A. Bégyn | G. Connan | R. Leroy | F. Ezanno

MATHS BCPST 1

MÉTHODES & EXERCICES

5e édition

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-082115-0

Table des matières

Avant-propos

Ce livre de méthodes de résolution d'exercices et de corrigés couvre le nouveau programme 2021 des classes préparatoires BCPST première année. C'est un programme très riche, qui aborde beaucoup de nouvelles notions, aussi bien en analyse qu'en algèbre ou en probabilités.

Ce livre a pour objectif de permettre au lecteur d'aller à l'essentiel, en un minimum de temps.

Chaque chapitre commence par lister un ensemble de méthodes pour aider les étudiants à démarrer dans les exercices et à savoir ce qu'on leur demande d'apprendre. Suivent les exercices qui sont issus d'archives personnelles d'enseignants en BCPST et d'annales de concours. Ensuite il est proposé des indications spécifiques à chaque exercice pour les aider à choisir la bonne piste de recherche. Puis tous les exercices sont corrigés ; les corrections sont rédigées avec un maximum de détail, dans le souci qu'elles soient accessibles à tous les étudiants.

L'aspect très progressif de cet ouvrage, et sa présentation basée sur l'essentiel, en font un outil parfaitement adapté au haut niveau exigé par les concours accessibles par la voie BCPST. Ses nombreux exercices corrigés et de tous niveaux permettront aussi aux étudiants de s'approprier ou de réviser rapidement leur cours de mathématiques pendant l'année.

Chapitre 1

Logique, théorie des ensembles et manipulations des signes $\sum$ et $\prod$

Thèmes abordés dans les exercices

— Raisonnements mathématiques
— Opérations sur les ensembles
— Propriétés générales des applications
— Manipulation des symboles Σ et Π

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

— Démonstration d'une implication, d'une équivalence
— Raisonnement par contraposée
— Raisonnement par l'absurde
— Raisonnement par récurrence
— Démonstration d'une inclusion, d'une égalité entre ensembles
— Règles de calcul pour les opérations sur les ensembles
— Image directe d'une partie par une application
— Injectivité, surjectivité ou bijectivité d'une application
— Théorème d'inversibilité pour la loi de composition
— Théorème de la bijection pour les fonctions numériques
— Règles de calcul avec les symboles Σ et Π
— Règles de calcul sur les coefficients binomiaux
— Sommes usuelles : sommes arithmétiques, sommes géométriques, formule du binôme

Les méthodes à retenir

Pour démontrer une implication ou une équivalence

- Pour démontrer que $A \Longrightarrow B$ on suppose que la propriété A est verifiée et on doit démontrer que la propriété B l'est aussi.

  $\hookrightarrow$ **Exercice 1.13**

- Pour démontrer l'implication $A \Longrightarrow B$, on peut raisonner par contraposée, c'est-à-dire démontrer l'implication $non(B) \Longrightarrow non(A)$: on suppose que B n'est pas verifiée et on démontre qu'alors A ne l'est pas non plus.

  $\hookrightarrow$ **Exercice 1.5**

- Pour démontrer une équivalence $A \Longleftrightarrow B$ on raisonne par double-implication : on démontre l'implication $A \Longrightarrow B$ ainsi que sa réciproque $B \Longrightarrow A$.

  $\hookrightarrow$ **Exercice 1.15**

Pour raisonner par l'absurde

- Pour démontrer que A est vérifiée : on suppose que A n'est pas vérifiée et on en déduit une contradiction évidente du type $1 = 0$, $3 \leq 2$, etc.

  $\hookrightarrow$ **Exercices 1.10 et 1.15**

Pour démontrer une proposition logique dépendant de quantificateurs

- Pour démontrer que $\forall x \in E,\ P(x)$: on se fixe un $x \in E$ quelconque et on doit alors démontrer que $P(x)$ est vérifiée pour ce x fixé.

  $\hookrightarrow$ **Exercices 1.1 et 1.5**

- Pour démontrer que $\exists x \in E/\ P(x)$: on doit donner (au moins) un exemple de $x \in E$ qui vérifie la propriété $P(x)$. Lorsque $P(x)$ est une équation alors x est l'inconnue et on doit trouver (au moins) une solution.

  $\hookrightarrow$ **Exercices 1.1 et 1.14**

- Pour démontrer que $\exists! x \in E/\ P(x)$: on démontre comme précédemment que $\exists x \in E/\ P(x)$ et, de plus, qu'il ne peut y avoir deux valeurs distinctes de x pour lesquelles $P(x)$ est vraie (ceci à l'aide d'un raisonnement par l'absurde).

  $\hookrightarrow$ **Exercice 1.14**

Pour raisonner par récurrence

— Si la propriété à démontrer, pour tout entier naturel n, vérifie une relation donnée entre le rang n et le rang $n+1$ on utilise alors le principe de récurrence.

$\hookrightarrow$ **Exercices 1.6, 1.7, 1.19 et 1.21**

— Si la propriété à démontrer, pour tout entier naturel n, vérifie une relation donnée entre les rangs n, $n+1$ et $n+2$ on utilise alors le principe de récurrence à deux pas.

$\hookrightarrow$ **Exercice 1.7**

— Si la propriété à démontrer, pour tout entier naturel n, vérifie une relation donnée entre tous les rangs k tel que $k \leq n$, on utilise alors le principe de récurrence forte.

$\hookrightarrow$ **Exercice 1.7**

Pour démontrer une inclusion ou une égalité entre deux ensembles

— Pour démontrer l'inclusion $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$ on démontre l'implication $x \in \mathrm{E} \Longrightarrow x \in \mathrm{F}$.

$\hookrightarrow$ **Exercices 1.10 et 1.15**

— Pour démontrer l'égalité $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ on raisonne par double-inclusion : on démontre l'inclusion $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$ et l'inclusion réciproque $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.

$\hookrightarrow$ **Exercices 1.10, 1.15 et 1.16**

— Dans les deux cas, on peut aussi utiliser les opérations sur les ensembles.

$\hookrightarrow$ **Exercices 1.15 et 1.16**

Pour déterminer le domaine de définition d'une fonction

— On repère les opérations potentiellement interdites (racines, logarithmes, divisions par zéro…), on écrit les conditions sur la variable x pour que toutes ces opérations soient définies, puis on fait la résolution.

$\hookrightarrow$ **Exercice 1.4**

Pour démontrer qu'une application est injective ou surjective

— Pour démontrer que $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ est injective sur E : on se donne $(x_1, x_2) \in \mathrm{E}^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$, et on doit alors montrer que $x_1 = x_2$.

$\hookrightarrow$ **Exercices 1.12, 1.13 et 1.14**

— Pour démontrer que $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ est surjective de E sur F : on se donne $y \in \mathrm{F}$ fixé quelconque , et on doit alors donner (au moins) un $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$, par exemple en démontrant que l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x a (au moins) une solution dans E.

$\hookrightarrow$ **Exercices 1.12, 1.13 et 1.14**

— Pour démontrer que $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ est surjective on peut aussi appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

$\hookrightarrow$ **Exercice 1.11**

Pour démontrer qu'une application est bijective

— On revient à la définition en démontrant qu'elle est à la fois injective sur E, et surjective de E sur F.

$\hookrightarrow$ **Exercices 1.11 et 1.13**

— On démontre les deux en même temps : on se donne $y \in \mathrm{F}$ fixé quelconque , et on doit alors montrer que $\exists! x \in \mathrm{E}/\ y = f(x)$, par exemple en démontrant que l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x a une unique solution dans E.

$\hookrightarrow$ **Exercices 1.11 et 1.14**

— On utilise le théorème d'inversibilité pour la loi de composition : on détermine une application $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ telle que $f \circ g = id_{\mathrm{F}}$ et $g \circ f = id_{\mathrm{E}}$.

$\hookrightarrow$ **Exercice 1.23**

— Dans le cas d'une fonction numérique, on peut utiliser le théorème de la bijection.

$\hookrightarrow$ **Exercices 1.11 et 1.14**

Pour déterminer l'application réciproque d'une bijection

— Pour $y \in \mathrm{F}$ fixé quelconque, $f^{-1}(y)$ est l'unique solution de l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathrm{E}$.

$\hookrightarrow$ **Exercices 1.9 et 1.14**

— Si on a trouvé $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ telle que $f \circ g = id_{\mathrm{F}}$ et $g \circ f = id_{\mathrm{E}}$, alors $f^{-1} = g$.

$\hookrightarrow$ **Exercice 1.23**

Pour déterminer l'image directe d'un ensemble par une fonction

— On étudie les variations de la fonction sur l'ensemble donné. On applique le théorème des valeurs intermédiaires sur chaque intervalle où la fonction est monotone.

$\hookrightarrow$ **Exercice 1.8**

Pour calculer une somme formelle

— On met en facteur les termes ne dépendant pas de l'indice de sommation, on utilise ensuite les règles de calcul sur les symboles Σ, et on conclut en faisant apparaître les sommes usuelles à l'aide de changements d'indice.

$\hookrightarrow$ **Exercices 1.17, 1.20, 1.21 et 1.22**

— Si le résultat final est donné dans l'énoncé, on peut aussi démontrer la formule par récurrence.

$\hookrightarrow$ **Exercices 1.19 et 1.20**

Énoncés des exercices

1.1

Vrai ou faux ?

En justifiant soigneusement, dire pour chacune des assertions suivantes si elle est vraie ou fausse.

a) $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \big(x < y \text{ et } y < z\big) \Leftrightarrow \big(x < z\big)$

b) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \big(x \leq y \text{ et } x \neq y\big) \Rightarrow \big(x < y\big)$

c) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} :\ a = b^2$

d) $\forall a \in \mathbb{C}, \exists b \in \mathbb{C} :\ a = b^2$

e) $\forall a \in \mathbb{C}, \exists! b \in \mathbb{C} :\ a = b^2$

f) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists t \in \mathbb{R} :\ x \leq t \leq y$

1.2

Reconnaître des ensembles

Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants, plusieurs sont égaux bien qu'écrits différemment. Déterminer lesquels.

$$\mathrm{E}_1 = \{5, 8, 11, 14, 17, \dots\}, \quad \mathrm{E}_2 = \left\{x^2, x \in [\![1, 5]\!]\right\}, \quad \mathrm{E}_3 = \left[-\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right] \cap \mathbb{Z},$$

$$\mathrm{E}_4 = \left\{y^2,\ y \in [-5, -1]\right\}, \quad \mathrm{E}_5 = [\![-1, 1]\!], \quad \mathrm{E}_6 = [1, +\infty[\cap]0, +\infty[\cap]-1, 25],$$

$$\mathrm{E}_7 = [1, 25], \quad \mathrm{E}_8 = \{3x + 2, x \in \mathbb{N}^*\}, \quad \mathrm{E}_9 = \left\{m \in [1, 25] : \exists k \in \mathbb{N},\ m = k^2\right\},$$

$$\mathrm{E}_{10} = \{-1, 0, 1\}, \quad \mathrm{E}_{11} = \left\{n \in \mathbb{N}^* : \exists k \in \mathbb{N}^*,\ n = 3k + 2\right\},$$

$$\mathrm{E}_{12} = \{3n + 2, n \in \mathbb{N}^*\}, \quad \mathrm{E}_{13} = \{m \in \mathbb{Z} :\ m \leq 1 \text{ et } m \geq -1\},$$

$$\mathrm{E}_{14} = \left\{t^2, t \in [1, 5]\right\}, \quad \mathrm{E}_{15} = \left\{\sin(k\tfrac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \mathrm{E}_{16} = \{1, 4, 9, 16, 25\},$$

1.3

Sous-parties de $\mathbb{R}$

Écrire pour chacune des assertions suivantes, le plus simplement possible, l'ensemble E des réels x la vérifiant.

a) $x > 4$ et $x < 7$ et $x \neq 6$

b) $(x > 0$ et $x < 3)$ ou $x = 0$

c) $(x < 3$ et $x \in \mathbb{N})$ ou $x = 2$

d) $(x \in \mathbb{R}_+$ ou $x = -3)$ et $x < 0$

e) $\exists u \in [3, +\infty[:\ x = u^2$

1.4

Ensemble de définition

Déterminer l'ensemble de définition :

a) de la fonction u définie par

$$u(x) = \frac{\ln(x-1)+\sqrt{4-x}}{x^4-16} + \frac{\cos x}{\sin x - 1}.$$

b) de la fonction v définie par

$$v(x) = \sqrt{\sin(x)} - \ln(1-x^2).$$

1.5

Exemple de démonstration d'une implication par contraposée

Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^2 \text{ pair} \implies n \text{ pair}.$

1.6

Récurrences simples

a) Montrer l'inégalité suivante :

$$\forall n \geq 2,\ \forall x > 0,\ (1+x)^n > 1+nx$$

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$1+2+4+8+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1.$$

(la formule pour une somme géométrique vue au lycée n'est pas supposée connue).

1.7

Exemples de démonstration par récurrence

a) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.
Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$.

c) On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 3n$.

1.8

Image directe

Dans les exemples suivants f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Déterminer $f(\mathrm{I})$.

a) $\mathrm{I} = [\pi/4, 5\pi/6], \quad f(x) = \cos x$

b) $\mathrm{I} = [0, \sqrt{13}], \quad f(x) = \lfloor x \rfloor$

c) $\mathrm{I} = [-1, 2], \quad f(x) = x^2$

1.9 Calculer une bijection réciproque

a) Soit l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]0,+\infty[\\ x & \mapsto & \ln(1+e^x) \end{array}$$

Montrer que f est bijective et expliciter la fonction f^{-1}.

b) Même travail avec l'application :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x+x^2 \end{array}$$

1.10 Autour de l'image directe d'une application

Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application. Soient A et B deux parties de E.

a) Montrer que : $f(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = f(\mathrm{A})\cup f(\mathrm{B})$.

b) Montrer que : $f(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \subset f(\mathrm{A})\cap f(\mathrm{B})$.

c) Montrer que si f est injective : $f(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = f(\mathrm{A})\cap f(\mathrm{B})$.

d) Montrer que si f est injective : $f\left(\overline{\mathrm{A}}\right) \subset \overline{f(\mathrm{A})}$.

e) Montrer que si f est surjective : $\overline{f(\mathrm{A})} \subset f\left(\overline{\mathrm{A}}\right)$.

1.11 Injectivité, surjectivité

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(2x) \end{array} \qquad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$$

$$w : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3+2x \end{array} \qquad y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3-x \end{array}$$

1.12 Injectivité, surjectivité (II)

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 2x \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$$

Que penser d'une application qui serait définie par

$$\mathrm{F} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 2x \end{array} \quad ?$$

1.13

Injectivité, surjectivité, bijectivité et composition

Soient $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ deux applications. Démontrer les implications suivantes :

a) $g \circ f$ injective sur E $\Longrightarrow$ f injective sur E

b) $g \circ f$ surjective de E sur E $\Longrightarrow$ g surjective de F sur E

c) $g \circ f$ surjective de E sur E et g injective sur F $\Longrightarrow$ f surjective de E sur F

d) $g \circ f$ bijective de E sur E et $f \circ g$ bijective de F sur F
$\Longrightarrow$ f bijective de E sur F et g bijective de F sur E

1.14

Exemple de fonctions numériques bijectives

a) On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 5$. f est-elle injective, surjective, bijective ? Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$ induit une bijection dont on déterminera la réciproque.

b) Montrer que l'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sin x + 2x$, est bijective. Montrer que l'équation $g(x) = 2$ admet une unique solution réelle, et que cette solution est strictement positive.

1.15

Exemples de démonstration d'une équivalence ou d'une égalité entre ensembles

Soient E un ensemble et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \in \mathscr{P}(\mathrm{E})^3$.

a) Montrer que : $\overline{\mathrm{A}} \subset \mathrm{B} \Longleftrightarrow \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{E}$.

b) Établir que : $\big(\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}\big) \backslash \big(\mathrm{A} \backslash \mathrm{C}\big) = \big(\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}\big) \cap \mathrm{C} = (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) \backslash \mathrm{B}$.

c) Démontrer que : $\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{A} \cup \mathrm{B} & = & \mathrm{A} \cup \mathrm{C} \\ \mathrm{A} \cap \mathrm{B} & = & \mathrm{A} \cap \mathrm{C} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \mathrm{B} = \mathrm{C}$.

d) Démontrer que : $\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{A} \cup \mathrm{B} & = & \mathrm{A} \cap \mathrm{C} \\ \mathrm{A} \cap \mathrm{B} & = & \mathrm{A} \cup \mathrm{C} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{C}$.

1.16

Différence symétrique de deux ensembles

Soient E un ensemble et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \in \mathscr{P}(\mathrm{E})^3$. On définit la différence symétrique de A et B, notée $\mathrm{A} \Delta \mathrm{B}$, par : $\mathrm{A} \Delta \mathrm{B} = \big(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}\big) \backslash \big(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}\big)$.

a) Montrer que : $\mathrm{A} \Delta \mathrm{B} = \big(\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}\big) \cup \big(\mathrm{B} \backslash \mathrm{A}\big)$.

b) On suppose que $\mathrm{A} \Delta \mathrm{B} = \mathrm{A} \Delta \mathrm{C}$. Établir que $\mathrm{B} = \mathrm{C}$.

1.17

Calculs classiques de sommes

Pour tout entier naturel n non nul, calculer les sommes suivantes :

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} 1$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} 1$, $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} i\right) + \left(\sum\limits_{j=1}^{n} j\right)$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} (i+j)$, $\sum\limits_{1 \leq j \leq i \leq n} 1$.

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k}\binom{n}{k}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

c) $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

1.18

Calculs classiques de produits

Pour tout entier naturel n non nul, calculer les produits suivants :

a) Le produit des entiers entre 1 et n.

b) Le produit des entiers pairs entre 1 et $2n$.

c) Le produit des entiers impairs entre 1 et $2n+1$.

d) $\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$.

1.19

Somme des termes d'une ligne dans le triangle de Pascal

Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir que :

$$\forall p \in [\![0,n]\!], \quad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

1.20

Calcul de somme et coefficients binomiaux

Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p$. Déterminer $\sum_{i=0}^{p} \binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}$.

1.21

Calculs de sommes doubles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On admettra que : $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Calculer :

a) $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{j}{i}$.

b) $\sum_{1 \leq j < i \leq n} ij$.

1.22

Sommes de coefficients binomiaux « de deux en deux »

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les sommes

$$\mathrm{A}_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \quad \mathrm{B}_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}, \quad \mathrm{S}_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}, \quad \mathrm{T}_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}.$$

a) Calculer A_n et B_n en fonction de n.

b) En déduire S_n et T_n en fonction de n.

c) Déterminer $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$.

1.23

Exemple d'application fonctionnelle : l'application shift

On pose $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (ensemble des fonctions numériques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on note φ_θ l'application de E dans E qui associe à $f \in \mathrm{E}$ la fonction $g = \varphi_\theta(f)$ définie par $g \in \mathrm{E}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x+\theta)$$

a) Établir que pour tout $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\varphi_{\theta_1} \circ \varphi_{\theta_2} = \varphi_{\theta_1+\theta_2}$.

b) En déduire que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, l'application φ_θ est bijective de E sur E et donner sa réciproque.

Du mal à démarrer ?

1.1 «$\forall a, \ldots$» : ce qui suit est-il vrai pour toute valeur de a ? «$\exists a$» : puis-je trouver un a tel que … ?

1.2 Mettre tous ces ensembles sous leur forme la plus simple

1.3 Traduire les opérations logiques en opérations sur des intervalles

1.4 Repérer les opérations potentiellement interdites. Traduire par des conditions sur x.

1.5 n est impair équivaut à : $\exists p \in \mathbb{N} / \ n = 2p+1$.

1.6 Récurrences classiques

1.7 a) Par récurrence sur n.
b) Par récurrence à deux pas sur n.
c) Par récurrence forte sur n.

1.8 Examiner les variations de f sur I

1.9 Trouver $f^{-1}(y)$, c'est résoudre $f(x) = y$ d'inconnue x.

1.10 a) Par double-inclusion en raisonnant sur les éléments.
b) Raisonner sur les éléments.
c) Par une application injective un antécédent est unique...
d) et e) Raisonnement par l'absurde.

1.11 Prendre un y quelconque dans l'ensemble d'arrivée. A t-il forcément un antécédent ? Peut-il en avoir plusieurs ?

1.12 Même indication !

1.13 a) et b) Utiliser les définitions.
c) Utiliser b).
d) Utiliser les définitions.

1.14 Étudier les variations des fonctions.

1.15 a), b) et c) Raisonner sur les éléments. d) Pour $\Longrightarrow$: commencer par montrer que $C \subset A$.

1.16 a) Faire le calcul en utilisant les règles de calcul avec l'union et l'intersection.
b) Raisonner sur les éléments.

1.17 a) Faire apparaître la somme arithmétique $\sum_{k=1}^{n} k$.
b) Faire apparaître la formule du binôme.
c) Reconnaître des sommes télescopiques.

1.18 a), b) et c) Faire apparaître des factoriels.
d) Écrire le produit sous forme développée.

1.19 Raisonner par récurrence sur n.

1.20 Simplifier le terme général de la somme.

1.21 a) Permuter les Σ et faire apparaître la somme arithmétique $\sum_{k=1}^{n} k$.
b) Utiliser une somme double et faire apparaître une somme arithmétique.

1.22 a) Utiliser la formule du binôme.
b) Exprimer S_n et T_n en fonction de A_n et B_n.
c) Utiliser b).

1.23 a) Utiliser la définition de φ_θ.
b) Utiliser le théorème d'inversibilité pour la loi de composition.

Corrigés des exercices

1.1

a) FAUX, l'implication $\Rightarrow$ est certes toujours vraie mais la réciproque $\Leftarrow$ est fausse par exemple pour $x = 1$, $z = 3$ et $y = 0$.

b) VRAI, par définition «$x < y$» signifie «$x \leq y$ et $x \neq y$» .

c) FAUX, par exemple pour $a = -1$ il n'existe aucun réel b tel que $b^2 = -1$.

d) VRAI, si $a = 0$ on peut prendre $b = 0$. Si $a \neq 0$, avec la forme exponentielle $a = \rho e^{i\theta}$ on voit que $b = \sqrt{\rho}e^{i\theta/2}$ convient.

e) FAUX, l'unicité n'est pas vérifiée par exemple pour $a = 1$: on a $1^2 = (-1)^2 = 1$.

f) FAUX, si on prend par exemple $x = 3$ et $y = 2$ il est évident qu'il n'existe aucun réel t vérifiant $3 \leq t \leq 2$.

1.2

On a :

$$E_1 = E_8 = E_{11} = E_{12}$$

$$E_2 = E_9 = E_{16}$$

$$E_3 = E_5 = E_{10} = E_{13} = E_{15}$$

$$E_4 = E_6 = E_7 = E_{14}$$

1.3

a) $E =]4,6[\cup]6,7[$. Ou encore $E =]4,7[\setminus\{6\}$.

b) $E =]0,3[\cup\{0\} = [0,3[$.

c) $E = (\mathbb{N} \cap]-\infty,3[) \cup \{2\} = \{0,1,2\} \cup \{2\} = \{0,1,2\}$.

d) $E = (\{-3\} \cup [0,+\infty[) \cap]-\infty,0[= \{-3\}$.

e) $E = [9;+\infty[$. En effet les carrés des nombres supérieurs ou égaux à 3 sont les nombres supérieurs ou égaux à 9.

1.4

a) L'expression $u(x)$ est définie si et seulement si x vérifie :

$$\begin{cases} x-1>0 \\ 4-x \geq 0 \\ x^4-16 \neq 0 \\ \sin(x) \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x \leq 4 \\ x \notin \{2,-2\} \\ x \neq \pi/2\ [2\pi] \end{cases}$$

Parmi les nombres $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, seul $\frac{\pi}{2}$ appartient à l'intervalle $]1,4]$. L'ensemble de définition de u est donc $]1,4] \setminus \{\pi/2, 2\}$.

b) L'expression $v(x)$ est définie si et seulement si x vérifie :

$$\begin{cases} \sin(x) \geqslant 0 \\ 1-x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \pi\ \ [2\pi] \\ x \in]-1,1[\end{cases}$$

Ainsi le domaine de définition de v est $[0,1[$.

1.5

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. On raisonne par contraposée, c'est-à-dire qu'on va démontrer l'implication : n impair $\Longrightarrow$ n^2 impair.

On suppose donc que n est impair. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$. En élevant au carré, on obtient :

$$n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2+4p+1 = 2(2p^2+2p)+1 = 2q+1$$

où $q = 2p^2+2p \in \mathbb{N}$, ce qui montre que n^2 est impair.

1.6

a) Procédons par récurrence.
Initialisation. Pour $n = 2$, on a $(1+x)^2 = 1+x^2+2x$ donc pour $\forall x > 0$, $(1+x)^2 > 1+2x$.
Hérédité. Supposons la propriété vraie à un rang $n \geq 2$ fixé. Alors pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n > (1+x)(1+nx) \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x.\end{aligned}$$

b) Procédons par récurrence.
Initialisation. Pour $n = 1$, $1+2^1 = 2^2-1 = 3$. La propriété est vérifiée au rang 1.
Hérédité. Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors

$$1+2+4+\dots+2^n+2^{n+1} = 2^{n+1}-1+2^{n+1} = 2\times2^{n+1}-1 = 2^{n+2}-1.$$

1.7

a) On vérifie la formule par récurrence sur l'entier n.

• Pour $n = 0$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = 0 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, la formule est donc vraie.

• Supposons la formule vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &\underset{\text{hyp. rec.}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}\end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$$

La formule est donc vraie au rang $(n+1)$.

D'après le principe de récurrence, la formule est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On peut se demander comment obtenir la formule sans qu'elle soit donnée dans l'énoncé ?
L'astuce consiste à remarquer que l'identité $(k+1)^3 = k^3+3k^2+3k+1$ *donne* $k^2 = \frac{1}{3}\big((k+1)^3-k^3-3k-1\big)$.
En additionnant ces inégalités pour $k \in [\![0,n]\!]$*, on obtient :*

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)^3-k^3\right]-3\sum_{k=0}^{n}k-\sum_{k=0}^{n}1\right)$$

La première somme est une somme « télescopique » :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)^3-k^3\right]\\ =\;& \left[(n+1)^3-\cancel{n^3}\right]+\left[\cancel{n^3}-\cancel{(n-1)^3}\right]+\cdots+\left[\cancel{1^3}-0^3\right]\\ =\;&(n+1)^3-0^3\\ =\;&(n+1)^3\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k^2 &= \frac{1}{3}\left((n+1)^3-3\frac{n(n+1)}{2}-(n+1)\right)\\ &= \frac{n+1}{6}\big(2(n^2+2n+1)-3n-2\big)\\ &= \frac{n+1}{6}n(2n+1)\end{aligned}$$

Cette méthode se généralise au calcul des sommes d'Euler $\sum_{k=0}^{n} k^p$*, en fonction de* $p \in \mathbb{N}$ *(il suffit de développer* $(k+1)^p$*).*

On pourra essayer de l'appliquer pour calculer $\sum_{k=0}^{n} k^3$ *(réponse :* $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$*).*

b) On dispose d'une relation de récurrence du second ordre puisqu'elle relie u_{n+2}, u_{n+1} et u_n. On va donc démontrer la formule en raisonnnant par récurrence à deux pas sur l'entier n.

• Pour $n=0$, $u_n = 3 = 2+1 = 2^{n+1}+(-1)^n$, et pour $n=1$, $u_n = 3 = 4-1 = 2^{n+1}+(-1)^n$, la propriété est donc vraie aux rangs 0 et 1.

• Supposons la formule vraie aux rangs n et $n+1$ pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.

On a :

$$\begin{aligned}u_{n+2} &= u_{n+1}+2u_n\\ &\underset{\text{hyp. rec.}}{=} 2^{n+2}+(-1)^{n+1}+2\big(2^{n+1}+(-1)^n\big)\\ &= 2^{n+1}(2+2)+(-1)^n(-1+2)\\ &= 2^{n+3}+(-1)^n\end{aligned}$$

et $(-1)^2 = 1$ donc $(-1)^{n+2} = (-1)^n$, ce qui donne :

$$u_{n+2} = 2^{n+3}+(-1)^{n+2}$$

La formule est donc vraie au rang $n+2$.

D'après le principe de récurrence, la formule est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) On dispose d'une relation de récurrence forte puisqu'elle relie u_{n+1}, u_n, …, u_1 et u_0. On va donc démontrer la formule en raisonnnant par récurrence forte sur l'entier n.

• Pour $n=0$, $u_n = 0 = 3n$, la propriété est donc vraie au rang 0.

• Supposons la formule vraie à tous les rangs k tels que $k \in [\![0,n]\!]$, pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.

On a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n}u_k\\ &\underset{\text{hyp. rec.}}{=} \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n}3k\\ &= \frac{6}{n}\sum_{k=0}^{n}k\\ &\underset{\text{som. arithm.}}{=} \frac{6}{n}\frac{n(n+1)}{2}\\ &= 3(n+1)\end{aligned}$$

La formule est donc vraie au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence, la formule est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.8

a) f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle I. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on a donc $f(\mathrm{I}) = [\cos(\pi/4), \cos(5\pi/6)] = [-\sqrt{3}/2; \sqrt{2}/2]$.

b) On remarque que :

— pour $x \in [0,1[$, $f(x) = 0$;

— pour $x \in [1,2[$, $f(x) = 1$;

— pour $x \in [2,3[$, $f(x) = 2$;

— pour $x \in [3,\sqrt{13}[$, $f(x) = 3$.

Au final $f(\mathrm{I}) = \{0,1,2,3\}$.

c) Les variations de f, bien connues, font que $f(\mathrm{I}) = [0,4]$.

1.9

a) Soit $y \in]0;+\infty[$. On résout :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \ln(1+e^x) = y \\ &\Leftrightarrow 1+e^x = e^y \\ &\Leftrightarrow e^x = e^y - 1 \\ &\Leftrightarrow x = \ln(e^y - 1) \end{aligned}$$

En effet $e^y - 1 > 0$ puisque $y > 0$.

Par conséquent f est bien bijective et sa réciproque est donnée par

$$f^{-1} : y \mapsto \ln(e^y - 1)$$

b) Soit $y \in \mathbb{R}_+$. L'équation $x^2 + x = y$ a deux solutions réelles $\frac{-1\pm\sqrt{1+4y}}{2}$, parmi lesquelles seule $\frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}$ appartient à $\mathbb{R}_+$. Le nombre y possède donc un unique antécédent par g. Ainsi g est bijective et sa réciproque est donnée par

$$g^{-1} : y \mapsto \frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}$$

1.10

a) On raisonne par double-inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in f\big(\text{A}\cup\text{B}\big)$. Par définition, il existe $x \in \text{A}\cup\text{B}$ tel que : $y = f(x)$.

• Si $x \in \text{A}$, alors $y = f(x) \in f(\text{A})$, et donc $y \in f(\text{A}) \cup f(\text{B})$.

• Si $x \notin \text{A}$, alors $x \in \text{B}$ car $x \in \text{A}\cup\text{B}$. On en déduit que $y = f(x) \in f(\text{B})$, et donc $y \in f(\text{A}) \cup f(\text{B})$.

Dans tous les cas : $y \in f(\text{A}) \cup f(\text{B})$.

$\boxed{\supset}$ Soit $y \in f(\text{A}) \cup f(\text{B})$.

• Si $y \in f(\text{A})$, alors $y \in f\big(\text{A}\cup\text{B}\big)$.

• Si $y \notin f(\text{A})$, alors $y \in f(\text{B})$, car $y \in f(\text{A}) \cup f(\text{B})$. Et donc : $y \in f\big(\text{A}\cup\text{B}\big)$.

Dans tous les cas : $y \in f\big(\text{A}\cup\text{B}\big)$.

b) Soit $y \in f\big(\text{A}\cap\text{B}\big)$. Par definition, il existe $x \in \text{A}\cap\text{B}$ tel que : $y = f(x)$. Comme $x \in \text{A}\cap\text{B}$, on a $x \in \text{A}$ et $x \in \text{B}$. On en déduit que : $y = f(x) \in f(\text{A})$ et $y \in f(\text{B})$. Et donc : $y \in f(\text{A}) \cap f(\text{B})$.

c) On raisonne par double-inclusion.

$\boxed{\subset}$ C'est le résultat du b).

$\boxed{\supset}$ Soit $y \in f(\text{A}) \cap f(\text{B})$. On a donc : $y \in f(\text{A})$ et $y \in f(\text{B})$. Par définition, il existe donc $x \in \text{A}$ et $z \in \text{B}$ tels que : $y = f(x) = f(z)$. Or f est injective, donc on a : $x = z$, et donc : $x \in \text{A}\cap\text{B}$. Ceci prouve que $y = f(x) \in f\big(\text{A}\cap\text{B}\big)$.

d) Soit $y \in f\big(\overline{\text{A}}\big)$. Par définition, il existe $x \in \overline{\text{A}}$ tel que : $y = f(x)$.

On raisonne par l'absurde : supposons que $y \in f(\text{A})$.

Il existe donc $z \in \text{A}$ tel que : $y = f(z)$. On a donc : $f(x) = f(z)$, et donc : $x = z$, puisque f est injective. Ceci donne que $x \in \overline{\text{A}}$ et $x \in \text{A}$, ce qui est clairement absurde.

On en déduit que $y \notin f(\text{A})$, c'est-à-dire que $y \in \overline{f(\text{A})}$.

Ceci prouve que $f\big(\overline{\text{A}}\big) \subset \overline{f(\text{A})}$.

e) Soit $y \in \overline{f(\text{A})}$. Par définition $y \notin f(\text{A})$.

Mais comme f est surjective, il existe $x \in \text{E}$ tel que : $y = f(x)$.

Par l'absurde : si $x \in \text{A}$, alors $y = f(x) \in f(\text{A})$. Ceci est absurde, donc $x \notin \text{A}$.

Alors : $y = f(x) \in f\big(\overline{\text{A}}\big)$.

Ceci prouve que $\overline{f(\text{A})} \subset f\big(\overline{\text{A}}\big)$.

1.11

- u n'est pas injective car $u(0) = u(\pi) = 0$. De plus u n'est pas surjective car $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) \in [-1;1]$ donc par exemple 2 n'a pas d'antécédent par u.
- v est strictement croissante ce qui entraîne que v est injective. En revanche v est non surjective car -1 par exemple n'a pas d'antécédent par v.
- w est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions strictement croissantes. De plus w est continue et par opérations on a $\lim\limits_{x\to-\infty} w(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} w(x) = +\infty$. Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure que tout réel possède un unique antécédent par w : en clair w est bijective.
- y est continue sur $\mathbb{R}$ et possède les mêmes limites que w. Le théorème des valeurs intermédiaires assure que tout réel possède (au moins) un antécédent par y. En revanche y n'est pas injective car, par exemple, $y(0) = y(1) = 0$.

1.12

- f est injective car pour x et y réels, $2x = 2y$ implique évidemment $x = y$ (en divisant par 2 de chaque côté de l'égalité). Par contre f n'est pas surjective car les nombres impairs n'ont pas d'antécédent.
- Pour x et y réels, on a : $g(x) = y \Leftrightarrow x = y/2$. Tout réel y possède donc un unique antécédent par g qui est $y/2$ et donc g est bijective.
- h est injective mais n'est pas surjective, pour les mêmes raisons que f.
- L'application F serait mal définie puisque pour $x \in \mathbb{R}$ on n'a pas forcément $2x \in \mathbb{Z}$.

1.13

a) On suppose $g \circ f$ injective. Montrons que f est injective.

Soit $(x_1, x_2) \in \text{E}^2$ tel que : $f(x_1) = f(x_2)$. En composant par g : $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$, et donc $x_1 = x_2$ puisque $g \circ f$ est injective.

Ceci prouve que f est injective.

b) On suppose $g \circ f$ surjective. Montrons que g est surjective.

Soit $y \in \text{E}$. Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe $z \in \text{E}$ tel que : $y = g \circ f(z)$. On a donc : $y = g(x)$, avec $x = f(z) \in \text{F}$.

Ceci prouve que g est surjective.

c) On suppose $g \circ f$ surjective et g injective.

D'après le b), g est aussi surjective et donc bijective. On peut donc considérer son application réciproque g^{-1} qui est aussi bijective et vérifie : $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = id_{\mathrm{E}}$. On a alors : $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$. Or g^{-1} et $g \circ f$ sont surjectives, donc f est aussi surjective comme composée de surjections.

d) On suppose $g \circ f$ et $f \circ g$ bijectives.

• D'après a) f est injective et d'après b) g est surjective.

• Le problème est symétrique : en échangeant le rôle de f et g, on obtient les mêmes hypothèses. On peut donc dire que g est injective et f surjective.

En regroupant : f et g sont bijectives.

1.14

a) On obtient facilement le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que f n'est pas injective sur $\mathbb{R}$, en effet : $-1 \neq 1$ et $f(-1) = f(1) = -4$.

De plus f n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, en effet : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq -5$, donc -10 n'a pas d'antécédent par f.

A fortiori f n'est donc pas bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Par contre la restriction de f à l'intervalle $\mathrm{I} = [0,+\infty[$, notée $f_{|\mathrm{I}}$ est strictement croissante et continue (car polynômiale) sur I. D'après le théorème de la bijection, elle induit donc une bijection de I sur $\mathrm{J} = f(\mathrm{I}) = [-5,+\infty[$.

Déterminons $f_{|\mathrm{I}}^{-1}$. Soit $y \in \mathrm{J}$ fixé. On résout l'équation d'inconnue $x \in \mathrm{I}$: $y = f(x)$.

$$y = f(x) \Longleftrightarrow y = x^2 - 5 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{y^2+5} \underset{x\geq 0}{\Longleftrightarrow} x = \sqrt{y^2+5}$$

Donc :

$$\begin{array}{rcl} f_{|\mathrm{I}}^{-1} : [-5,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ y & \longmapsto & f_{|\mathrm{I}}^{-1}(y) = \sqrt{y^2+5} \end{array}$$

b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme de fonctions dérivables) et : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \cos x + 2 > 0$. g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on dresse facilement son tableau de variations :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction g est donc continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$. Elle induit donc une bijection de I sur $\mathrm{J} = f(\mathrm{I}) = \mathbb{R}$.

Comme $2 \in \mathrm{J}$, on en déduit qu'il existe un unique $\alpha \in \mathrm{I} = \mathbb{R}$ tel que : $g(\alpha) = 2$. De plus, on a $g(0) = 0 < 2 = g(\alpha)$. On a donc : $\alpha > 0$, puisque g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1.15

a) On raisonne par double-implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que $\overline{\mathrm{A}} \subset \mathrm{B}$. Pour montrer que $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{E}$, on procède par double-inclusion.

• $\boxed{\subset}$ Comme A, B sont deux parties de E, on a : $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \subset \mathrm{E}$.

• $\boxed{\supset}$ Soit $x \in \mathrm{E}$.

• • Si $x \in \mathrm{A}$, alors $x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.

• • Si $x \notin \mathrm{A}$, alors $x \in \overline{\mathrm{A}}$ et *a fortiori* $x \in \mathrm{B}$ puisque $\overline{\mathrm{A}} \subset \mathrm{B}$. Donc : $x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.

Dans tous les cas : $x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$. Ceci prouve que $\mathrm{E} \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.

On en déduit que $\mathrm{E} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $\mathrm{E} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.

Soit $x \in \overline{\mathrm{A}}$. Raisonnons par l'absurde : supposons que $x \notin \mathrm{B}$.

On a alors $x \in \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}$, d'après les lois de Morgan. Or $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{E}$, donc on a $x \notin \mathrm{E}$, ce qui est absurde puisque $x \in \overline{\mathrm{A}} \subset \mathrm{E}$.

On en déduit que : $x \in \mathrm{B}$. Ceci prouve que : $\overline{\mathrm{A}} \subset \mathrm{B}$.

b) On utilise les règles de calculs sur les ensembles.

$$\begin{array}{rcl}
(\mathrm{A}\backslash\mathrm{B})\backslash(\mathrm{A}\backslash\mathrm{C}) & = & (\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})\backslash(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{C}}) \\
& = & (\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})\cap\overline{(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{C}})} \\
& \underset{\text{lois Morgan}}{=} & (\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})\cap(\overline{\mathrm{A}}\cup\mathrm{C}) \\
& \underset{\text{distributivité}}{=} & \big((\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})\cap\overline{\mathrm{A}}\big)\cup\big((\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})\cap\mathrm{C}\big) \\
& \underset{\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{A}}=\emptyset}{=} & \emptyset\cup\big((\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})\cap\mathrm{C}\big) \\
& = & (\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})\cap\mathrm{C} = (\mathrm{A}\backslash\mathrm{B})\cap\mathrm{C} \\
& \underset{\text{commutativité}}{=} & (\mathrm{A}\cap\mathrm{C})\cap\overline{\mathrm{B}} = (\mathrm{A}\cap\mathrm{C})\backslash\mathrm{B}
\end{array}$$

c) On raisonne par double-implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{C}$ et que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{C}$. Pour montrer que $\mathrm{B} = \mathrm{C}$, on procède par double-inclusion.

• $\boxed{\subset}$ Soit $x \in \mathrm{B}$.

• • Si $x \in \mathrm{A}$, alors $x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{C}$, et donc : $x \in \mathrm{C}$.

• • Si $x \notin \mathrm{A}$, alors $x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{C}$, puisque $x \in \mathrm{B}$. Mais $x \notin \mathrm{A}$, donc $x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{C}$ donne : $x \in \mathrm{C}$.

Dans tous les cas : $x \in \mathrm{C}$. Ceci prouve que : $\mathrm{B} \subset \mathrm{C}$.

• $\boxed{\supset}$ Les hypothèses du problème étant symétriques on obtient de même que : $\mathrm{C} \subset \mathrm{B}$.

On en déduit que : $\mathrm{B} = \mathrm{C}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Il est évident que, si B = C, alors $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$.

d) On raisonne par double-implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que $A \cup B = A \cap C$ et que $A \cap B = A \cup C$. Pour montrer que B = C, on procède par double-inclusion.

• Montrons d'abord que : $A \subset C$.

Soit $x \in A$. On a alors $x \in A \cup B = A \cap C$, donc $x \in C$.
• On a donc : $A \cap C = A$, donc : $A \cup B = A$, ce qui donne : $B \subset A$.

• Mais alors : $A \cap B = A \cup C$, donne : B = C.

Puisque $B \subset A \subset C$, on a bien : A = B = C.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Il est évident que, si A = B = C, alors $A \cup B = A \cap C = A$ et $A \cap B = A \cup C = A$.

1.16

a) On utilise les règles de calculs sur les ensembles.

$$\begin{aligned}
&(A \backslash B) \cup (B \backslash A) \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \\
&\underset{\text{distributivité}}{=} (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \\
&\underset{A \cup \overline{A} = E}{=} (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \\
&\underset{\text{lois Morgan}}{=} (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} \\
&= (A \cup B) \backslash (A \cap B) \\
&= A \Delta B
\end{aligned}$$

b) Pour montrer que B = C, on raisonne par double-inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in B$.

• Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B$. Ainsi, d'après la définition de la différence symétrique, $x \notin A\Delta B$, et donc : $x \notin A\Delta C$. Ceci donne : $x \notin A \cup B$ ou $x \in A \cap C$.

Comme $x \in B$, *a fortiori* : $x \in A \cup B$. On a donc $x \in A \cap C$, ce qui donne bien : $x \in C$.

• Si $x \notin A$, alors $x \in B \backslash A$, et donc : $x \in A\Delta B$. On a donc $x \in A\Delta C$, c'est-à-dire : $x \in A \backslash C$ ou $x \in C \backslash A$. Comme $x \notin A$, ceci donne $x \in C \backslash A$, et *a fortiori* : $x \in C$.

Dans tous les cas, on a : $x \in C$. On a donc établi que : $B \subset C$.

$\boxed{\supset}$ Les hypothèses du problème étant symétriques on obtient de même que : $C \subset B$.

On en déduit que : B = C.

1.17 a) • Il s'agit d'une somme dont le terme général ne dépend pas de l'indice, donc :

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = \mathrm{Card}(\llbracket 1, n \rrbracket) \times 1 = n \times 1 = n$$

• Dans une somme double, on commence par calculer la somme de droite, pour toute valeur possible du premier indice.

On vient de voir que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $\sum\limits_{j=1}^{n} 1 = n$, résultat indépendant de i, donc

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} n = \mathrm{Card}(\llbracket 1, n \rrbracket) \times n = n^2$$

• On connaît les sommes arithmétiques : $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, d'où :

$$\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

• On commence par calculer la somme de droite pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} (i+j) &= \sum_{j=1}^{n} i + \sum_{j=1}^{n} j = \mathrm{Card}(\llbracket 1, n \rrbracket) \times i + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= ni + \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

car, dans la première somme, le terme général ne dépend pas de l'indice, et, la seconde somme est arithmétique.

Ceci donne, en mettant en facteur les termes constants par rapport à l'indice de sommation :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i+j) &= \sum_{i=1}^{n} \left(ni + \frac{n(n+1)}{2} \right) = n \sum_{i=1}^{n} i + \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= n \times \frac{n(n+1)}{2} + n \times \frac{n(n+1)}{2} = n^2(n+1).
\end{aligned}$$

• Formellement : $\sum\limits_{1 \le j \le i \le n} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{i} = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=j}^{n}$. On obtient :

$$\sum_{1 \le j \le i \le n} 1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} 1$$

Dans la somme double, on commence par calculer la somme de droite. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\sum_{j=1}^{i} 1 = \mathrm{Card}(\llbracket 1, i \rrbracket) \times 1 = i$$

ce qui donne :

$$\sum_{1 \le j \le i \le n} 1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

b) • On fait apparaître la formule du binôme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}-\binom{n}{0}1^01^n\\ &= (1+1)^n-1=2^n-1\end{aligned}$$

• On fait apparaître la formule du binôme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3^k}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{3^k}1^{n-k}-\binom{n}{n}\frac{1}{3^n}1^0\\ &= \left(1+\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{4}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\end{aligned}$$

• On utilise la formule de factorisation. Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$. On obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} &= 0\binom{n}{0}+\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}\\ &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\end{aligned}$$

On effectue alors le changement d'indice $j=k-1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} &= n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}=n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}1^j1^{n-1-j}\\ &= n(1+1)^{n-1}=n2^{n-1}\end{aligned}$$

Ce calcul est important en probabilités : il donnera l'espérance d'une loi binomiale.

• De même la formule de factorisation donne, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$: $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$. On obtient :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}$$

On effectue alors le changement d'indice $j=k+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} &= \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j}\\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}-\binom{n+1}{0}\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}1^j1^{n+1-j}-1\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\left((1+1)^{n+1}-1\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)\end{aligned}$$

• Ce calcul classique repose sur l'astuce suivante : $k^2=k(k-1)+k$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n}[k(k-1)+k]\binom{n}{k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}\end{aligned}$$

La deuxième somme a été calculée précédemment et est égale à $n2^{n-1}$.

Pour la première somme on utilise deux fois la formule de factorisation : pour tout $k\in[\![2,n]\!]$, $k(k-1)\binom{n}{k}=n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$. On obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k} &= 0\binom{n}{0}+0\binom{n}{1}+\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}\\ &= \sum_{k=2}^{n}n(n-1)\binom{n-2}{k-2}\\ &= n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}\end{aligned}$$

On effectue alors le changement d'indice $j=k-2$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k} &= n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}\\ &= n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}1^j1^{n-2-j}\\ &= n(n-1)(1+1)^{n-2}=n(n-1)2^{n-2}\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k} &= n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}=n2^{n-2}\left((n-1)+2\right)\\ &= n(n+1)2^{n-2}\end{aligned}$$

Ce calcul est important en probabilités : il donnera la variance d'une loi binomiale.

c) • Pour tout $k\in[\![1;n]\!]$, on a :

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\ln(k+1)-\ln(k).$$

On a donc, par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\Big(\ln(k+1)-\ln(k)\Big)=\ln(n+1)-\ln(1).$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln(n+1).$$

• De même, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on a :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

On a donc, par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Comment vérifier ces calculs avec Python ? On peut utiliser le script suivant :

```
def somme(n) :
   s=f(1) # premier terme de la somme
   for k in range(2,n+1) :
      s+=1/(k*(k+1))
   return s
```

Dans la console, on vérifie que `somme(10)` *et* `1-1/11` *donnent le même résultat.*

1.18 a) On nous demande de calculer $\prod_{k=1}^{n} k$. On a :

$$\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k \times \cdots \times n = n!$$

b) On doit calculer $\prod_{k=1}^{n} (2k)$. On a :

$$\prod_{k=1}^{n} (2k) = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2k \times \cdots \times 2n = 2^n \times \prod_{k=1}^{n} k = 2^n n!$$

c) On nous demande de calculer $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$. On a :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2k+1) \times \cdots \times (2n+1)$$

Pour ce calcul classique, l'astuce consiste à faire apparaître le produit des nombres pairs :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n} (2k+1) &= \frac{1 \times \cdots \times 2k \times (2k+1) \times \cdots \times 2n \times (2n+1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2k \times \cdots \times 2n} \\ &= \frac{(2n+1)!}{2^n n!}\end{aligned}$$

d) On a :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} &= \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \cdots \times \frac{\cancel{k}}{\cancel{k+1}} \times \frac{\cancel{k+1}}{\cancel{k+2}} \times \cdots \times \frac{\cancel{n}}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Pour vérifier avec Python :

```
def produit(n) :
   p=f(1) # premier terme du produit
   for k in range(2,n+1) :
      p*=k/(k+1)
   return p
```

1.19 Il suffit de vérifier la formule donnée par récurrence sur l'entier n. La difficulté réside dans le fait qu'à n fixé, la formule doit être vraie pour tout $p \in [\![0,n]\!]$. Il ne faut pas oublier de l'inclure dans l'hypothèse de récurrence.

• Pour $n = 0$, $p \in [\![0,n]\!]$ donne $p = 0$ et alors :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \sum_{k=0}^{0} \binom{k}{0} = \binom{0}{0} = 1$$

Or :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{1}{1} = 1$$

• Supposons que, pour un rang $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque, on ait :

$$\forall p \in [\![0,n]\!], \quad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

On doit démontrer que la propriété est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que :

$$\forall p \in [\![0,n+1]\!], \quad \sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \binom{n+2}{p+1}$$

Soit $p \in [\![0,n+1]\!]$ fixé quelconque.

• • Si $p \in [\![0,n]\!]$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \\ &\underset{\text{hyp. rec.}}{=} \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} \\ &\underset{\text{form. Pascal}}{=} \binom{n+2}{p+1}\end{aligned}$$

• • Si $p = n+1$, l'hypothèse de récurrence ne s'applique pas mais :

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=n+1}^{n+1} \binom{k}{n+1} = \binom{n+1}{n+1} = 1$$

Or :

$$\binom{n+2}{p+1} = \binom{n+2}{n+2} = 1$$

La formule est donc vraie pour tout $p \in [\![0,n+1]\!]$.

Ceci prouve que la propriété de récurrence est vraie au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence, la formule est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour une preuve directe, remarquer que, pour $k \in [\![p,n]\!]$, $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$ (pour $k = p$ on adopte la convention $\binom{p}{p+1} = 0$). En additionnant ces égalités on trouve par télescopage :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{n} \left[\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}\right] \\
&= \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} \\
&= \binom{n+1}{p+1} - 0 \\
&= \binom{n+1}{p+1}
\end{aligned}$$

1.20 Puisque nous ne reconnaissons pas de somme usuelle, simplifions le terme général. On a, pour tout $i \in [\![0,p]\!]$:

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i} = \frac{n!}{i!\cancel{(n-i)!}} \frac{\cancel{(n-i)!}}{(p-i)!(n-p)!} = \frac{n!}{i!(p-i)!(n-p)!}$$

L'astuce consiste alors à multiplier en haut et en bas par $p!$, pour faire apparaître le produit de deux nouveaux coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i} &= \frac{n!}{i!(p-i)!(n-p)!} \times \frac{p!}{p!} \\
&= \frac{p!}{i!(p-i)!} \times \frac{n!}{p!(n-p)!} \\
&= \binom{p}{i}\binom{n}{p}
\end{aligned}$$

Comme le coefficient binomial de droite ne dépend pas de i, on va pouvoir le mettre en facteur dans la somme à calculer :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{p} \binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i} &= \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}\binom{n}{p} \\
&= \binom{n}{p} \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \\
&= \binom{n}{p} \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} 1^i 1^{p-i} \\
&= \binom{n}{p} 2^p
\end{aligned}$$

1.21 a) À première vue, on ne va pas savoir simplifier $\sum\limits_{i=j}^{n} \frac{j}{i}$.

Mais, formellement : $\sum\limits_{1 \leq j \leq i \leq n} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{i} = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=j}^{n}$.

On peut donc permuter les signes Σ :

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{j}{i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{j}{i}$$

On commence par calculer la somme de droite, pour $i \in [\![1,n]\!]$ fixé quelconque :

$$\sum_{j=1}^{i} \frac{j}{i} = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} j = \frac{1}{i} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{i+1}{2}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{j}{i} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} + n\right) = \frac{n^2+3n}{4} = \frac{n(n+3)}{4}
\end{aligned}$$

b) La condition reliant les deux indices est $j < i$, c'est-à-dire : $j \leq i-1$. Formellement : $\sum\limits_{1 \leq j < i \leq n} = \sum\limits_{i=2}^{n} \sum\limits_{j=1}^{i-1} = \sum\limits_{j=1}^{n-1} \sum\limits_{i=j+1}^{n}$.

Les deux formules amènent au résultat, on choisit ici d'utiliser la première :

$$\sum_{1 \leq j < i \leq n} ij = \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} ij$$

On commence par calculer la somme de droite, pour $i \in [\![2,n]\!]$ fixé quelconque :

$$\sum_{j=1}^{i-1} ij = i \sum_{j=1}^{i-1} j = i\frac{(i-1)i}{2} = \frac{i^2(i-1)}{2}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq j < i \leq n} ij &= \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n} i^2(i-1) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=2}^{n} i^3 - \sum_{i=2}^{n} i^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{4}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2n+1}{3}\right) \\
&= \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}
\end{aligned}$$

1.22 a) Grâce à la formule du binôme :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

et :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0^n = 0$$

b) Dans la somme A_n on distingue les indices k pairs, de la forme $k = 2p$, et les indices k impairs, de la forme $k = 2p+1$:

$$A_n = \sum_{0 \le 2p \le n} \binom{n}{2p} + \sum_{0 \le 2p+1 \le n} \binom{n}{2p+1} = S_n + T_n$$

De même :

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{0 \le 2p \le n} \binom{n}{2p} (-1)^{2p} + \sum_{0 \le 2p+1 \le n} \binom{n}{2p+1} (-1)^{2p+1} \\ &= \sum_{0 \le 2p \le n} \binom{n}{2p} - \sum_{0 \le 2p+1 \le n} \binom{n}{2p+1} \\ &= S_n - T_n \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$S_n = \frac{1}{2}(A_n + B_n) = \frac{1}{2}(2^n + 0) = 2^{n-1}$$

et :

$$T_n = \frac{1}{2}(A_n - B_n) = \frac{1}{2}(2^n - 0) = 2^{n-1}$$

c) Formellement : $\sum_{k=0}^{n} = \sum_{0 \le 2k \le 2n}$. On a donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = \sum_{0 \le 2k \le 2n} \binom{2n}{2k} = S_{2n} = 2^{2n-1}$$

1.23 a) Soit $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$. On doit établir que :

$$\varphi_{\theta_1} \circ \varphi_{\theta_2} = \varphi_{\theta_1 + \theta_2}$$

qui est une égalité de fonctions définies sur E, c'est-à-dire que :

$$\forall f \in E, \quad \varphi_{\theta_1}\big(\varphi_{\theta_2}(f)\big) = \varphi_{\theta_1+\theta_2}(f)$$

Soit $f \in E$.

On pose $g = \varphi_{\theta_2}(f)$, on a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x+\theta_2)$.

Ceci donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi_{\theta_1}\big(\varphi_{\theta_2}(f)\big)(x) &= \varphi_{\theta_1}(g)(x) \\ &= g(x+\theta_1) \\ &= f(x+\theta_1+\theta_2) \\ &= \varphi_{\theta_1+\theta_2}(f)(x) \end{aligned}$$

Comme l'égalité précédente est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit l'égalité dans E :

$$\varphi_{\theta_1}\big(\varphi_{\theta_2}(f)\big) = \varphi_{\theta_1+\theta_2}(f)$$

et comme celle-ci est vraie pour tout $f \in E$:

$$\varphi_{\theta_1} \circ \varphi_{\theta_2} = \varphi_{\theta_1+\theta_2}$$

Ceci prouve le résultat demandé.

b) Soit $f \in E$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_0(f)(x) = f(x+0) = f(x)$$

Ceci prouve que : $\forall f \in E,\ \varphi_0(f) = f$. Donc : $\varphi_0 = \mathrm{Id}_E$.

On a donc : $\varphi_\theta \circ \varphi_{-\theta} = \varphi_{\theta-\theta} = \varphi_0 = \mathrm{Id}_E$.

Et de même : $\varphi_{-\theta} \circ \varphi_\theta == \varphi_0 = \mathrm{Id}_E$.

Ceci prouve que φ_θ est bijective de E sur E et que :

$$(\varphi_\theta)^{-1} = \varphi_{-\theta}$$

Chapitre 2

Nombres complexes et trigonométrie

Thèmes abordés dans les exercices

— Calculs dans $\mathbb{C}$
— Fonctions trigonométriques
— Équations du second degré à coefficients réels
— Applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

— Forme algébrique d'un nombre complexe : parties réelles et imaginaires
— Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul : module et argument
— Équations et inéquations trigonométriques
— Formules d'Euler et de De Moivre
— Formules de résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels

Les méthodes à retenir

Pour déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe	— S'il s'agit d'un produit de formes algébriques, on développe. ↪ **Exercices 2.2 et 2.6** — S'il s'agit d'un quotient de formes algébriques, on multiplie en haut et en bas du trait de fraction par le complexe conjugué du dénominateur. ↪ **Exercices 2.1 et 2.6** — Si un complexe est sous forme trigonométrique : $z = re^{i\theta}$, on le met sous forme algébrique : $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$. ↪ **Exercices 2.1 et 2.6**
Pour déterminer la forme trigonométrique/exponentielle d'un nombre complexe	— À partir d'une forme algébrique, on calcule le module puis on le met en facteur, ce qui donne alors sinus et cosinus de l'argument principal. ↪ **Exercices 2.1, 2.2 et 2.6** — S'il s'agit d'une somme ou d'une différence de formes trigonométriques de module 1 : $e^{ix} + e^{iy}$ ou $e^{ix} - e^{iy}$, on factorise alors par $e^{i\frac{x+y}{2}}$ pour faire apparaître les formules d'Euler. ↪ **Exercices 2.6 et 2.8** — S'il s'agit d'un produit : $z = z_1 z_2$, on a les formules : $\|z\| = \|z_1\|\|z_2\|$ et $\mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)\ [2\pi]$. ↪ **Exercices 2.1, 2.2 et 2.6** — S'il s'agit d'un quotient : $z = \frac{z_1}{z_2}$, on a les formules : $\|z\| = \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|}$ et $\mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z_2)\ [2\pi]$. ↪ **Exercices 2.1 et 2.6**
Pour résoudre équations et inéquations trigonométriques	— Pour résoudre une équation, on se ramène aux équations de références : 1) $\cos a = \cos b \iff a = b\ [2\pi]$ ou $a = -b\ [2\pi]$, 2) $\sin a = \sin b \iff a = b\ [2\pi]$ ou $a = \pi - b\ [2\pi]$, 3) $\tan a = \tan b \iff a = b\ [\pi]$. ↪ **Exercices 2.12 et 2.18** — Pour résoudre une inéquation, le mieux est d'utiliser le cercle trigonométrique pour visualiser les intervalles solutions. ↪ **Exercice 2.12**