Pierre Montagnon

MATHS

HYPOKHÂGNE B/L

TOUT-EN-UN

DUNOD

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-085276-5

Avant-propos

Avant-propos

L'idée derrière ce manuel

Chères lectrices, chers lecteurs,

Cet ouvrage s'adresse aux étudiant.e.s d'hypokhâgne B/L (première année de CPGE Lettres et Sciences Sociales). Il s'agit d'un manuel « Tout-en-Un » présentant un cours de mathématiques complet sur le programme de première année de B/L, ainsi que des exercices sur chacun des chapitres et leur corrigé intégral.

Par son ambition pluridisciplinaire, la filière B/L occupe une place particulière dans le paysage des classes préparatoires. Elle vise en effet à transformer en l'espace de deux ou trois ans les lycéen.ne.s que vous étiez en « honnêtes femmes et hommes » capables de comprendre les grands enjeux sociaux, politiques et scientifiques contemporains à la lumière d'une culture classique et moderne aussi complète que possible. La diversité des carrières entreprises par les anciens étudiants de B/L et l'attractivité de leur profil pour les nombreuses écoles qui les recrutent témoignent de la grande réussite de ce projet. Cependant, la multiplicité des matières enseignées en B/L et l'absence de hiérarchie entre elles vous obligera à faire face simultanément à au moins six matières à haut niveau d'exigence, à un volume de cours hebdomadaire conséquent et à une alternance de colles et de devoirs à un rythme soutenu, ce qui pourra vous donner l'impression de devoir lutter sur de multiples fronts sans avoir le temps d'approfondir et de prendre du recul sur une matière.

Dans ce contexte, il est intéressant de disposer de ressources qui mettent en évidence et exploitent les liens qui existent entre les différentes matières enseignées en B/L. C'est l'une des raisons qui m'ont poussé à écrire cet ouvrage, qui répond à plusieurs ambitions :

- De façon très classique, il entend tout d'abord permettre un travail en autonomie : retour sur les notions mal comprises en cours, étude d'exemples abondants et variés, entraînement sur des exercices de difficulté variable et des sujets d'annales.
- Il propose par ailleurs un grand nombre de développements mathématiques avancés, pour certains hors-programme (et alors clairement signalés comme tels), sous la forme de points de cours ou d'exercices de fin de chapitre. Ceux-ci permettront aux plus à l'aise d'entre vous de développer leur culture mathématique ou de s'entraîner à la manipulation de notions techniques présentes de façon implicite dans des sujets de concours. Afin de respecter une pagination raisonnable, j'ai souvent fait le choix de renvoyer ces compléments en ligne et de les rendre accessibles *via* des QR codes placés dans le texte.

- Le troisième objectif, celui qui me tient le plus à cœur et sans doute le plus ambitieux, est de vous aider à situer les mathématiques dans votre formation et par rapport aux autres activités de l'esprit. En effet, il n'est pas rare que d'ancien.ne.s étudiant.e.s de B/L, même brillant.e.s, voient *a posteriori* la présence des mathématiques dans leur cursus au mieux comme une simple nécessité pour comprendre les cours d'économie les plus formels, et au pire comme une incongruïté relevant de la surmathématisation de la sélection par les grandes écoles. Or l'existence de cours de mathématiques au sein de la formation humaniste offerte par la B/L est tout sauf un hasard : les mathématiques occupent une place particulière dans l'histoire de la pensée et dans celle des sciences et techniques, s'entremêlent volontiers avec la philosophie (lorsqu'il s'agit de discuter de logique, d'infinité, d'instantanéité, de limites, d'espace ou de probabilités, par exemple) et fournissent par leur pratique une habitude de *raisonner* nécessaire tant aux chercheurs et aux journalistes et qu'aux juristes et aux responsables politiques. Pour aider à la prise de recul sur ces différents aspects des mathématiques, j'ai inclus dans ce livre et dans les contenus en ligne de nombreuses digressions d'ordre historique, économique et philosophique. J'y fais aussi des remarques générales sur la pratique des mathématiques, qui ne viennent ordinairement à l'esprit qu'après plusieurs années de manipulation des concepts et des outils mais sur lesquelles il peut être profitable à un.e élève de B/L de se pencher pour nourrir une réflexion tant épistémologique que philosophique.

Ancien élève de B/L et professeur dans cette filière depuis plusieurs années, je souhaitais écrire un manuel qui reprend l'intégralité de mon cours, mais auquel les étudiant.e.s pourraient aussi se référer pour apprendre les mathématiques « en profondeur » sans que j'aie à multiplier les digressions qui réduiraient le temps consacré à la préparation de l'épreuve de mathématiques du concours à proprement parler. Le présent ouvrage est le résultat de ce projet, échafaudé à partir de cours donnés au lycée Jacques Amyot de Melun et au lycée Voltaire de Paris entre 2019 et 2024.

Organisation de l'ouvrage

Ce manuel, et son équivalent pour la deuxième année, sont organisés *grosso modo* selon les différentes sections du programme officiel du concours B/L 2025 (disponible en scannant le code ci-contre), avec un accent particulier mis sur les chapitres introductifs pour permettre aux étudiant.e.s les moins formé.e.s en mathématiques au lycée de rattraper leur retard initial.

Chaque chapitre est organisé comme suit :

- Un cours complet, illustré par de nombreux exemples (numérotés lorsqu'ils présentent un intérêt intrinsèque), et parcouru de remarques indiquées par les pictogrammes ci-après.

Conseil relatif à la rédaction.

Astuce calculatoire et/ou mnémotechnique.

Mise en garde

Écueil classique ou erreur à ne pas commettre.

« Zoom »

Compléments ou digression sur un thème en lien plus ou moins étroit avec les notions mathématiques abordées dans le cours.

Programme

Indication sur le statut hors-programme de certaines sections.

Les commentaires en marge du cours sont présentés en romain (avec des caractères droits) lorsqu'ils sont d'ordre mathématique, et en italiques lorsqu'ils ont un statut culturel.

- Des exercices de difficulté progressive, organisés en une section « Compréhension du cours » qu'il faut savoir traiter intégralement pour vérifier que le chapitre a été compris, une section « Entraînement » pour développer votre maîtrise technique des outils dans une démarche de « musculation mathématique », une section « Exercices d'annales » pour vous confronter petit à petit aux sujets de concours, et selon les chapitres, une section d'exercices d'application dans des domaines variés (géométrie, économie, statistiques, physique), et une dernière section constituée d'exercices exigeants voire très corsés.

  La difficulté des exercices est indiquée par les pictogrammes , , , et (de « très facile » à « très difficile »), hormis dans la section « Compréhension du cours » dans laquelle aucune astuce mathématique n'est requise et dont les exercices sont faciles si et seulement si le cours est compris.

- Les corrections détaillées des exercices. Pour maintenir le volume de ce manuel sous un seuil raisonnable, certaines corrections sont déposées en ligne et sont accessibles par un QR code indiqué à l'endroit où elles devraient se trouver.

Remerciements

J'adresse mes chaleureux remerciements aux éditions Dunod pour la confiance qu'elles m'ont témoignée en acceptant de publier un manuel atypique à l'usage d'un public relativement restreint.

Ma gratitude va ensuite aux très nombreux relecteurs et relectrices de cet ouvrage, parmi lesquels des collègues, colleurs et proches, ainsi que des générations d'étudiants de B/L à Melun et à Paris (les Antoine, Baptiste, Benjamin, Bob S., Élise, Gaspard, Godefroy, Guillaume, Julie, Kewan, Laureline, Maël, Mathilda, M. Moul, Nathan, Rébecca, Romain, Romane, Sarah, Thomas, Valentin et bien d'autres). Merci à toutes et tous pour leurs retours, leurs remarques constructives et leurs encouragements durant les années nécessaires à la rédaction de ce livre. J'adresse une pensée particulière à François Wawrzyniak, relecteur infatigable depuis plusieurs années, pour son regard précis et consciencieux, ses contributions de grande valeur et son amitié.

Merci enfin, du fond du cœur, à mes professeurs de B/L, Marcin Pulkowski et Pascal Mano, qui m'ont appris à entretenir avec les mathématiques un rapport intime et réflexif sans lequel ce manuel n'aurait jamais pu voir le jour.

Deux petits scrupules

Notations

Bien qu'elles soient essentiellement standardisées parmi les professeurs de B/L, les notations que j'adopte peuvent à l'occasion légèrement différer de celles adoptées par votre professeur. Il va de soi que les notations à privilégier en colle ou en devoir sont celles introduites en classe !

Vous, elles, eux, iels

L'usage d'une certaine forme d'écriture inclusive s'étend peu à peu dans les publications. Je sacrifierai néanmoins dans cet ouvrage à la tradition consistant à qualifier indifféremment de « lecteur » et à genrer au masculin toutes les personnes qui le liront. N'ignorant pas qu'une majorité des étudiants de B/L sont des étudiantes, je prie ces dernières (et toustes les autres) de bien vouloir excuser l'usage de cette convention rétrograde mais commode.

Erratum et contact

Malgré le grand soin apporté à la relecture de ce manuel, il est quasiment inévitable qu'il y subsiste quelques coquilles ou des passages manquant de clarté. Je tiendrai un *erratum* accessible *via* le QR code ci-contre.

Vous pouvez me signaler toute erreur ou imprécision à l'adresse suivante :

`pierre.montagnon.bl@gmail.com`

Table des matières

Logique et ensembles

Chapitre 0

Le premier apprentissage mathématique de l'enseignement supérieur est celui de la « langue » des mathématiques. Il s'agit du langage formel dans lequel sont rédigés certains théorèmes du cours et dans lequel il est attendu, dans les exercices, en colle ou sur une copie de concours, de savoir écrire des démonstrations. Ce langage permet d'écrire des propositions logiques de façon non ambiguë, de sorte qu'il soit possible de statuer sur leur valeur de vérité. Une fois posées ces bases logiques rigoureuses, il est possible de définir différentes stratégies de démonstration et, de façon plus utilitaire, de se doter d'automatismes permettant d'aborder la plupart des questions posées dans un sujet de concours.

Un sujet connexe est celui des ensembles, entre lesquels les relations classiques déjà croisées au lycée (inclusion, égalité, disjonction, etc.) correspondent à des relations logiques. Ce chapitre introductif est donc l'occasion pour nous de revoir les bases de la théorie des ensembles, véritable colonne vertébrale des mathématiques modernes.

Dans ce chapitre :

- Règles d'usage des quantificateurs formels.
- Règles d'usage des connecteurs logiques formels et verbaux.
- Rédaction d'un raisonnement mathématique.
- Démonstration par l'absurde, par contraposée, par récurrence et par analyse-synthèse.
- Vocabulaire de la théorie des ensembles.
- Opérations sur les ensembles et leurs cardinaux.

1 Éléments de logique

Comment découvrir ce chapitre ?

Dans certaines classes, conformément aux indications du programme officiel, les points abordés dans cette section ne sont pas introduits à la faveur d'un chapitre spécifique mais le sont au fur et à mesure de l'étude des autres chapitres.

On fait ici le choix de regrouper les notions de logique mobilisées par le programme de B/L pour qu'il soit plus aisé de s'y référer en cas de doute. Toutefois, il n'est pas nécessaire de lire d'une traite cette section plutôt théorique ; on pourra y revenir petit à petit au fil des premières semaines de cours, lorsque l'on aura croisé les différents concepts logiques en situation.

Il reste fortement conseillé d'avoir terminé la lecture de la présente section avant le premier devoir surveillé de l'année d'hypokhâgne.

1.1 Propositions et relations logiques

La validité du savoir en mathématiques repose sur une structure bien précise : à partir de quelques affirmations considérées comme vraies, nommées *axiomes*, on obtient d'autres affirmations par le biais d'une *démonstration*, c'est-à-dire d'un cheminement logique obéissant à des règles bien précises. Ces affirmations sont alors à leur tour considérées comme vraies et appelées *théorèmes*.

Voir le Zoom sur les axiomes des mathématiques page 66.

On appelle conjecture *un théorème que l'on pense vrai sans encore être parvenu à le démontrer.* *Voir le Zoom sur les conjectures page 67.*

La théorie mathématique est donc composée de théorèmes découlant tous par des démonstrations plus ou moins complexes d'un ensemble réduit d'axiomes.

On utilise souvent les mots *assertion* ou *proposition* comme synonymes du terme *affirmation*, qui désigne un énoncé pouvant être vrai ou faux.

Dans un cours de mathématiques, pour hiérarchiser les résultats énoncés, on commet souvent l'abus de langage consistant à appeler *proposition* un théorème d'importance moindre, et on réserve l'appellation *théorème* aux théorèmes très importants. Ainsi, on trouvera dans ce cours des encadrés de la forme suivante :

> **Proposition.** Si $a \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $y = ax + 1$ coupe l'axe des abscisses si et seulement si $a \neq 0$.

En présentant une proposition de la sorte, on affirme donc que cette assertion est vraie.

Théorème (Théorème de Pythagore). Dans un triangle ABC rectangle en A, on a
$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Revenons à notre description de la structure du raisonnement mathématique. On expose à présent les relations que peuvent entretenir entre elles les propositions mathématiques et qui permettent d'échafauder des raisonnements.

1.1.1 Connecteurs « et » et « ou »

Définition 1 (Connecteur « et »). Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux propositions, on appelle *conjonction* de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{Q}$ la propriété notée « $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ » qui est vraie si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies simultanément, et fausse sinon.

On peut dresser la *table de vérité* des propositions « $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ » et « $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ », c'est-à-dire un tableau dans lequel on donne leur valeur de vérité (V pour « vraie », F pour « fausse ») en fonction de celles de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{Q}$:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$
V	V	V	V
F	F	F	F
V	F	F	V
F	V	F	V

Exemple. Si $x \in \mathbb{R}$, la proposition « x est positif et $x^2 \geqslant 1$ » signifie que l'on a à la fois $x \geqslant 0$ et $x^2 \geqslant 1$.

Exemple. La proposition « $1 + 1 = 2$ et tous les chats sont gris » est fausse même si « $1 + 1 = 2$ » est vraie, car tous les chats ne sont pas gris.

Définition 2 (Connecteur « ou »). Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux propositions, on appelle *disjonction* de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{Q}$ la propriété notée « $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ » qui est vraie si $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ ou les deux sont vraies, et fausse si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont fausses.

Exemple. Si $x \in \mathbb{R}$, la proposition « x est positif ou $x^2 \geqslant 1$ » signifie que l'on a soit $x \geqslant 0$, soit $x^2 \geqslant 1$, soit les deux.

Exemple. La proposition « $1 + 1 = 2$ ou tous les chats sont gris » est vraie car « $1 + 1 = 2$ » est vraie.

Conversation entre un mathématicien et sa collègue de retour de congé maternité :
« Félicitations pour la naissance de votre nouvel enfant ! S'agit-il d'un garçon ou d'une fille ?
– Oui. »

Il est important de souligner que le « ou » mathématique est *inclusif* : la proposition « $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ » est vraie même lorsque $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{Q}$ sont vraies.

Exemple. La proposition « $1 + 1 = 2$ ou $3 + 5 = 8$ » est vraie car « $1 + 1 = 2$ » est vraie.

Lorsque l'on cherchera à exprimer un « ou » exclusif, on précisera donc explicitement « $\mathcal{P}$ est vraie ou $\mathcal{Q}$ est vraie, mais pas les deux ».

1.1.2 Implication logique

Définition 3 (Implication logique). On dit qu'une proposition $\mathcal{P}$ *implique* une proposition $\mathcal{Q}$, et on note $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, lorsque l'on peut dire « si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ l'est aussi ».

L'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est elle-même une proposition, qui peut se lire « $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$ », « $\mathcal{P}$ entraîne $\mathcal{Q}$ » ou « si $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{Q}$ ».

Exemple. Si n est un entier naturel, alors

$$n \geqslant 5 \quad \Longrightarrow \quad n \geqslant 2.$$

En écrivant cette implication, on ne prétend pas que $n \geqslant 5$ ni que $n \geqslant 2$, mais seulement que *si* $n \geqslant 5$, alors $n \geqslant 2$.

Exemple. L'implication

$$\text{Je suis le pape} \quad \Longrightarrow \quad 2 = 5$$

est correcte. En effet, cette affirmation se lit « Si je suis le pape, alors $2 = 5$ », et elle n'a rien d'inexact puisque la condition « Je suis le pape » n'est pas remplie.

Précision importante : l'auteur de ces lignes n'est pas pape.

L'exemple ci-dessus illustre une implication (vraie) du type « faux implique faux ». Comme la définition de l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ ne porte que sur les conséquences du fait que $\mathcal{P}$ soit vraie, l'implication est vérifiée quel que soit le statut de vérité de $\mathcal{Q}$ lorsque $\mathcal{P}$ est fausse :

Exemple. Le fait que la Terre soit plate implique le théorème de Pythagore puisque celui-ci est vrai dans tous les cas (que la Terre soit plate ou non) : ainsi, il est correct d'écrire

$$\text{La Terre est plate} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l}\text{Si } ABC \text{ est un triangle rectangle} \\ \text{en } A\text{, alors } BC^2 = AB^2 + AC^2.\end{array}$$

Pour la même raison, le fait que la Terre soit ronde implique lui aussi le théorème de Pythagore :

$$\text{La Terre est ronde} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l}\text{Si } ABC \text{ est un triangle rectangle} \\ \text{en } A\text{, alors } BC^2 = AB^2 + AC^2.\end{array}$$

La table de vérité de l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est la suivante :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
F	F	V
V	F	F
F	V	V

Ces exemples peuvent paraître saugrenus car ils relient par des signes d'implication des propositions qui ne semblent pas découler logiquement les unes des autres. Ils sont pourtant corrects : la relation d'implication ne signifie pas que l'on peut directement déduire une proposition de l'autre. Cependant, dans l'immense majorité des cas, on utilisera la relation d'implication pour relier entre elles des propositions qui découlent logiquement les unes des autres, et il est très commun qu'un énoncé demande de démontrer une implication de la forme $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, où $\mathcal{Q}$ peut effectivement être déduite de $\mathcal{P}$. La méthode à suivre dans ce cas est la suivante :

Méthode 4 (Démontrer une implication)**.** Pour démontrer l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$:

- On suppose explicitement que $\mathcal{P}$ est vraie.
- On montre que sous cette hypothèse, $\mathcal{Q}$ est vraie.
- On conclut explicitement que l'implication est vraie.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche à montrer l'implication suivante :

$$n \text{ est multiple de } 6 \quad \Longrightarrow \quad n \text{ est multiple de } 2.$$

On suit les trois étapes données par la méthode 4 :

- Supposons que n est multiple de 6.
- On peut alors écrire $n = 6k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. On a donc $n = 2 \cdot 3k$, or $3k$ est entier donc n est multiple de 2.
- Ainsi, on a bien l'implication attendue.

En pratique, on ne rédigera pas ce raisonnement sous forme de liste mais plutôt sous forme de paragraphe.

Quitte à enfoncer des portes ouvertes, notons que le fait d'écrire une implication entre deux propositions ne *démontre* aucune d'entre elles (on n'a pas démontré le théorème de Pythagore dans l'exemple de la page précédente !). Insistons lourdement :

Le meilleur moyen de ne jamais attribuer à l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ des vertus qu'elle n'a pas est de s'obliger à toujours la lire « si $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{Q}$ ».

! Le fait d'écrire une implication entre deux propositions ne revient pas à affirmer, et encore moins à démontrer, la véracité de l'une ou de l'autre.

Précisons un dernier point de vocabulaire. Lorsque l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vérifiée, on dit que $\mathcal{P}$ est une *condition suffisante* de $\mathcal{Q}$: il suffit que $\mathcal{P}$ soit vraie pour que $\mathcal{Q}$ le soit. Par ailleurs, écrire $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ revient à dire que l'on ne peut avoir $\mathcal{P}$ sans avoir aussi $\mathcal{Q}$: on dit alors que $\mathcal{Q}$ est une *condition nécessaire* à $\mathcal{P}$, ou que « $\mathcal{P}$ seulement si $\mathcal{Q}$ ».

L'exemple suivant permet de fixer les idées sur les notions de condition nécessaire et de condition suffisante :

Exemple. Le fait d'avoir 18 ans ou plus est une condition nécessaire à l'obtention du permis de conduire. Toutefois, il n'en est pas une condition suffisante.

De façon symétrique, le fait d'avoir le permis est une condition suffisante au fait d'avoir plus de 18 ans, mais n'en est pas une condition nécessaire (on peut avoir 18 ans sans avoir le permis).

On peut donc écrire

$$\text{« J'ai mon permis de conduire »} \quad \Longrightarrow \quad \text{« J'ai plus de 18 ans »}$$

mais l'implication réciproque est fausse :

$$\text{« J'ai plus de 18 ans »} \quad \not\Longrightarrow \quad \text{« J'ai mon permis de conduire »}.$$

Notons l'absence de causalité entre le fait d'avoir le permis de conduire et le fait d'avoir plus de 18 ans : l'implication ne dit pas que c'est le fait d'avoir le permis qui me donne plus de 18 ans, mais que *si* j'ai mon permis de conduire, *c'est que* j'ai plus de 18 ans.

1.1.3 Équivalence logique

Définition 5 (Équivalence de deux propositions)**.** On dit de deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ qu'elles sont *équivalentes*, et on note $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, lorsque l'on a à la fois $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

On écrit parfois l'implication réciproque $\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}$ sous la forme $\mathcal{P} \Longleftarrow \mathcal{Q}$.

Une fois encore, la relation $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ est elle-même une proposition, qui se lit « $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes », ou « $\mathcal{P}$ si et seulement si $\mathcal{Q}$ ». Il est important de comprendre pourquoi on utilise ici l'expression « si et seulement si » : dire que $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ signifie bien que « $\mathcal{P}$ si $\mathcal{Q}$ » (c'est-à-dire $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$) et que « $\mathcal{P}$ seulement si $\mathcal{Q}$ » (c'est-à-dire $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$).

La relation $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ est vérifiée lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont nécessairement le même statut de vérité, c'est-à-dire si elles sont soit simultanément vraies, soit simultanément fausses.

Comme dans le cas de l'implication, affirmer l'équivalence de deux propositions ne revient pas à statuer sur leur véracité :

Pour cette raison, on conseille de lire $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ sous la forme « $\mathcal{P}$ si et seulement si $\mathcal{Q}$ ».

Exemple. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors x^3 est positif si et seulement si x l'est :

$$x^3 \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geqslant 0.$$

En l'absence d'information supplémentaire sur x, il est impossible de savoir si ces deux propositions sont vraies ou si elles sont fausses.

L'équivalence de deux propositions vraies est systématique et, à nouveau, ne signifie pas qu'elles se déduisent logiquement l'une de l'autre :

Exemple. L'égalité $1 + 1 = 2$, qui est vraie, est équivalente au théorème de Pythagore car celui-ci est vrai aussi. On a donc

$$1+1=2 \iff \begin{array}{l}\text{Si } ABC \text{ est un triangle rectangle} \\ \text{en } A\text{, alors } BC^2 = AB^2 + AC^2.\end{array}$$

En effet, si $1 + 1 = 2$, alors le théorème de Pythagore est vrai (puisque c'est le cas de toute façon), et si le théorème est vrai, alors $1 + 1 = 2$ (puisque c'est aussi le cas de toute façon) : on a donc bien la double implication qui permet de conclure que les propositions sont équivalentes.

La table de vérité de $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ est la suivante :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
F	F	V
V	F	F
F	V	F

Il en va de même pour l'équivalence de propositions fausses :

Exemple. On a l'équivalence

$$\text{La Terre est plate} \iff \text{Je suis le pape.}$$

En effet, si la Terre est plate, alors je suis le pape (je ne commets pas d'erreur en l'affirmant puisque la Terre n'est pas plate), et si je suis le pape (ce qui est faux aussi), alors la Terre est plate.

En pratique, on utilisera surtout la relation d'équivalence pour résoudre des inégalités, des équations ou des systèmes d'équations, ou pour reformuler certaines propriétés ; on l'utilisera alors pour relier deux propositions qui sont la reformulation l'une de l'autre *via* une transformation opérée à l'aide d'un argument simple.

Exemple. Si $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire l'équivalence

$$x + 1 = 2 \iff x = 1.$$

Un correcteur qui lit cette équivalence comprendra que nous affirmons que $x + 1 = 2$ est vérifié si et seulement si $x = 1$, c'est-à-dire que si $x+1 = 2$ alors $x = 1$, et si $x = 1$ alors $x+1 = 2$. Cependant, une fois l'équivalence écrite, on ne sait toujours pas si l'affirmation « $x = 1$ » est vraie ou non.

Ne pas confondre équivalence et simple implication

Lorsque l'on écrit une équivalence du type $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, il importe de s'assurer que l'on a à la fois l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ **et** l'implication réciproque $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

Exemple 6 (Une erreur très commune)**.** Si $x \in \mathbb{R}$, il est faux d'écrire

$$x = 1 \iff x^2 = 1$$

car si l'implication directe ($x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$) est bien vérifiée, ce n'est pas le cas de l'implication réciproque ($x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$) : en effet, l'égalité $x^2 = 1$ est aussi vérifiée lorsque $x = -1$.

On sera amené dans la suite du cours et dans de nombreux exercices à démontrer l'équivalence de certaines propositions. En général, on appliquera pour cela la méthode suivante :

Méthode 7 (Démontrer une équivalence (par double implication))**.** Pour démontrer l'équivalence $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$:

- On montre l'implication directe $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ en utilisant la méthode 4 : on suppose que $\mathcal{P}$ est vraie, on en déduit $\mathcal{Q}$ et on conclut que l'implication est vraie.
- On montre l'implication réciproque $\mathcal{P} \Leftarrow \mathcal{Q}$ par la même méthode : on suppose que $\mathcal{Q}$ est vraie, on en déduit $\mathcal{P}$ et on conclut que l'implication est vraie.
- On conclut que l'équivalence est vraie.

Exemple. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Démontrons l'équivalence

$$x^2 + y^2 = 0 \iff (x = 0 \text{ et } y = 0).$$

- On démontre tout d'abord l'implication directe. Supposons que $x^2 + y^2 = 0$. Comme x^2 et y^2 sont tous deux positifs et comme leur somme vaut 0, on a $x^2 = 0$ et $y^2 = 0$. Ainsi, on a $x = 0$ et $y = 0$. L'implication directe est donc établie.
- On démontre à présent l'implication réciproque. Supposons que $x = 0$ et $y = 0$; on a alors $x^2 = y^2 = 0$, et donc $x^2 + y^2 = 0$. L'implication réciproque est donc établie.
- L'équivalence attendue est donc bien démontrée.

Lorsque deux propositions sont équivalentes, chacune implique l'autre et en est donc une condition à la fois nécessaire et suffisante (on utilise parfois l'acronyme CNS). On retiendra les reformulations suivantes :

$$\begin{aligned}(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) &\iff \mathcal{P} \text{ est une condition suffisante de } \mathcal{Q} &&\iff \mathcal{Q} \text{ si } \mathcal{P}\\ &\iff \mathcal{Q} \text{ est une condition nécessaire de } \mathcal{P} &&\iff \mathcal{P} \text{ seulement si } \mathcal{Q}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}) &\iff \mathcal{P} \text{ est une condition nécessaire et suffisante de } \mathcal{Q}\\ &\iff \mathcal{Q} \text{ si et seulement si } \mathcal{P}\\ &\iff \mathcal{Q} \text{ est une condition nécessaire et suffisante de } \mathcal{P}\\ &\iff \mathcal{P} \text{ si et seulement si } \mathcal{Q}\end{aligned}$$

Lorsqu'un énoncé demande de trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'une affirmation $\mathcal{P}$ donnée soit vraie, il invite à trouver une proposition $\mathcal{Q}$ aussi simple que possible telle que $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, de préférence utilisant les variables et les paramètres introduits dans l'énoncé.

Exemple. Soit $x \in \mathbb{R}$. Donnons une condition nécessaire et suffisante pour que $x^2\left(\sqrt{1+x^2}-1\right) = 0$. Notons tout d'abord que la quantité $\sqrt{1+x^2}$ existe bel et bien puisque $1+x^2 \geqslant 0$. On a alors

$$\begin{aligned}x^2\left(\sqrt{1+x^2}-1\right) = 0 &\iff x^2 = 0 \text{ ou } \sqrt{1+x^2}-1 = 0\\ &\iff x^2 = 0 \text{ ou } \sqrt{1+x^2} = 1\\ &\iff x^2 = 0 \text{ ou } 1+x^2 = 1\\ &\iff x^2 = 0 \text{ ou } x^2 = 0\\ &\iff x^2 = 0\\ &\iff x = 0,\end{aligned}$$

donc une condition nécessaire et suffisante pour que $x^2\left(\sqrt{1+x^2}-1\right) = 0$ est que $x = 0$.

On vérifie à chaque fois que l'on écrit le signe $\Leftrightarrow$ que l'implication directe ($\Rightarrow$) et l'implication réciproque ($\Leftarrow$) sont bien valides. Par exemple, la troisième équivalence provient, dans le sens direct, d'un passage au carré, et dans le sens indirect, d'un passage à la racine carrée, qui est bien licite car les quantités $1+x^2$ et 1 sont positives.

1.1.4 Négation d'une proposition

Définition 8 (Négation d'une proposition)**.** On appelle *négation* d'une proposition $\mathcal{P}$ la proposition notée non$\mathcal{P}$ qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse, et fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.

On trouve dans certains cours les notations $\overline{\mathcal{P}}$ ou $\neg\mathcal{P}$.

La négation logique d'une proposition $\mathcal{P}$ est une notion un peu moins souple que celle de négation verbale : elle est l'*exact* opposé de la proposition de départ, est vraie dans *tous* les cas dans lesquels $\mathcal{P}$ est fausse, et est fausse dans *tous* les cas dans lesquels $\mathcal{P}$ est vraie.

La table de vérité de non$\mathcal{P}$ est la suivante :

$\mathcal{P}$	non$\mathcal{P}$
V	F
F	V

Exemple. La négation de la proposition

$$\mathcal{P} \;:\; \text{« le chat est blanc »}$$

est

$$\text{non}\mathcal{P} \;:\; \text{« le chat n'est pas blanc ».}$$

La proposition non$\mathcal{P}$ doit englober *tous* les cas dans lesquels $\mathcal{P}$ n'est pas vraie : il ne s'agit donc pas de la proposition « le chat est noir ».

Exemple. Si x est un réel fixé, la négation de la proposition

$$\mathcal{P} \;:\; \text{«}\, x \geqslant 0 \,\text{»}$$

est

$$\text{non}\mathcal{P} \;:\; \text{«}\, x < 0 \,\text{».}$$

Notons que la négation de $\mathcal{P}$ n'est pas « $x \leqslant 0$ » car cette dernière proposition et $\mathcal{P}$ sont vraies simultanément dans le cas où $x = 0$.

Il est intuitivement clair qu'une proposition est la négation de sa propre négation :

Proposition 9. Pour toute proposition $\mathcal{P}$, on a $\text{non}(\text{non}\mathcal{P}) \Leftrightarrow \mathcal{P}$.

Démontrez cette proposition en écrivant les tables de vérité des propositions $\mathcal{P}$ et non(non$\mathcal{P}$) !

La négation interagit avec les connecteurs « et » et « ou » de façon remarquable :

Proposition 10 (Lois de De Morgan)**.** Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux propositions, alors

$$\text{non}(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \iff (\text{non}\mathcal{P} \text{ et non}\mathcal{Q})$$

et

$$\text{non}(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \iff (\text{non}\mathcal{P} \text{ ou non}\mathcal{Q})$$

Les logiciens britanniques Augustus De Morgan (1806–1871) et George Boole (1815–1864) sont considérés comme les fondateurs de la logique moderne, qui est la base du formalisme mathématique actuel ainsi que de l'informatique fondamentale.

Il suffit d'étudier l'exemple ci-après pour se convaincre du bien-fondé des lois de De Morgan :

> **Exemple.** La négation de la proposition « il fera beau demain **et** j'aime les oranges » est « il ne fera pas beau demain **ou** je n'aime pas les oranges (ou les deux à la fois) ».
>
> Si n est un entier naturel, la négation de la proposition « n est pair **ou** $n = 3$ » est « n est impair **et** $n \neq 3$ ».
>
> Si x est un réel, la négation de la proposition « x est un entier pair », qui est à comprendre comme « x est un entier **et** x est pair », est « x n'est pas entier **ou** x n'est pas pair ».

> **Exemple.** Si x est un réel, la négation de « $1 < x \leqslant 5$ », qui signifie « $1 < x$ **et** $x \leqslant 5$ », est « $x \leqslant 1$ **ou** $x > 5$ ».

1.2 Quantificateurs

On introduit à présent deux outils incontournables de la logique mathématique.

Le *quantificateur universel* $\forall$ est la traduction formelle de l'expression « pour tout » (ou « quel que soit »), et se lit donc ainsi à l'oral. Au sein d'une proposition formelle, il sert à exprimer le fait que tous les objets appartenant à un ensemble vérifient une certaine propriété, que l'on énonce par convention après une virgule. Par exemple, la proposition

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$$

se lit « Pour tout x dans $\mathbb{R}$, x^2 est supérieur ou égal à 0 ».

Le *quantificateur existentiel* $\exists$ est la traduction formelle de l'expression « il existe », dans le sens « il existe au moins ». Au sein d'une proposition formelle, il sert à exprimer le fait qu'il existe au moins un objet dans un ensemble donné qui vérifie une certaine propriété, que l'on énonce cette fois après un double point (« : »), qui se lit « tel que ». Par exemple, la proposition

$$\exists\, x \in \mathbb{R} : x^2 = 5$$

se lit « Il existe x dans $\mathbb{R}$ tel que $x^2 = 5$ ».

Le symbole $\forall$ est un renversement de la lettre A, initiale du mot allemand *alle* signifiant « tout ». On doit son introduction au mathématicien et logicien allemand Gehrard Gentzen en 1933.

Le symbole $\exists$, introduit par le mathématicien italien Giuseppe Peano en 1897, est un renversement de la lettre E, initiale du terme « existe » dans la plupart des langues dans lesquelles Peano écrivait.

Dans certains cours et certains énoncés d'exercices, l'expression « tel que » est notée par une barre verticale :

$$\exists x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 5.$$

Pour signifier qu'il existe *un unique* objet vérifiant une propriété donnée, on utilise le quantificateur existentiel modifié $\exists!$, avec la même syntaxe que $\exists$. Par exemple, la proposition

$$\exists! x \in \mathbb{R} : x^3 = 8$$

se lit « il existe un unique x dans $\mathbb{R}$ tel que $x^3 = 8$ ».

On rencontre fréquemment des propositions mathématiques formelles utilisant à plusieurs reprises les quantificateurs, comme dans l'exemple suivant :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in]a, +\infty[, \exists x \in \mathbb{Q} : a < x < b,$$

qui se lit « pour tout a dans $\mathbb{R}$ et pour tout b dans $]a, +\infty[$, il existe un x dans $\mathbb{Q}$ tel que a soit strictement inférieur à x et tel que x soit strictement inférieur à b ».

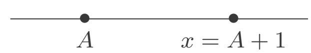
Cette proposition est vraie : entre deux réels distincts, on peut toujours trouver un rationnel. Nous en reparlerons dans le chapitre 3.

L'ordre d'apparition des quantificateurs dans une proposition formelle est important : les inverser peut changer le sens (et la valeur de vérité) de la proposition.

Exemple. Les propositions

$$(\forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : x > A) \quad \text{et} \quad (\exists x \in \mathbb{R} : \forall A \in \mathbb{R}, x > A)$$

n'ont pas du tout le même sens – d'ailleurs, la première est vraie et la deuxième est fausse ! Dans la première proposition, l'élément x peut dépendre de A (il suffit par exemple de prendre $x = A + 1$), ce qui n'est pas le cas dans la deuxième (il faudrait que x soit strictement plus grand que *tous* les A de $\mathbb{R}$, ce qui est impossible, par exemple si $A = x$).



La proposition est vraie si x est introduit *après* A et peut dépendre de A.

Certaines permutations entre quantificateurs sont toutefois possibles :

Le bon sens suffit généralement à déterminer quelles permutations sont possibles ou non. Retenons toutefois que la permutation des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ est en général illicite.

Exemple. Les propositions

$$(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \; nx^2 \geqslant 0) \quad \text{et} \quad (\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \; nx^2 \geqslant 0)$$

sont équivalentes.

Les lois de De Morgan se généralisent de la façon suivante :

Proposition 11 (Lois de De Morgan et quantificateurs).
Soit E un ensemble.

- La négation de la proposition « pour tout $x \in E$, la propriété $\mathcal{P}(x)$ est vraie » est « il existe $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est fausse » :

$$\text{non}\,(\forall x \in E,\, \mathcal{P}(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x \in E \,:\, \text{non}\mathcal{P}(x).$$

- La négation de la proposition « il existe $x \in E$ tel que x vérifie la propriété $\mathcal{P}(x)$ » est « pour tout $x \in E$, $\mathcal{P}(x)$ est fausse » :

$$\text{non}\,(\exists x \in E \,:\, \mathcal{P}(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in E, \quad \text{non}\mathcal{P}(x).$$

On retiendra que le passage à la négation transforme respectivement les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ en $\exists$ et $\forall$.

Exemple. Soit E un ensemble de réels. La négation de la proposition

$$\forall x \in E,\, x \geqslant 0 \quad \text{est} \quad \exists x \in E \,:\, x < 0.$$

La négation de la proposition

$$\exists x \in E \,:\, x^2 = 1 \quad \text{est} \quad \forall x \in E,\, x^2 \neq 1.$$

Ce procédé permet de donner la négation de propositions utilisant des quantificateurs de façon arbitrairement complexe :

Pour déterminer la négation d'une proposition formelle écrite avec des quantificateurs, on transforme $\forall$ en $\exists$ et les $\exists$ en $\forall$, et on écrit la négation de la dernière partie de la proposition.

Exemple. La négation de la proposition

$$\forall x \in \mathbb{R},\, \exists y \in \mathbb{Z} : \forall z \in \mathbb{R},\, x + y = z$$

est

$$\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{Z},\, \exists\, z \in \mathbb{R} : x + y \neq z.$$

Même si ce n'est pas le sujet qui nous occupe, remarquons que la proposition de départ est fausse : pour x et y fixés, il suffit de prendre $z = x + y + 1$ pour avoir $x + y \neq z$.

Notons que seule la *dernière* partie de la proposition doit être niée lors du passage à la négation : les relations intermédiaires permettant de localiser les différentes variables, quant à elles, restent inchangées.

> **Exemple.** La négation de la proposition
>
> $$\forall x \in \mathbb{R}\,, \exists y > x \ : \ y < x^2 + 1$$
>
> est
>
> $$\exists x \in \mathbb{R} \ : \ \forall y > x\,, \ y \geqslant x^2 + 1$$
>
> et non
>
> $$\exists x \in \mathbb{R} \ : \ \forall y \leqslant x\,, \ y \geqslant x^2 + 1$$

Les lecteurs courageux pourront montrer que la proposition de départ est vraie en distinguant les cas $x \leqslant 0$ et $x > 0$, et en considérant $y = 2x$ dans le deuxième cas.

Une conséquence importante de la proposition 11 est que pour réfuter une proposition du type « pour tout x, $\mathcal{P}(x)$ est vraie », il n'est pas nécessaire (ni, généralement, possible !) de montrer que pour tout x, $\mathcal{P}(x)$ est fausse, mais il suffit d'exhiber *un* contre-exemple, c'est-à-dire un x tel que $\mathcal{P}(x)$ soit fausse.

> **Exemple.** La proposition
>
> $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + (x-1)^2 > 1$$
>
> est fausse car si $x = 0$, le nombre $x^2 + (x-1)^2 = 1$ n'est pas strictement supérieur à 1.

1.3 Quelques grands types de raisonnement

Une fois ces quelques définitions de logique fixées, on peut définir la notion de raisonnement mathématique : il s'agit d'une forme de discours suivant des règles bien définies et que l'on reconnaît comme valide pour établir la véracité de certaines propositions. Passons à présent en revue les formes de raisonnement les plus communes en mathématiques.

1.3.1 Le raisonnement déductif

Au début de la section précédente, nous précisions qu'écrire une implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ n'affirme ni ne démontre en aucune façon que la proposition $\mathcal{P}$ ou la proposition $\mathcal{Q}$ est vraie. En revanche, affirmer à la fois que $\mathcal{P}$ est vraie et que l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vérifiée permet bien de déduire que $\mathcal{Q}$ est vraie : c'est le fondement du raisonnement dit *déductif*.