .	233
<b>Annexes</b>		<b>234</b>
<b>A</b>	<b>Rappels d'analyse</b>	<b>234</b>
1	Espace métrique complet . . . . .	234
2	Série entière . . . . .	235
3	Fonction $\mathcal{C}^\infty$ et développable en série entière . . . . .	236
<b>B</b>	<b>Rappels d'intégration</b>	<b>238</b>
1	Préliminaire sur la théorie de la mesure . . . . .	238
2	Préliminaire sur l'intégration . . . . .	238
3	Intégrale sur des espaces produits . . . . .	240
4	Propriétés de convergence . . . . .	240
5	Intégrale et mesure . . . . .	241
<b>C</b>	<b>Rappels de calcul des probabilités</b>	<b>242</b>
1	Convergence en loi et en probabilité . . . . .	243
2	Loi des grands nombres . . . . .	244
3	Théorème de sélection de Helly . . . . .	244
4	Fonction génératrice des moments sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}^d$ . . . . .	245
<b>Bibliographie</b>		<b>246</b>
<b>Glossaire mathématique</b>		<b>248</b>
<b>Index</b>		<b>250</b>