MATHS

BCPST 1

Marc-Aurèle Massard

MATHS
BCPST 1

TOUT-EN-UN

2e édition

l'intégrale

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

La précédente édition (2021) est parue dans la collection
Parcours Prépas de la marque Ediscience.
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-085327-4

Table des matières

4 Algèbre linéaire

5 Analyse réelle

Annexes

Des vidéos pour vous aider à réussir en prépa

Pour réussir vos concours, vous devrez mettre en œuvre des compétences disciplinaires ***(hard skills)***, mais aussi des ***soft skills***, ces compétences transversales qui vous permettront de tenir le bon rythme. Dunod vous offre six vidéos pour vous préparer à réussir dès la première année et faire la différence le jour J par la maîtrise de votre énergie (physique, émotionnelle, mentale), par l'entretien de votre motivation et par vos méthodes de travail.

*Tout d'abord deux vidéos méthodologiques d'**Alexis Brès**. Professeur agrégé de physique-chimie en MP2I (lycée Hoche, Versailles), il est aussi correcteur et concepteur de sujets pour la banque du concours e3a-Polytech ; ancien correcteur du concours d'entrée aux ENS. Auteur de L'Oral de physique aux concours des ENS et de Polytechnique (Dunod).*

http://dunod.link/jvy7mqd

Vidéo 1 : Apprendre à apprendre Comment mobiliser efficacement son cours ?

Comment apprendre un cours ? Comment savoir si on l'a vraiment compris ? Comment le mobiliser dans les TD et dans les épreuves ? Comment créer du lien entre les connaissances pour se forger une intuition de la solution et gagner un temps précieux ? Autant de questions-réponses abordées dans cette vidéo. Une méthodologie particulièrement adaptée à l'apprentissage des cours de physique, de mathématiques ou de sciences industrielles.

http://dunod.link/z0psk69

Vidéo 2 : Écrit, oral : aborder sereinement la résolution d'un problème

Si les exigences d'un sujet d'écrit et d'un oral peuvent sembler assez différentes, il existe des techniques communes pour aborder ces épreuves sans stress. Cette vidéo fournit :

- des techniques pour apprivoiser la résolution d'un problème de physique : modalités de décryptage du sujet et de mobilisation du cours ;
- des recommandations sur le fond et la forme pour gagner la confiance des correcteurs ;
- des tactiques cohérentes pour gagner des points ;
- des points de vigilance concernant la préparation des khôlles et des oraux.

*Ensuite quatre vidéos « soft skills » pour aborder la prépa comme le ferait un sportif de haut niveau. Ces vidéos ont été conçues par **Stéphane Fassetta**, fondateur de Syprium, coach professionnel, préparateur mental de sportifs de haut niveau, professeur d'aïkido. Auteur de Nos 8 profils énergétiques (InterÉditions).*

http://dunod.link/80x2gwu

Vidéo 3 : Les cinq piliers de l'énergie, ou comment réussir le marathon de la prépa ?

La prépa, c'est un peu comme le sport de haut niveau : plus le temps passe, plus le niveau ou les contraintes augmentent. Maîtriser son énergie, c'est donc faire un usage optimum de ses ressources pour tenir le rythme des deux années, s'adapter à la diversité des situations et réussir ses épreuves. Cette vidéo présente les dimensions de notre énergie et les cinq piliers pour l'entretenir. La capacité à se ressourcer sur ces cinq piliers est une compétence à développer dès votre arrivée en prépa.

http://dunod.link/sicy8u3

Vidéo 4 : Gérer efficacement son temps en prépa

En prépa, on manque toujours de temps. L'enjeu est donc de gérer efficacement cette ressource pour atteindre les objectifs de vos différentes échéances.

Cette vidéo fournit des repères pour :

- trouver sa propre organisation personnelle : techniques de planification, objectifs SMART... ;
- développer sa capacité d'attention, essentielle à la compréhension, à la mémorisation, à la gestion de la charge mentale et à votre avancement ;
- connaître ses propres biorythmes pour un apprentissage efficient, en capitalisant sur les acquis de la chronobiologie.

http://dunod.link/p5maym6

Vidéo 5 : Gérer son stress et développer la confiance en soi pour les concours

Comme dans le sport de haut niveau, la préparation d'un concours soumet votre énergie à rude épreuve. Si une certaine pression est stimulante pour doper ses performances, l'installation dans un stress chronique compromet à la fois votre santé et vos chances de réussite.

Cette vidéo permet :

- d'identifier les sources externes et internes de son propre stress ;
- de comprendre le rôle du stress comme mécanisme naturel d'adaptation de l'organisme face à une situation déstabilisante et/ou à fort enjeu ;
- d'apprendre à reconnaître certains symptômes physiques, émotionnels ou cognitifs du stress pour prévenir l'épuisement ;
- de connaître les possibilités de régulation physique et mentale du stress ;
- d'entretenir passionnément sa motivation pour préserver durablement la confiance en soi, quelles que soient vos contre-performances.

http://dunod.link/vncd3c5

Vidéo 6 : Techniques respiratoires et de préparation mentale pour préparer les concours

La capacité à se relaxer ou à récupérer quand il le faut est essentielle pour tenir le rythme de préparation d'un concours.

Grâce à cette vidéo :

- vous saurez mettre en œuvre différentes techniques respiratoires adaptées à la récupération et à la dynamisation ;
- vous disposerez de deux techniques de préparation mentale pour conserver un état d'esprit positif, limiter votre niveau de stress et améliorer vos capacités d'attention.

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux élèves de première année de la filière BCPST. Il recouvre l'intégralité du programme 2021.

Ce livre ne se veut en aucun cas être un cours tout prêt ni se substituer au professeur. Il doit plutôt être vu comme un complément permettant de revoir les notions et méthodes abordées en cours avec un point de vue potentiellement différent.

Il est divisé en cinq parties thématiques et vingt-quatre chapitres. Il commence par une brève introduction exposant quelques règles de rédaction mathématique. Puis les douze premiers chapitres portent sur le programme du premier semestre et les douze autres sur le programme du second semestre (à l'exception du chapitre sur les suites qui navigue entre les deux).

Chaque chapitre se décompose en cinq parties :

- **L'essentiel du cours**, rappelant les points les plus importants du cours et permettant à l'élève de vérifier qu'il connaît bien les hypothèses exactes des résultats utilisés.
- **Les méthodes à maîtriser**, exposant quelques méthodes classiques illustrées d'exemples.
- **L'interro de cours**, regroupant des questions d'application directe du cours (Vrai/Faux, QCM, citation d'un résultat du cours ou petit exercice).
- **Les exercices**, regroupant des exercices classés par ordre de difficulté globalement croissant et séparés en deux parties :
  - « *Pour s'entraîner* » comprenant des exercices couvrant les différents points du chapitre.
  - « *Pour aller plus loin* » comprenant des exercices d'approfondissement.
- **La correction**, regroupant le corrigé détaillé de l'interro de cours et de tous les exercices du chapitre.

Tout au long de l'ouvrage, les symboles suivants ont été utilisés :

pour ajouter quelques remarques aux résultats et méthodes cités

pour signaler un piège ou une erreur à éviter

pour donner quelques conseils concernant la rédaction

pour exposer un programme en Python associé à un résultat du cours ou à une méthode.

En tant qu'auteur, je me permets de souligner mon intérêt pour toute remarque des lecteurs de ce livre, étudiants ou enseignants. C'est grâce à ces retours que cet ouvrage pourra converger rapidement vers une forme définitive répondant pleinement aux exigences des élèves de classes préparatoires.

Je termine en remerciant A. Lalauze, M. Marouby et J.-M. Monier pour leurs relectures avisées, leurs remarques et leurs suggestions sur une grande partie de cet ouvrage.

Pour bien commencer

Le but de cette introduction est de donner des conseils pour prendre de bonnes habitudes de rédaction dès le début de l'année.

Méthode 0.1 : Bien définir ses objets

Dans la rédaction d'un raisonnement, avant d'utiliser un objet, il convient de le définir. Sinon, une personne lisant votre raisonnement pourrait ne pas le comprendre. A priori, x n'est pas forcément un réel, n pas forcément un entier, f pas forcément une fonction (même si ces noms sont très courants pour chacun de ces objets).
On peut, par exemple, définir un objet (ici un réel x) par « soit $x \in \mathbb{R}$ » lorsque l'on veut définir un objet quelconque ou bien par « on pose $x = \dots$ » lorsque l'on veut définir un objet en particulier ou encore par « on dispose de $x \in \mathbb{R}$ tel que $\dots$ » si un résultat préalable nous a justifié l'existence de cet objet.

Exemple d'application

Un élève a voulu utiliser le fait que toute suite croissante majorée converge de la façon suivante :

« Pour tout n, on a $a_{n+1} - a_n \geq 0$ et $a_n \leq M$. Donc $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. »

Compléter ce raisonnement pour définir correctement les objets utilisés.

Correction :

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et M un réel. Pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} - a_n \geq 0$ et $a_n \leq M$. Donc, on dispose d'un réel ℓ tel que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Méthode 0.2 : Prêter attention aux hypothèses d'un théorème

Il convient de bien regarder (et de bien connaître) les hypothèses d'un théorème avant de l'utiliser. On ne peut rien conclure tant que **toutes** les hypothèses ne sont pas remplies.
Par exemple, le théorème reliant signe de la dérivée d'une fonction et monotonie ne s'applique que sur un intervalle.

Exemple d'application

Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

(1) Le carré d'un nombre est positif.
(2) Deux nombres réels et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.
(3) Si la dérivée d'une fonction est nulle sur I, cette fonction est constante sur I.
(4) Une fonction dont la dérivée s'annule peut être strictement monotone.

Correction :

(1) **Faux.** Le carré d'un nombre réel est positif mais le carré d'un complexe, pas forcément.
(2) **Faux.** Il faut que les deux réels soient positifs pour que ce résultat soit vrai. Par exemple, on a $(-1)^2 > 0^2$ alors que $-1 < 0$.

(3) **Faux.** Comme expliqué dans la méthode, il faut que I soit un intervalle pour que le résultat soit vrai. Par exemple, on prend $I = [0,1] \cup [2,3]$ et f la fonction définie sur I par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 2 & \text{si } x \in [2,3] \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas constante car $f(0) \neq f(2)$ mais sa dérivée est nulle sur $[0,1]$ et sur $[2,3]$. La dérivée f' est donc nulle sur I sans que f soit constante sur I.

(4) **Vrai.** La courbe d'une fonction strictement monotone peut avoir une tangente horizontale (comme celle de la fonction $x \mapsto x^3$ en 0 par exemple).

Méthode 0.3 : Vérifier le bien-fondé des opérations à utiliser

Lors d'un raisonnement, avant de faire une opération, il faut bien vérifier que l'on peut la faire. On évitera typiquement de diviser par 0, de prendre la racine carrée d'un nombre négatif (ou d'un nombre complexe), de dériver une fonction si on ne sait pas qu'elle est dérivable, etc. A chaque fois qu'il y a besoin, on précise pourquoi on peut effectuer cette opération.

Exemple d'application

Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant :

« Soient a et b deux réels non nuls tels que $a = b$. On a donc

$$a^2 = ab \quad \text{donc} \quad a^2 - b^2 = ab - b^2 \quad \text{et} \quad (a-b)(a+b) = (a-b)b \quad \text{ainsi} \quad a + b = b$$

Vu que $a = b$, on en déduit que $2b = b$ puis que $2 = 1$ en divisant par b. »

Correction :

L'erreur réside au moment où on passe de $(a-b)(a+b) = (a-b)b$ à $a+b = b$. En effet, à ce moment-là, on a divisé par $a - b$ sans vérifier si on pouvait. Or, comme $a = b$ on a $a - b = 0$. Il n'est donc pas possible d'effectuer cette opération.

Méthode 0.4 : Faire attention au type des objets manipulés

En mathématiques, on manipule différents types d'objets : des ensembles, des fonctions, des nombres (entiers, réels, complexes), des vecteurs, des suites, etc. Il ne faut pas les confondre. Un élément peut appartenir à un ensemble, pas à un nombre. On peut comparer deux nombres réels (avec $\leq$), pas deux nombres complexes. On peut dire qu'une suite est croissante, pas un nombre. On peut dériver une fonction dérivable, pas un réel.

Exemple d'application

Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

(1) La fonction $\dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
(2) cos, sin et exp sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
(3) $\forall z \in \mathbb{C}, z^2 \geq 0$.
(4) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^x$. Cette fonction est dérivable et, si $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \left(x^2\right)' \times e^x + x^2 \times (e^x)' = 2xe^x + x^2 e^x = (2x + x^2)e^x$$

Correction :

(1) **Faux.** $\dfrac{1}{x}$ n'est pas une fonction, c'est un nombre. On peut corriger en « la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ ».
(2) **Vrai.** Il s'agit de trois fonctions, qui sont effectivement dérivables sur $\mathbb{R}$.
(3) **Faux.** Il n'y a pas de relation d'ordre (avec $\leq$) sur les nombres complexes.
(4) **Faux.** Même si le résultat obtenu pour $f'(x)$ est juste au final, il y a une erreur de rédaction dans le calcul de $f'(x)$. En effet, $\left(x^2\right)'$ et $(e^x)'$ n'ont pas de sens car x^2 et e^x sont des réels et non pas des fonctions, on ne peut donc pas les dériver. Pour la rédaction, il conviendrait donc de simplement sauter l'étape de calcul faisant intervenir ces expressions erronées. Dans le cas d'un calcul plus compliqué, on donnera des noms aux sous-fonctions que l'on veut dériver lors de ce calcul.

Dans d'autres matières scientifiques, comme la physique, les notations sont utilisées de manière un peu moins rigoureuse et il peut arriver de tolérer les écritures du type $(e^x)'$. Mais ces libertés ne doivent pas se retrouver en mathématiques.

Méthode 0.5 : Différencier implication et équivalence

Lors d'un raisonnement dans lequel on part des hypothèses A pour montrer une conclusion B, on montre que $A \Rightarrow B$. Mais on n'a pas nécessairement $A \Leftrightarrow B$, on ne peut pas forcément remonter toutes les implications effectuées lors de notre démonstration. C'est pour cela qu'il est toujours dangereux dans un calcul de partir de ce que l'on veut montrer pour finir par arriver à quelque chose de vrai, parce que cela ne montre rien et on n'a pas forcément équivalence. Dans ce cas, il convient de faire ce raisonnement au brouillon et de le rédiger dans le bon sens au propre (c'est-à-dire partir de ce que l'on sait pour arriver à ce que l'on veut) pour être sûr que le raisonnement ne soit pas erroné.

Exemple d'application

Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant :

« On considère l'équation $x^2 + x + 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Si x est solution, on a

$$x^3 + x^2 + x = 0 \quad \text{puis} \quad x^3 = -x^2 - x = 1$$

D'où $x = 1$ (c' est la seule solution réelle de $x^3 = 1$). Pourtant $1^2 + 1 + 1 \neq 0$. »

Correction :

Ce qui a été montré dans ce raisonnement c'est que si x est une solution réelle de l'équation, alors $x = 1$. Mais il ne s'agit en aucun cas d'une équivalence. On n'a pas montré que si $x = 1$, alors x est solution de l'équation. Ce que montre finalement le raisonnement en entier est que la seule potentielle solution réelle est 1 et qu'elle n'est pas solution : cette équation n'a donc aucune solution réelle (ce qui se retrouve en calculant le discriminant du trinôme).

Dans une résolution d'équation, à moins d'avoir justifié au fur et à mesure du calcul qu'il y avait équivalence du début à la fin, il conviendra de vérifier que les valeurs trouvées sont bien solutions de l'équation.

Méthode 0.6 : Raisonner en français

Une succession d'égalités ou d'inégalités ne constitue pas un raisonnement mathématique. Il faut y mettre des mots pour savoir comment tout cela s'articule et qu'une autre personne que son auteur puisse suivre le même raisonnement.
Pour commencer à écrire un résultat, que l'on a supposé comme hypothèse ou que l'on veut montrer, on peut l'introduire par « on a » dans le premier cas et « on veut montrer que » dans le second cas.
Au sein d'un raisonnement pour passer d'un résultat à un autre, il ne peut y avoir qu'une implication (que l'on pourra traduire par « donc », « alors, », « ainsi », « d'où », etc.) ou il peut y avoir équivalence entre ces deux résultats (que l'on pourra traduire par « si et seulement si », « c'est-à-dire », « i.e. », etc).

Exemple d'application

Un élève a produit le raisonnement suivant pour encadrer $\boldsymbol{\frac{x}{y}}$ avec $\boldsymbol{x \in [-1, 2]}$ et $\boldsymbol{y \in [1, 2]}$. Rédiger correctement ce raisonnement :

«

- $0 \leq x \leq 2$, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1$, $0 \leq \frac{x}{y} \leq 2$.
- $-1 \leq x \leq 0$, $0 \leq -x \leq 1$, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1$, $0 \leq -\frac{x}{y} \leq 1$, $-1 \leq \frac{x}{y} \leq 0$.

$-1 \leq \frac{x}{y} \leq 2$.

»

Correction :

On souhaite encadrer $\frac{x}{y}$. On va distinguer deux cas, en fonction du signe de x :

- Si $0 \leq x \leq 2$, comme $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1$, on déduit par produit de facteurs positifs que $0 \leq \frac{x}{y} \leq 2$.
- Si $-1 \leq x \leq 0$, on a $0 \leq -x \leq 1$. De plus $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1$. Donc, par produit de facteurs positifs, on obtient $0 \leq -\frac{x}{y} \leq 1$, puis $-1 \leq \frac{x}{y} \leq 0$.

Ainsi, on a donc montré que $-1 \leq \frac{x}{y} \leq 2$.

- Les symboles $\Leftrightarrow$ et $\Rightarrow$ sont à proscrire dans la rédaction d'un raisonnement. On peut éventuellement les utiliser dans la résolution d'une équation/inéquation ou d'un système d'équations.
- Le terme « i.e. » est une abréviation du latin *id est* (qui se traduit littéralement par « ce qui est » et qui a la même signification que « c'est-à-dire »). Cette locution est souvent utilisée en mathématiques.

CHAPITRE

Raisonnements, ensembles et applications 1

L'essentiel du cours

1 Bases de la logique

Définition

Une **assertion** est une phrase plus ou moins complexe qui est soit vraie, soit fausse. On peut opérer sur des assertions de la façon suivante, où P et Q sont deux assertions :

- **Négation** : non P est aussi une assertion qui est vraie si et seulement si P est fausse. On peut aussi noter $\overline{P}$.
- **Conjonction** : P et Q est une assertion qui est vraie si et seulement si P est vraie et Q est vraie. On peut aussi noter $P \wedge Q$.
- **Disjonction** : P ou Q est une assertion qui est vraie si et seulement si P est vraie ou Q est vraie (ou les deux en même temps). On peut aussi noter $P \vee Q$.

Définition

Si P et Q sont deux assertions, on note :

- $\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$, l'assertion (non P) ou Q (qui se lit « P implique Q »)
- $\boldsymbol{P \Leftrightarrow Q}$, l'assertion $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ (qui se lit « P équivaut à Q »).

- Si $P \Rightarrow Q$, on dit que P est une **condition suffisante** pour Q (en effet, il suffit que P soit vraie pour que Q soit vraie). On dit aussi que Q est une **condition nécessaire** pour P (en effet, pour que P soit vraie, il est nécessaire que Q soit vraie).
- Si $P \Leftrightarrow Q$, on dit P est une **condition nécessaire et suffisante** pour Q (on abrège souvent par CNS).

Contraposée

Si P et Q sont deux assertions, alors $P \Rightarrow Q$ est équivalente à (non Q) $\Rightarrow$ (non P). On appelle cette deuxième assertion la **contraposée** de $P \Rightarrow Q$.

Ne pas confondre la contraposée avec $Q \Rightarrow P$, qui est la **réciproque** de $P \Rightarrow Q$.

Négation des connecteurs logiques

Si P et Q sont deux assertions, alors :
- non (non P) est équivalente à P
- non (P et Q) est équivalente à (non P) ou (non Q)
- non (P ou Q) est équivalente à (non P) et (non Q)
- non ($P \Rightarrow Q$) est équivalente à P et (non Q).

La négation d'une implication n'est pas une implication.

Distributivité du « et » et du « ou »

Si P, Q et R sont trois assertions, alors :
- l'assertion P et (Q ou R) est équivalente à (P et Q) ou (P et R)
- l'assertion P ou (Q et R) est équivalente à (P ou Q) et (P ou R).

Définition

Si E est un ensemble et $P(x)$ une assertion comportant une variable x, on définit alors les assertions suivantes :
- $\boldsymbol{\forall x \in E,\ P(x)}$ est vraie si et seulement si $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de E (qui se lit « pour tout x appartenant à E, $P(x)$ »)
- $\boldsymbol{\exists x \in E,\ P(x)}$ est vraie si et seulement si $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E (qui se lit « il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ »)
- $\boldsymbol{\exists! x \in E,\ P(x)}$ est vraie si et seulement si $P(x)$ est vraie pour exactement un élément x de E (qui se lit « il existe un unique x appartenant à E tel que $P(x)$ »).

Chacune des trois assertions précédentes ne dépend plus de x. On dit alors que x est une variable muette.

- L'usage des quantificateurs hors des énoncés mathématiques est à proscrire. Ils ne doivent donc pas apparaître comme abréviation dans la rédaction d'un raisonnement.
- On ne peut pas intervertir les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ dans une assertion. L'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ y < x$$

signifie que pour tout réel x on peut trouver un réel y, **qui peut dépendre de $\boldsymbol{x}$**, qui soit strictement inférieur à x. Cette assertion est clairement vraie (il suffit de prendre $y = x - 1$). Alors que l'assertion

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ y < x$$

signifie qu'il existe un réel y, **ne dépendant pas de $\boldsymbol{x}$** (x n'a pas encore été introduit lorsqu'on introduit y), qui soit strictement inférieur à tous les réels x. Cela reviendrait donc à dire que $\mathbb{R}$ est minoré, ce qui est clairement faux.

Négation des quantificateurs

Si E est un ensemble et $P(x)$ une assertion comportant une variable x, alors
- non $(\forall x \in E,\ P(x))$ est équivalente à $\exists x \in E$, non $(P(x))$
- non $(\exists x \in E,\ P(x))$ est équivalente à $\forall x \in E$, non $(P(x))$.

En ajoutant à ces deux règles, les règles de négation des connecteurs logiques, on est maintenant à même de nier n'importe quelle assertion.

Assertion	Négation
P ou Q	(non P) et (non Q)
P et Q	(non P) ou (non Q)
$P \Rightarrow Q$	P et (non Q)
$\forall x \in E, P(x)$	$\exists x \in E,$ (non $P(x)$)
$\exists x \in E, P(x)$	$\forall x \in E,$ (non $P(x)$)

2 Ensembles

Définition

Si E et F sont deux ensembles, on dit que F est **inclus** dans E (ou que F est un **sous-ensemble** de E ou encore que F est une **partie** de E), que l'on note $F \subset E$, si tous les éléments de F sont aussi dans E, autrement dit :

$$\forall x \in F,\ x \in E$$

On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Les éléments de $\mathscr{P}(E)$ sont des ensembles.

Double inclusion

Si E et F sont deux ensembles, alors

$$E = F \Leftrightarrow (E \subset F \text{ et } F \subset E).$$

Définition

Si E est un ensemble et $P(x)$ une assertion comportant une variable x, on définit un ensemble contenant les éléments x de E vérifiant la propriété $P(x)$. On note cet ensemble

$$\{x \in E \ /\ P(x)\}.$$

Cet ensemble peut aussi être noté $\{x \in E\ ;\ P(x)\}$.

Définition

- Si E et F sont deux ensembles, on appelle **couple** de E et F tout élément de la forme (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. On appelle **produit cartésien** de E et F, noté $E \times F$, l'ensemble des couples de E et F.
- Si n est un entier naturel non nul et $E_1, \ldots, E_n$ sont des ensembles, on appelle n-**uplet** de $E_1, \ldots, E_n$ tout élément de la forme $(x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_i \in E_i$ pour tout entier $1 \leq i \leq n$. On appelle produit cartésien de $E_1, \ldots, E_n$, noté $E_1 \times \cdots \times E_n$, l'ensemble des n-uplets de $E_1, \ldots, E_n$.

Si $E_1 = \cdots = E_n = E$, on simplifie la notation par $E_1 \times \cdots \times E_n = E^n$. Dans ce cas, on dit qu'un élément de E^n est une n-**liste** d'éléments de E.

Définition

Si E est un ensemble et A et B sont des parties de E, alors :

- le **complémentaire** de A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A :
$$\overline{A} = \{x \in E \ / \ x \notin A\}$$
- la **différence** de A et B, noté $A \backslash B$ et qui se lit « A privé de B », est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B :
$$A \backslash B = \{x \in A \ / \ x \notin B\}$$
- l'**intersection** de A et B, noté $A \cap B$, est l'ensemble des éléments appartenant à la fois aux deux ensembles A et B :
$$A \cap B = \{x \in E \ / \ x \in A \text{ et } x \in B\}$$
- l'**union** de A et B, noté $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à au moins un des deux ensembles A et B :
$$A \cup B = \{x \in E \ / \ x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Complémentaire et opérations

Si E est un ensemble et A et B sont deux parties de E, alors
$$\overline{\overline{A}} = A, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \text{et} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Distributivité de l'intersection et de l'union

Si E est un ensemble et A, B et C sont trois parties de E, alors
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad \text{et} \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Toutes ces propriétés reviennent à traduire les propriétés sur le « non », le « ou » et le « et » vues plus tôt.

■ 3 Méthodes de raisonnement

En mathématiques, il existe principalement 5 types de méthode de démonstration :

- la preuve directe : on part de ce que l'on sait pour montrer le résultat recherché
- la preuve par contraposée
- la preuve par l'absurde
- la preuve par récurrence
- la preuve par analyse - synthèse.

Les notions de ces différents types de raisonnements, mis à part la preuve directe, sont présentés ci-dessous. Leur mise en œuvre sera faite dans la partie « Les méthodes à maîtriser ».

Contraposée

Soient P et Q deux assertions. Les assertions « $P \Rightarrow Q$ » et « (non Q) $\Rightarrow$ (non P) » sont équivalentes.
L'assertion « (non Q) $\Rightarrow$ (non P) » est la **contraposée** de l'assertion « $P \Rightarrow Q$ ».

Cela revient à dire que « la cause implique la conséquence » est la même chose que « l'absence de conséquence implique l'absence de cause ».

Absurde

Soit P une assertion. Si non P implique un résultat faux (on parle d'une absurdité), alors l'assertion P est vraie.

Ce principe un peu curieux au départ est en fait fréquemment utilisé hors des mathématiques. Un exemple simple, dans un jeu de Sudoku, lorsqu'on hésite entre deux valeurs pour une case, on suppose l'une des deux valeurs comme étant la bonne. Si on arrive à une contradiction dans la suite de la résolution de la grille, c'est que notre supposition initiale n'était pas la bonne, c'était donc l'autre valeur qui était bonne.

Principe de récurrence simple

Soit $P(n)$ une assertion dépendant d'un entier naturel n. Si $P(0)$ est vraie et si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

alors $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$.

- Ce principe de récurrence se découpe en deux parties : l'**initialisation** qui consiste à montrer que $P(0)$ est vraie ; l'**hérédité** qui consiste à montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1).$$
- Si on veut juste montrer que $P(n)$ est vraie pour $n \geq n_0$, il suffit d'initialiser avec $P(n_0)$.
- Si on se rend compte qu'on n'utilise pas le fait que $P(n)$ est vraie pour montrer que $P(n+1)$ est vraie, il ne sert à rien de faire une récurrence. Un raisonnement classique suffit alors.
- Avant de se lancer dans une récurrence il faut toujours réfléchir à comment montrer l'hérédité (l'initialisation est souvent très simple à montrer). Si on ne voit pas comment montrer l'hérédité, il vaut mieux se tourner vers une autre méthode de raisonnement.

Pour que l'assertion $P(n)$ dépende de n il ne faut surtout pas qu'elle commence (ou même comporte) « $\forall n \in \mathbb{N}$ ».

Principe de récurrence double

Soit $P(n)$ une assertion dépendant d'un entier naturel n. Si $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies et si
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (P(n) \text{ et } P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$$
alors $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$.

Principe de récurrence forte

Soit $P(n)$ une assertion dépendant d'un entier naturel n. Si $P(0)$ est vraie et si
$$\forall n \in \mathbb{N}, (\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(k)) \Rightarrow P(n+1)$$
alors $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$.

Définition

[Analyse - synthèse] L'analyse - synthèse est une façon de rédiger assez codifiée pour montrer une équivalence par double implication. Elle est appropriée quand on veut montrer que $P \Leftrightarrow Q$ sans connaître Q, quand on cherche une condition nécessaire et suffisante pour avoir P. Elle se décompose en deux phases :

- **Analyse :** on suppose P et on essaye de spécifier le plus possible les éléments apparaissant dans l'assertion P. On montre que $P \Rightarrow Q$ et on détermine Q en même temps.
- **Synthèse :** on vérifie que ce que l'on a trouvé à la fin de l synthèse réalise bien l'assertion P. On regarde si on bien $Q \Rightarrow P$.

C'est un peu ce qu'on fait quand on résout une équation sans utiliser d'équivalences et que l'on doit vérifier si les solutions trouvées sont bien solutions de l'équation.

■ 4 Applications

Définition

Une **application** est définie par son ensemble de départ E, son ensemble d'arrivée F et sa façon de transformer tout élément x de E en un unique élément de F, que l'on notera $f(x)$. On la note

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \to & F \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

On note $\mathscr{F}(E,F)$ (ou F^E) l'ensemble des applications de E dans F.

Par souci de gain de place, on peut aussi noter l'application $f : E \to F\ ,\ x \mapsto f(x)$.

Définition

- Si E est un ensemble, on appelle **application identité** de E l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Id}_E: & E & \to & E \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

- Si E est un ensemble et A une partie de E, on appelle**fonction indicatrice**fonction(s) !indicatrice de A l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{1}_A: & E & \to & F \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Définition

Si f est une application de E dans F et A est une partie de E, on appelle **image directe** de A par f l'ensemble des images par f des éléments de A, c'est-à-dire

$$f(A) = \{f(x)\ /\ x \in A\} = \{y \in F\ /\ \exists x \in A,\ y = f(x)\}$$

Définition

Si $f : E \to F$ et $g : G \to H$ sont deux applications et $f(E) \subset G$, on appelle **composée** de f par g l'application :

$$\begin{array}{rccc} g \circ f: & E & \to & H \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Définition

Si f est une application de E dans F, on dit que f est :
- **injective** si tout élément de F possède au plus un antécédent dans E par f, c'est-à-dire
$$\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$
- **surjective** si tout élément de F possède au moins un antécédent dans E par f, c'est-à-dire
$$\forall y \in F, \exists x \in E,\ y = f(x)$$
- **bijective** si tout élément de F possède exactement un antécédent dans E par f, c'est-à-dire
$$\forall y \in F, \exists ! x \in E,\ y = f(x).$$

On remarque qu'une application est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

Définition

Si $f : E \to F$ est une application bijective, on appelle **réciproque** de f (ou **bijection réciproque**), notée f^{-1}, l'application de F dans E qui à $y \in F$ associe l'unique antécédent de y par f.

Proposition

Si $f : E \to F$ est une application bijective, alors $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Théorème

Si $u : E \to F$ et $v : F \to E$ sont deux applications vérifiant $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ et $v \circ u = \mathrm{Id}_E$, alors u et v sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Proposition

- Si $f : E \to F$ est bijective, alors f^{-1} est bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
- Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Il faut bien faire attention à l'inversion d'une composée : on inverse l'ordre des applications. L'opération inverse de remplir une bouteille puis de la fermer est d'ouvrir la bouteille puis de la vider.

Les méthodes à maîtriser

Méthode 1.1 : Montrer une implication

Si l'on veut montrer $P \Rightarrow Q$, on suit le schéma suivant :
Supposons P.
Raisonnement où l'on traduit l'hypothèse P, la conclusion Q et où l'on essaye de compléter entre les deux.
Donc Q.

Exemple d'application

Montrer que le carré d'un entier pair est pair.

Soit $n \in \mathbb{Z}$ pair. On dispose de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Ainsi $n^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$ est pair.

Voir exercices **1.3** et **1.20**.

Méthode 1.2 : Raisonner par contraposée

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$, il peut être plus facile de montrer que non $Q \Rightarrow$ non P, tout particulièrement quand la négation de la conclusion (non Q) est plus simple à utiliser que l'hypothèse (P).

Exemple d'application

Montrer que si le carré d'un entier est pair, alors cet entier est pair.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On veut montrer que « n^2 pair $\Rightarrow n$ pair ». On raisonne par contraposée, supposons que n n'est pas pair, donc impair. On dispose donc de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Ainsi $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ est impair.

Voir exercice **1.3**.

Méthode 1.3 : Montrer une équivalence

A part dans des résolutions d'équations, de systèmes d'équations ou d'équivalence simple où l'on procède par équivalences successives, pour montrer que $P \Leftrightarrow Q$, on montre séparément les deux implications (on dit qu'on procède par double implication).

Exemple d'application

Montrer qu'un entier est pair si et seulement si son carré est pair.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On procède par double implication :

- On montre que n pair $\Rightarrow n^2$ pair (cf. ci-dessus).
- Réciproquement, on montre que n^2 pair $\Rightarrow n$ pair (cf. ci-dessus).

On peut donc conclure que n est pair si et seulement si n^2 est pair.

Voir exercices **1.9**, **1.16** et **1.19**.

Méthode 1.4 : Montrer un énoncé avec $\forall$

Pour montrer que $\forall x \in E,\ P(x)$, on suit le schéma suivant :
Soit $x \in E$.

Raisonnement utilisant le fait que x est dans E et aucune autre propriété sur x.

Alors $P(x)$. On a donc montré que $\forall x \in E,\ P(x)$.

Exemple d'application

Montrons que $\forall x \in [-1, 1],\ x^2 - 1 \leq 0$

Soit $x \in [-1, 1]$. On a $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Or $x - 1$ est négatif (car $x \leq 1$) et $x + 1$ est positif (car $-1 \leq x$). Alors, par produit, $x^2 - 1 \leq 0$. On a donc montré que $\forall x \in [-1, 1],\ x^2 - 1 \leq 0$.

Voir exercice **1.19**.

Méthode 1.5 : Montrer un énoncé avec $\exists$

Pour montrer que $\exists x \in E,\ P(x)$, il faut réussir à trouver un $x \in E$ tel que $P(x)$. Il convient donc de chercher cet élément par un raisonnement préliminaire ou de l'intuiter. Une fois trouvé on suit le schéma suivant :

Posons $x =$ *l'élément qu'on a trouvé.*

Raisonnement en utilisant ce x.

Alors $P(x)$. On a donc montré que $\exists x \in E,\ P(x)$.

Exemple d'application

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{R},\ \int_0^x (2t^3 + yt)\mathrm{d}t = 0.$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On commence par calculer l'intégrale donnée

$$\int_0^x (t^3 + yt)\mathrm{d}t = \left[2\frac{t^4}{4} + y\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^4}{2} + \frac{yx^2}{2}$$

Ainsi, l'intégrale serait nulle pour $y = -x^2$. Posons donc $y = -x^2$. On a $\int_0^x (t^2 + yt)\mathrm{d}t = 0$.

On a donc montré que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{R},\ \int_0^x (2t^3 + yt)\mathrm{d}t = 0$.

Voir exercice **1.4**.

Méthode 1.6 : Raisonner par disjonction de cas

Pour montrer une assertion P, on peut être amené à distinguer plusieurs cas lors du raisonnement. Il convient de bien faire attention à n'oublier aucun cas.

Exemple d'application

Pour tout entier naturel n, montrons que $n(n+1)$ est un entier pair.

On s'intéresse à la parité de $n(n+1)$, distinguons donc les cas selon la parité de n.

- **Si n pair :** alors on dispose de $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Donc $n(n+1) = 2 \times k(2k+1)$ est pair.

- **Si n impair :** alors on dispose de $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Donc $n(n+1) = 2 \times (2k+1)(k+1)$ est pair.

Dans tous les cas $n(n+1)$ est pair.

Voir exercices **1.4**, **1.15**, **1.16** et **1.17**.

Méthode 1.7 : Nier une assertion

Pour nier une assertion, on va utiliser les règles de négation : les $\forall$ deviennent des $\exists$ et vice-versa, les « et » deviennent des « ou » et vice-versa.

Exemple d'application

Soit E une partie de $\mathbb{R}$. Donnons la négation de « E est majoré ».

On commence par traduire l'assertion à nier. Donc dire que E est majoré revient à dire que $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E,\ x \leq M$. Sa négation est donc $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in E,\ x > M$.

Voir exercices **1.1**, **1.2** et **1.13**.

Méthode 1.8 : Raisonner par l'absurde

Pour montrer une assertion P, on peut supposer non P et arriver à montrer quelque chose de faux (on parle d'une absurdité).

Exemple d'application

Pour $a, b \in \mathbb{Q}$, montrons que si $a + b\sqrt{2} = 0$, alors $a = 0$ et $b = 0$.

Supposons que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Traitons 2 cas :

- Si $b = 0$, alors $a + 0\sqrt{2} = 0$ et $a = 0$, ce qui absurde car on a supposé que soit a soit b est non nul.
- Si $b \neq 0$, alors $\sqrt{2} = -\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde car on sait que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.

On arrive bien à une absurdité dans tous les cas. Ainsi $a = 0$ et $b = 0$.

Voir exercices **1.4**, **1.8** et **1.13**.

Méthode 1.9 : Raisonner par analyse/synthèse

Pour déterminer l'ensemble des éléments vérifiant une assertion P, on peut procéder en deux temps.
Analyse : on prend un élément x vérifiant l'assertion et on cherche à la spécifier le plus possible/à en tirer le plus d'information possible (on analyse la situation).
Synthèse : on vérifie que le ou les éléments x obtenus conviennent (on fait une synthèse de ce qu'on a trouvé).

Exemple d'application

Division Euclidienne : pour $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, montrons qu'il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ et $r < b$.

- **Analyse :** Soit $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ et $r < b$. On obtient que $0 \leq \frac{r}{b} < 1$. Or $\frac{r}{b} = \frac{a}{b} - q$. Donc $0 \leq \frac{a}{b} - q < 1$ puis $q \leq \frac{a}{b} < q + 1$. On en déduit donc que q est la partie entière de $\frac{a}{b}$, c'est-à-dire $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$, et $r = a - bq$.
- **Synthèse :** Posons $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$ et $r = a - bq \in \mathbb{Z}$. Tout d'abord, on a bien $a = bq + r$. Ensuite, par définition de la partie entière, $q \leq \frac{a}{b} < q + 1$ puis $bq \leq a < bq + b$. On en déduit donc que $0 \leq r < b$. On obtient bien ainsi que $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $a = bq + r$ et $r < b$.

On a donc montré qu'il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ et $r < b$.

- La phase d'analyse permet de trouver les candidats potentiels et la phase de synthèse permet de vérifier que ces candidats conviennent bien.
- Dans le cas où, comme dans l'exemple ci-dessus, la phase d'analyse ne nous laisse qu'un seul candidat vérifié par la synthèse, on obtient en plus l'unicité de l'élément vérifiant l'assertion.
- Ce type de raisonnement est très approprié pour montrer des énoncés du genre « Montrer que ... s'écrit de manière unique sous la forme ... ».

Voir exercices **1.17** et **1.18**.

Méthode 1.10 : Montrer une unicité

Pour montrer qu'un élément x vérifiant $P(x)$ est unique, on prend deux éléments x et y vérifiant cette propriété et on montre que $x = y$.

Exemple d'application

Montrons que la décomposition d'un réel sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$ est unique.

Soit x un réel se décomposant sous la forme $x = a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$. On suppose que x s'écrit aussi sous la forme $x = c + d\sqrt{2}$ avec $c, d \in \mathbb{Q}$. On obtient donc que $a + b\sqrt{2} = x = c + d\sqrt{2}$ et donc que $(a - c) + (b - d)\sqrt{2} = 0$ avec $a - c \in \mathbb{Q}$ et $b - d \in \mathbb{Q}$. Alors $a - c = 0$ et $b - d = 0$ (cf. exemple d'illustration du raisonnement par l'absurde). Ainsi $(a, b) = (c, d)$, ce qui montre l'unicité de l'écriture demandée.

Cette méthode ne montre que l'unicité, elle ne montre en aucun cas l'existence.

Voir exercices **1.5** et **1.15**.

Méthode 1.11 : Raisonner par récurrence

Pour raisonner par récurrence

- On définit proprement la proposition $P(n)$ à montrer.
- On repère quel type de récurrence on veut faire. Pour ce faire, on regarde de quoi on a besoin pour montrer $P(n+1)$: si l'on n'a besoin que de $P(n)$, il s'agit d'une **récurrence simple** ; si on a besoin de $P(n)$ et $P(n-1)$, il s'agit d'une **récurrence double** ; si on a besoin de tous les $P(k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$, il s'agit d'une **récurrence forte**.
- On initialise : on montre $P(0)$ pour les récurrences simples et fortes ; on montre $P(0)$ et $P(1)$ pour les récurrences doubles.
- On montre l'hérédité : on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et on montre l'implication qui traduit l'hérédité (c'est-à-dire pour une récurrence simple, on suppose $P(n)$ vraie et on montre que $P(n+1)$ est vraie).
- On n'oublie pas de conclure.

Exemple d'application

(1) Soit (u_n) la suite définie par récurrence par

$$\boldsymbol{u_0 = 1, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{N}$.

(2) Soit (u_n) la suite définie par récurrence par

$$\boldsymbol{u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^{n} u_k}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n$.

(1) On note $P(n)$: « $u_n \in \mathbb{N}$ ». On remarque que les termes de la suite (u_n) sont définis à l'aide des deux précédents : on va donc utiliser une récurrence double (cette remarque n'a pas forcément besoin d'être écrite au propre).
Initialisation : $u_0 = u_1 = 1 \in \mathbb{N}$, ce qui montre $P(0)$ et $P(1)$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$ et $P(n+1)$. On a donc $u_n \in \mathbb{N}$ et $u_{n+1} \in \mathbb{N}$. Ainsi $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \in \mathbb{N}$, ce qui montre $P(n+2)$.
On a donc montré par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{N}$.

(2) On note $Q(n)$: « $u_n = 2^n$ ». On remarque que les termes de la suite (u_n) sont définis à l'aide de tous les précédents : on va donc utiliser une récurrence forte.
Initialisation : $u_0 = 1 = 2^0$, ce qui montre $Q(0)$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\forall k \in [\![0, n]\!]\,,\ Q(k)$. On a donc

$$u_{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^{n} u_k = 1 + \sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 + \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 1 + 2^{n+1} - 1 = 2^{n+1}$$

ce qui montre $P(n+1)$.
On a donc montré par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n$.

Voir exercices **1.6**, **1.7**, **1.14** et **1.15**.

Méthode 1.12 : Montrer une inclusion d'ensembles

Si E et F sont deux ensembles, montrer que $F \subset E$ revient à montrer que $\forall x \in F,\ x \in E$.
En reprenant ce que l'on a vu précédemment, on suit le schéma suivant :
Soit $x \in F$.
Raisonnement utilisant le fait que x est dans F et aucune autre propriété sur x.
Alors $x \in E$. On a donc montré que $F \subset E$.

Exemple d'application

Si $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\right\}$ et $F = \{\lambda(1, -2, 1) \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$, montrons que $F \subset E$.

Soit $u = (x, y, z) \in F$. Par définition de F, on dispose de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda(1, -2, 1) = (\lambda, -2\lambda, \lambda)$. Ainsi $x = \lambda, y = -2\lambda$ et $z = \lambda$. Donc $x + y + z = \lambda - 2\lambda + \lambda = 0$, ce qui montre que $u \in E$. On a donc montré que $F \subset E$.

➔ Voir exercices **1.9**, **1.10** et **1.19**.

Méthode 1.13 : Montrer une égalité d'ensembles

Si E et F sont deux ensembles, pour montrer que $E = F$, sauf cas particuliers où on peut montrer aisément que $x \in E \Leftrightarrow x \in F$, on procède par double inclusion : on montre séparément que $E \subset F$ et que $F \subset E$.

Exemple d'application

Pour $A \subset B$, montrons que $A \cap B = A$.

On procède par double inclusion.

- **$A \cap B \subset A$:** Soit $x \in A \cap B$. On a, par définition de l'intersection, $x \in A$ et $x \in B$. Donc, entre autres, $x \in A$. On a donc montré que $A \cap B \subset A$.
- **$A \subset A \cap B$:** Soit $x \in A$. On a $A \subset B$, donc $x \in B$. On a alors que $x \in A$ et $x \in B$. Donc $x \in A \cap B$, ce qui montre que $A \subset A \cap B$.

On a alors montré, par double inclusion, que $A \cap B = A$.

➔ Voir exercices **1.9**, **1.16** et **1.19**.

Méthode 1.14 : Montrer qu'une application est injective

Si $f : E \to F$, montrer que f est injective renvient à montrer que

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

En reprenant ce que l'on a déjà vu, on suit le schéma suivant :
Soient x_1 et $x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.
Raisonnement.
Alors $x_1 = x_2$. On a donc montré que f est injective.

Exemple d'application

Montrons que $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}\ ,\ n \mapsto n - 1$ est injective.

Soient n et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $f(n) = f(m)$. On a donc que $n - 1 = m - 1$ et alors $n = m$. On a donc montré que f est injective.

➔ Voir exercices **1.12**, **1.19** et **1.20**.

Méthode 1.15 : Montrer qu'une application est surjective

Si $f : E \to F$, montrer que f est surjective renvient à montrer que $\forall y \in F, \exists x \in E,\ y = f(x)$.
En reprenant ce que l'on a vu précédemment, on suit le schéma suivant :
Soit $y \in F$.
On pose $x =$ *valeur intuitée au brouillon. Raisonnement.*
Alors $y = f(x)$. On a donc montré que f est surjective.

Exemple d'application

Montrons que $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}\ ,\ n \mapsto n - 1$ est surjective.

Soit $m \in \mathbb{N}$, on pose $n = m + 1 \in \mathbb{N}^*$ et on a $f(n) = n - 1 = m + 1 - 1$. Alors $f(n) = m$. On a donc montré que f est surjective.

Voir exercices **1.12** et **1.20**.

Méthode 1.16 : Montrer qu'une application est bijective

Si $f : E \to F$, pour montrer que f est bijective il existe trois méthodes générales
Méthode 1 : on montre que f est injective et surjective.
Méthode 2 : on arrive directement à trouver la réciproque g de f de manière intuitive et on vérifie que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
Méthode 3 : on montre que l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet une unique solution pour tout $y \in F$.

Exemple d'application

(1) Montrons que $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}\ ,\ n \mapsto n - 1$ est bijective.
(2) Montrons que $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-\ ,\ x \mapsto -\ln(1 + \sqrt{x})$ est bijective.

(1) **Méthode 1 :** On a montré déjà que f est injective et surjective, donc elle est bijective.
Méthode 2 : On peut assez naturellement penser que l'opération inverse d'enlever 1 est d'ajouter 1, on pose donc $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*\ ,\ n \mapsto n + 1$.
Si $n \in \mathbb{N}$, on a $f \circ g(n) = f(n + 1) = n + 1 - 1 = n$ donc $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.
Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $g \circ f(n) = g(n - 1) = n - 1 + 1 = n$ donc $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}^*}$.
Ainsi f est bijective.

(2) **Méthode 3 :** Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_-$, on a :

$$y = f(x) \Leftrightarrow \ln(1 + \sqrt{x}) = -y \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x} = e^{-y} \Leftrightarrow \sqrt{x} = e^{-y} - 1 \underset{\text{car } x \geq 0}{\Leftrightarrow} x = \left(e^{-y} - 1\right)^2.$$

L'équation $y = f(x)$ admet donc bien une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ et ce pour tout $y \in \mathbb{R}_-$.
L'application f est donc bijective.

En utilisant la méthode 3, si on résout l'équation, on trouve même une expression de la réciproque de f.

Voir exercice **1.12**.

Interro de cours

1. Déterminer la négation, la réciproque et la contraposée de :

(a) « Il fait beau donc il ne pleut pas »

(b) « J'ai bien dormi donc je suis en forme »

(c) « J'ai bien révisé donc je connais mon cours ».

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on pose

- P : « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ »
- Q : « $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ ».

(a) Associer les assertions P et Q aux phrases suivantes :

« f s'annule », « f est la fonction nulle ».

(b) Nier les assertions P et Q.

(c) Déterminer si les implications suivantes sont vraies ou fausses

$$P \Rightarrow Q, \quad Q \Rightarrow P \quad \text{et} \quad \text{non}\, Q \Rightarrow \text{non}\, P.$$

3. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{R}$. Montrer que $p \in \mathbb{Z}$ si et seulement si $n + p \in \mathbb{Z}$.

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5. Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Quelles assertions a-t-on le droit d'écrire ?

(a) $1 \in E$	**(d)** $\{1\} \subset E$	**(g)** $1 \in \mathscr{P}(E)$	**(j)** $\{1\} \subset \mathscr{P}(E)$
(b) $1 \subset E$	**(e)** $\varnothing \in E$	**(h)** $1 \subset \mathscr{P}(E)$	**(k)** $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$
(c) $\{1\} \in E$	**(f)** $\varnothing \subset E$	**(i)** $\{1\} \in \mathscr{P}(E)$	**(l)** $\varnothing \subset \mathscr{P}(E)$.

6. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que $\overline{A} \backslash \overline{B} = B \backslash A$.

7. Soit f l'application qui va de l'ensemble des aéroports dans l'ensemble des villes et qui à un aéroport associe la ville où il se situe. Dire que f n'est pas surjective revient à dire que :

(a) il y a des aéroports qui ne sont pas associés à une ville,

(b) il y a au moins une ville sans aéroport,

(c) tous les aéroports sont associés à une ville,

(d) une ville ne peux pas avoir plus d'un aéroport.

8. De la même manière qu'à la question précédente transformer les affirmation suivantes en applications qui sont ou non surjectives, injectives, bijectives :

(a) Une mairie possède un et un seul maire.

(b) Les raisins ne possèdent pas tous des pépins.

(c) Une place de parking ne peut pas être occupée par plus d'une voiture à la fois.

(d) Un arbre possède au moins une branche.