JE ME TROMPE DONC J'APPRENDS !

Maths

L1

Christine Amory
Françoise Bastin
Jacqueline Crasborn
Christophe Dozot

DUNOD

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-080796-3

Table des matières

Problèmes élémentaires

Algèbre, logique et géométrie de base

Nombres complexes

Vecteurs

Généralités sur les fonctions

Trigonométrie

Primitives

Calcul intégral

Équations différentielles

Fiches supplémentaires

Avant-propos

Cet ouvrage est conçu pour apporter une aide à la compréhension de notions mathématiques de base. Il présente tout d'abord des petits problèmes élémentaires faisant notamment appel au système métrique. Ensuite, la matière traitée concerne des manipulations des nombres réels, la logique classique élémentaire, les polynômes, les nombres complexes, les vecteurs, les fonctions et notions associées, la trigonométrie. Enfin, les derniers thèmes abordés sont les limites des valeurs de fonctions, les dérivées, les primitives et les intégrales.

L'ouvrage est constitué de fiches de deux pages et l'outil pédagogique qui y est développé entre dans le cadre de l'apprentissage par l'erreur. Il s'inscrit dans la thématique « Je me trompe, je comprends pourquoi, donc j'apprends ». Chaque fiche débute ainsi par un énoncé de question sous forme de QCM (sauf pour une dizaine de fiches en fin d'ouvrage), lequel est immédiatement suivi d'une ou plusieurs réponses erronées rencontrées fréquemment. Viennent alors un guide pour acquérir des réflexes permettant de répondre correctement avec une efficacité maximale, la réponse correcte, une analyse des raisons éventuelles amenant à choisir une réponse incorrecte, à tomber dans un piège. Enfin, la fiche s'achève par des rappels théoriques utiles aux notions qui interviennent dans la réponse à la question posée ou présente des connaissances qui offrent au lecteur la possibilité d'aller plus loin.

Commettre une erreur et y être confronté, comprendre son analyse, le mécanisme qui y conduit, peut se révéler un bon outil pour progresser, acquérir de bons réflexes et un apprentissage solide.

Le succès ne consiste pas à ne jamais faire d'erreur mais à ne jamais faire la même erreur deux fois.

George Bernard Shaw

Apprendre sans réfléchir est vain. Réfléchir sans apprendre est dangereux.

Confucius

If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.

John von Neumann

Note : cet ouvrage s'est très abondamment inspiré du manuscrit *MATHS, 1350 cm^3 d'exercices corrigés pour la licence 1*, Dunod 2019, des mêmes auteurs. Et l'ouvrage *ANALYSE, Premières notions fondamentales*, UCL Presses universitaires de Louvain, 2007, Abdou Kouider Ben-Naoum, a influencé la conception de deux ou trois fiches.

Je me trompe donc j'apprends !

114 fiches de 2 pages, regroupées par thème

13 Inéquation avec module

Énoncé

On considère l'inéquation $x|1-x| \leq 2$ en l'inconnue réelle x. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est incorrecte ?

(a) Tous les réels négatifs sont solutions de l'inéquation.
(b) L'inéquation possède au moins une solution réelle strictement positive.
(c) L'inéquation possède au moins une solution réelle strictement positive et une solution réelle strictement négative.
(d) L'inéquation possède des solutions strictement plus grandes que 1.
(e) Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Réponse erronée fréquente

(a)

Réflexes pour répondre correctement

Pour répondre, on peut bien sûr tout d'abord résoudre l'inéquation.
Lorsque le réel $1-x$ est positif, on a $|1-x| = 1-x$; on doit donc trouver les solutions de l'inéquation $x(1-x) \leq 2$ en tenant compte de $x \leq 1$. On a

$$x(1-x) \leq 2 \Leftrightarrow -x^2+x-2 \leq 0.$$

Comme le discriminant du polynôme du second degré du membre de gauche est strictement négatif et que le coefficient du carré de la variable x est négatif, l'inéquation est vérifiée quel que soit le réel x. Les solutions de l'inéquation de départ dans ce cas sont donc les réels de l'intervalle $]-\infty, 1]$.
Lorsque le réel $1-x$ est strictement négatif, on a $|1-x| = x-1$; on doit donc trouver les solutions de l'inéquation $x(x-1) \leq 2$ en tenant compte de $x > 1$. On a

$$x(x-1) \leq 2 \Leftrightarrow x^2 - x -$$

Les zéros du polynôme du second degré du me[…]
Comme le coefficient du carré de la variable x e[…]
équation sont donc les réels de l'intervalle $[-1, 2$[…]
de départ dans ce cas sont donc les réels de l'in[…]
En conclusion, les solutions de l'inéquation do[…]
$]-\infty, 2]$. Les items (a), (b), (c) et (d) sont don[…]

Réponse exacte

On considère l'inéquation $x|1-x| \leq 2$ en l'inconnue réelle x. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est incorrecte ?

(a) Tous les réels négatifs sont solutions de l'inéquation.
(b) L'inéquation possède au moins une solution réelle strictement positive.
(c) L'inéquation possède au moins une solution réelle strictement positive et une solution réelle strictement négative.
(d) L'inéquation possède des solutions plus grandes que 1.
♣ (e) Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Ne tombez pas dans le piège

Le piège à éviter ici est essentiellement une **lecture trop rapide** de la question. Une certaine habitude consiste à croire que l'énoncé demande la réponse correcte… Mais ici on demande la réponse incorrecte ! Ainsi, sachant qu'un seul item doit être choisi chaque fois en guise de réponse et constatant que le premier est correct, on est tenté de choisir l'item (a) ! Mais la question posée consiste à trouver l'item incorrect !

Pour aller plus loin

Avec un peu d'imagination, on peut procéder d'une autre manière.
On voit tout de suite que les items (a), (b) et (c) sont corrects.
De fait, comme le membre de gauche de l'inéquation a le signe de x et que 2 est positif, tous les réels négatifs sont solutions. L'item (a) est donc correct.
De même, en prenant une valeur particulière pour x, on conclut vite que les items (b) et (c) sont corrects : le membre de gauche est nul pour $x = 1$ et négatif pour $x = -1$.
Enfin, en choisissant judicieusement des valeurs, par exemple $x = 3/2$ et $x = 2$, on a respectivement $x|1-x| = (3/2) \times (1/2) = (3/4) \leq 2$ et $x|1-x| = 2$ et on constate que l'item (d) est également correct.
L'item incorrect est donc (e).

26

1 Chaque fiche commence par l'**énoncé** d'un exercice ou QCM type d'examen et pour chacun, un seul item est correct

Puis une ou plusieurs **réponse(s) fausse(s)** « type » est(sont) donnée(s)

2 Des réflexes et des méthodes pour répondre correctement

La **réponse exacte** au verso

Les pièges à éviter 3

Une rubrique 4 **« Pour aller plus loin »**

Notations, conventions

— La notation $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des naturels (c'est-à-dire l'ensemble des entiers positifs ou nuls) et $\mathbb{N}_0$ désigne l'ensemble des naturels strictement positifs. De même pour l'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_0$, l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_0$, et l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}_0$.

— Quand il est écrit *naturel, réel, complexe*, le substantif *nombre* est sous-entendu.

— Quand il est indiqué qu'un nombre est positif (négatif), on sous-entend positif ou nul (négatif ou nul).

— La dérivée première d'une fonction f est notée Df.

— La notation $C_\infty(I)$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, désigne l'ensemble des fonctions indéfiniment continûment dérivables sur I.

— Les fonctions arc sinus, arc cosinus, arc tangente et arc cotangente sont respectivement désignées par arcsin, arcos, arctan et arcotan.

— On utilise de façon abrégée *angles associés* à la place de *angles complémentaires, angles supplémentaires*.

— Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \bullet \vec{v}$ et leur produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

— La notation $\|\vec{u}\|$ est utilisée pour représenter la norme du vecteur $\vec{u}$ et la notation $\overline{AB}$ est utilisée pour représenter la longueur du segment AB.

— Un symbole mathématique est considéré du genre masculin.

— Le terme *fonction de fonction* est utilisé à la place du terme *fonction composée* quand on travaille avec des fonctions d'une seule variable réelle.

— C'est le terme *fonction inverse* qui est utilisé à la place de *fonction réciproque*.

— La présence de guillemets dans le texte indique une erreur. Cela a pour but d'éviter de penser lors d'une relecture rapide que la locution ou l'égalité qu'ils entourent est correcte.

— Des caractères gras pour une phrase, une expression ou un mot indiquent que l'on veut attirer l'attention sur ces éléments.

— L'italique est utilisé surtout pour signaler un terme mathématique précis, pour faire ressortir une propriété ou une définition. On le rencontre cependant aussi lorsqu'on est en présence de locutions ou expressions particulières dans une phrase.

1 Longueur et aire

Énoncé

Si la circonférence d'un cercle évaluée en décimètres est égale à l'aire de la surface qu'il définit évaluée en mètres carrés, que vaut la longueur du diamètre de ce cercle, exprimée en centimètres ?

(a) 40 cm
(b) 4 000 cm
(c) 40 000 cm
(d) Il n'y a pas assez de données pour déterminer la longueur du diamètre.
(e) Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Réponse erronée fréquente

(a)

Réflexes pour répondre correctement

À priori, sans un examen plus complet du problème posé, tous les items doivent être envisagés.

Le réflexe ici est donc de tenter de résoudre le problème, de le mettre en équation. Alors on verra rapidement si l'item (d) est correct ou non, ce qui sera un premier pas.

Ainsi, soient D et R respectivement la mesure du diamètre et du rayon du cercle exprimée en centimètres. On a alors

$$R \text{ cm} = \frac{D}{2} \text{ cm} = \frac{D}{2}\, 10^{-1} \text{ dm} = \frac{D}{2}\, 10^{-2} \text{ m}.$$

Comme la circonférence d'un cercle de rayon R vaut $2\pi R$ et que l'aire qu'il définit vaut πR^2, la circonférence évaluée en décimètres est égale à $2\pi\,(D/2)\,10^{-1}$, c'est-à-dire à $\pi\; D\; 10^{-1}$ décimètres et l'aire évaluée en mètres carrés est égale à $\pi\left((D/2)\;10^{-2}\right)^2$, c'est-à-dire à $(\pi D^2\;10^{-4})/4$ mètres carrés. L'égalité donnée dans l'énoncé, c'est-à-dire celle entre la circonférence du cercle et l'aire du disque qu'il définit, se traduit donc par

$$\pi\; D\; 10^{-1} = \frac{\pi\; D^2\; 10^{-4}}{4} \quad \text{ou encore } D = 4 \times 10^3 \text{cm}.$$

Réponse exacte

Si la circonférence d'un cercle évaluée en décimètres est égale à l'aire de la surface qu'il définit évaluée en mètres carrés, que vaut la longueur du diamètre de ce cercle, exprimée en centimètres ?

(a) 40 cm
♣ (b) 4000 cm
(c) 40000 cm
(d) Il n'y a pas assez de données pour déterminer la longueur du diamètre.
(e) Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Ne tombez pas dans le piège

Il est important d'être attentif aux unités et aux conversions des longueurs et des aires ! Un décimètre est égal à un dixième de mètre et un centimètre est égal à un centième de mètre. Mais pour les aires, il ne faut pas oublier l'élévation au carré ! S'il y a oubli, on obtient alors

$$\text{« } \pi\, D\, 10^{-1} \;=\; \frac{\pi\, D^2\, 10^{-2}}{4} \text{ »}$$

ce qui donne

$$\text{« } D \;=\; 40 \text{ cm »},$$

c'est-à-dire l'item (a), réponse fausse.

Pour aller plus loin

Pour passer d'une unité de longueur, de masse ou de capacité à l'unité directement inférieure (respectivement supérieure), on multiplie (respectivement divise) par 10 le nombre exprimé dans l'unité de départ.

Pour passer d'une unité d'aire à l'unité directement inférieure (respectivement supérieure), on multiplie (respectivement divise) par 100 le nombre exprimé dans l'unité de départ.

Rappelons aussi le lien entre les unités agraires et les unités d'aire. Un centiare (ca) est égal à un mètre carré, un are (a) est égal à un décamètre carré et un hectare (ha) est égal à un hectomètre carré.

2 Longueur et volume

Énoncé

Un globule rouge vu de face mesure 7 micromètres de diamètre (1 micromètre, noté 1 μm, vaut 1 millième de millimètre). De profil, il mesure 2 micromètres d'épaisseur. Sachant qu'il y a 5 millions de globules rouges dans 1 mm^3 de sang, si on empilait les globules rouges de 1 cm^3 de sang, la hauteur de la colonne obtenue serait de

(a) 10 m.
(b) 35 m.
(c) 10 km.
(d) 35 km.
(e) Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Réponse erronée fréquente

(a) ou (d)

Réflexes pour répondre correctement

Notons que tous les items sont à priori des réponses possibles.

Cela étant, la hauteur d'un globule rouge est de 2 μm, c'est-à-dire de 2×10^{-3} mm.

Comme il y a 5 millions de globules rouges dans 1 mm^3 de sang, c'est-à-dire 5×10^6 globules rouges, cela donne une hauteur de

$$2 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^6 = 10^4 \text{ mm.}$$

Dès lors, puisque 1 cm^3 = 10^3 mm^3, la hauteur de la colonne obtenue est égale à

$$10^4 \times 10^3 \text{ mm} = 10^7 \text{ mm} = 10 \text{ km.}$$

Réponse exacte

Un globule rouge vu de face mesure 7 micromètres de diamètre (1 micromètre, noté 1 μm, vaut 1 millième de millimètre). De profil, il mesure 2 micromètres d'épaisseur. Sachant qu'il y a 5 millions de globules rouges dans 1 mm^3 de sang, si on empilait les globules rouges de 1 cm^3 de sang, la hauteur de la colonne obtenue serait de

(a) 10 m.
(b) 35 m.
♣ (c) 10 km.
(d) 35 km.
(e) Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Ne tombez pas dans le piège

Après le calcul de la hauteur obtenue par empilement des globules rouges contenus dans 1 mm^3 de sang, on ne doit pas oublier que l'énoncé stipule que l'on empile les globules de 1 cm^3. Cet oubli conduit ainsi à une hauteur de 10 m, c'est-à-dire l'item (a), réponse fausse.

Par ailleurs, on ne doit tenir compte que de la hauteur des globules rouges ! La donnée de 7 microns pour le diamètre est donc inutile. Cependant, si on l'utilise à la place des 2 microns, on obtient la valeur donnée par l'item (d), réponse fausse.

Pour aller plus loin

Il faut être attentif à la question posée, bien lire les données et ne pas être surpris par l'une d'entre elles qui serait inutile pour trouver la réponse. Il ne faut certainement pas vouloir tout utiliser à tout prix !

Par ailleurs, rappelons que pour passer d'une unité de volume à l'unité directement inférieure (respectivement supérieure), on multiplie (respectivement divise) par 1 000 le nombre exprimé dans l'unité de départ.

Rappelons également le lien entre les unités de volume et celles de capacité : un mètre cube correspond à 1 000 litres.

3 Longueur, aire et volume

Énoncé

Si on divise par 2 la longueur du côté d'un carré, alors

(a) l'aire de ce carré est divisée par 2.
(b) le périmètre de ce carré est divisé par 2.
(c) le volume du cube dont les faces sont composées de ce carré est divisé par 2.
(d) il est nécessaire de connaître la mesure initiale du côté du carré pour pouvoir répondre à cette question.
(e) Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Réponse erronée fréquente

(a) ou (d)

Réflexes pour répondre correctement

Pour répondre correctement à la question, il suffit de considérer la longueur d'un côté (disons L), de la diviser par 2 et de voir ce que l'on obtient pour l'aire, le périmètre et le volume.

L'aire d'un carré est égale au carré de la longueur d'un côté ; ainsi, dans le cas présent, la division de la longueur par 2 donne la valeur $(L/2)^2 = L^2/4$ comme étant l'aire. L'item (a) est donc incorrect.

Le périmètre d'un carré est égal à 4 fois la longueur d'un côté ; ainsi, dans le cas présent, la division de la longueur par 2 donne la valeur $4 \times (L/2) = 2L$ comme étant le périmètre. C'est donc le périmètre de départ ($4L$) divisé par 2.

Réponse exacte

Si on divise par 2 la longueur du côté d'un carré, alors

(a) l'aire de ce carré est divisée par 2.

♣ (b) le périmètre de ce carré est divisé par 2.

(c) le volume du cube dont les faces sont composées de ce carré est divisé par 2.

(d) il est nécessaire de connaître la mesure initiale du côté du carré pour pouvoir répondre à cette question.

(e) Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Ne tombez pas dans le piège

Si on effectue directement l'opération de division (ici par 2) sur l'aire, alors on va donner l'item (a) comme étant celui qui est correct. Mais il ne faut pas oublier que aire et volume impliquent l'utilisation de multiplication (et/ou d'exposants) !

Par ailleurs, comme on ne demande pas de valeur numérique, il est inutile de connaître la mesure initiale du côté du carré. Si on n'y réfléchit pas, on est tenté de donner l'item (d) comme étant la réponse correcte.

Pour aller plus loin

Il faut bien lire et comprendre ce qui est demandé dans un exercice du type de celui-ci et ne pas toujours penser que l'on demande une valeur numérique.

Ajoutons que si on divise par 2 la longueur du côté d'un carré, alors le volume du cube dont les faces sont composées de ce carré est égal à $(L/2)^3 = L^3/8$; ainsi le volume est divisé par 8.

4 Fractions

Énoncé

Un aventurier s'engage dans le désert muni d'une gourde remplie d'eau. Malheureusement, il trébuche dès la première heure ; la gourde s'ouvre et il perd ainsi déjà 20 % du contenu. À la fin de chaque journée, il boit un quart du contenu qui lui reste. Après deux jours de marche, la gourde

(a) contient encore strictement plus qu'un cinquième et au maximum un quart de ce qu'il avait au départ.

(b) contient encore strictement plus qu'un quart et au maximum deux cinquièmes de ce qu'il avait au départ.

(c) contient encore strictement plus que deux cinquièmes et au maximum la moitié de ce qu'il avait au départ.

(d) est vide.

(e) Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Réponse erronée fréquente

(b)

Réflexes pour répondre correctement

Pour trouver l'item correct, il ne faut pas essayer de deviner la réponse, mais bien faire le calcul explicite de ce qu'il reste dans la gourde.

Dès la première heure, l'aventurier perd 20 % soit $1/5$ du contenu de sa gourde ; il lui reste donc $4/5$ du contenu.

À la fin de la première journée, il boit $1/4$ des $4/5$ qui lui restent, soit $1/5$ du contenu de sa gourde. Il lui reste donc $4/5 - 1/5 = 3/5$ du contenu initial.

À la fin de la deuxième journée, il boit à nouveau $1/4$ des $3/5$ qui lui restent soit $3/20$ du contenu de sa gourde. Il lui reste donc

$$\frac{3}{5} - \frac{3}{20} = \frac{12-3}{20} = \frac{9}{20}$$

du contenu initial.

Ainsi, on peut écarter l'item (d).

Pour trouver l'item correct, il reste donc à comparer $9/20$ à $1/5$ et $1/4$ (item (a)), $1/4$ et $2/5$ (item (b)) et $2/5$ et $1/2$ (item (c)). Comme on a

$$\frac{1}{5} = \frac{4}{20}, \quad \frac{1}{4} = \frac{5}{20}, \quad \frac{2}{5} = \frac{8}{20}, \quad \frac{1}{2} = \frac{10}{20},$$

on obtient

$$\frac{2}{5} = \frac{8}{20} < \frac{9}{20} < \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

Réponse exacte

Un aventurier s'engage dans le désert muni d'une gourde remplie d'eau. Malheureusement, il trébuche dès la première heure ; la gourde s'ouvre et il perd ainsi déjà 20 % du contenu. À la fin de chaque journée, il boit un quart du contenu qui lui reste. Après deux jours de marche, la gourde

(a) *contient encore strictement plus qu'un cinquième et au maximum un quart de ce qu'il avait au départ.*

(b) *contient encore strictement plus qu'un quart et au maximum deux cinquièmes de ce qu'il avait au départ.*

♣ (c) *contient encore strictement plus que deux cinquièmes et au maximum la moitié de ce qu'il avait au départ.*

(d) *est vide.*

(e) *Aucune des propositions précédentes n'est correcte.*

Ne tombez pas dans le piège

Si on néglige la précision donnée par l'expression *qui lui reste* alors à la fin de la deuxième journée, la gourde contient $4/5 - 1/5 - 1/5 = 2/5$ du contenu initial. Dans ce cas, on choisit à tort l'item (b) comme étant celui qui est correct.

Pour aller plus loin

Il faut toujours lire **attentivement** la question, sous peine de manquer une donnée (pour cet exercice *contenu ... qui lui reste* !) et ainsi d'être amené à une erreur.

5 Multiplication et division par des nombres décimaux, pourcentage

Énoncé

Quand on dit que la radiation en UV a augmenté de 25 %, cela signifie que la radiation a été

(a) divisée par $1,25$.
(b) divisée par $0,8$.
(c) multipliée par $0,25$.
(d) multipliée par $0,8$.
(e) Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Réponse erronée fréquente

(c) ou (e)

Réflexes pour répondre correctement

Étudions les réponses proposées pour savoir si on peut en éliminer immédiatement. Pour que la valeur d'une quantité augmente par division ou multiplication, on doit soit la diviser par un réel strictement positif et inférieur à 1, soit la multiplier par un réel strictement supérieur à 1.

Comme on dit ici que la radiation en UV a augmenté de 25 %, elle n'a pas été divisée par un nombre strictement plus grand que 1 ni multipliée par un nombre strictement plus petit que 1. Les items (a), (c) et (d) ne conviennent donc pas.

Examinons alors l'item (b) ; on pourra ainsi donner la réponse correcte.

Comme $25\,\% = 25/100 = 1/4$, si R est la quantité de radiation initiale alors

$$R + \frac{R}{4} = \frac{5R}{4}$$

est la quantité de radiation après augmentation. Cette quantité R a donc été multipliée par $5/4$ ou, de façon équivalente, divisée par $4/5 = 8/10 = 0,8$.

Réponse exacte

Quand on dit que la radiation en UV a augmenté de 25%, cela signifie que la radiation a été

(a) divisée par 1,25.

♣ *(b) divisée par 0,8.*

(c) multipliée par 0,25.

(d) multipliée par 0,8.

(e) Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Ne tombez pas dans le piège

Il est indispensable de lire attentivement l'énoncé de la question : on parle d'une augmentation de 25 % de la radiation mais on demande la valeur de la radiation totale ; l'item (c) ne convient donc pas.

De plus, ce n'est pas parce que la radiation augmente qu'il faut obligatoirement chercher une réponse du type *multipliée par*. Multiplier par $1,25 = 5/4$ revient à diviser par $4/5 = 0,8$ et comme l'item (b) est une proposition correcte, l'item (e) ne convient pas.

Pour aller plus loin

Il ne faut pas oublier (transcodage !) que prendre $1/4$ (par exemple) d'une quantité Q correspond, en mathématique, à diviser cette quantité par 4 ou, ce qui est équivalent, à la multiplier par $1/4$:

$$\frac{Q}{4} = \frac{1}{4} \times Q.$$

Plus généralement, si α et β sont des réels non nuls, diviser un nombre x par α/β est équivalent à le multiplier par β/α, c'est-à-dire

$$\frac{x}{\alpha/\beta} = x \times \frac{\beta}{\alpha}.$$

6 Facture d'électricité

Énoncé

Éric utilise de l'électricité qui lui est fournie avec les tarifs suivants :

– 1 kWh d'électricité consommé en période pleine coûte 20 centimes d'euro ;
– 1 kWh d'électricité consommé en période creuse coûte 16 centimes d'euro.

Pour faire des économies, Éric consomme 2,5 fois plus d'électricité durant les périodes creuses que durant les périodes pleines. À la fin de l'année, il reçoit sa facture d'électricité et constate que sa consommation annuelle lui coûte 540 euros. Quelle est la consommation annuelle d'Éric en kWh ?

(a) 900 kWh
(b) 1 500 kWh
(c) 2 250 kWh
(d) 3 150 kWh
(e) Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Réponse erronée fréquente

(a) ou (c)

Réflexes pour répondre correctement

L'énoncé ne permet pas d'écarter un item de façon immédiate. Calculons alors directement la consommation demandée.

Si x est le nombre de kWh consommés par Éric en période pleine en un an, alors $2,5\,x$ est le nombre de kWh consommés annuellement en période creuse. Sa consommation annuelle est donc de

$$x + 2,5x = 3,5x \text{ kWh}$$

par an. C'est ce que l'on cherche. Il faut donc déterminer x.

Utilisons les données. Sa consommation lui coûte $0,2 \times x + 0,16 \times 2,5x$ euros par an ; on a donc

$$\begin{aligned} 0,2 \times x + 0,16 \times 2,5x = 540 \quad &\Leftrightarrow \quad 20 \times x + 16 \times 2,5x = 54\,000 \\ &\Leftrightarrow \quad 60x = 54\,000 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 900. \end{aligned}$$

Dès lors, la consommation annuelle d'Éric en kWh est égale à

$$3,5 \times 900 = 3\,150.$$

Réponse exacte

Éric utilise de l'électricité qui lui est fournie avec les tarifs suivants :

- *1 kWh d'électricité consommé en période pleine coûte 20 centimes d'euro ;*
- *1 kWh d'électricité consommé en période creuse coûte 16 centimes d'euro.*

Pour faire des économies, Éric consomme 2,5 fois plus d'électricité durant les périodes creuses que durant les périodes pleines. À la fin de l'année, il reçoit sa facture d'électricité et constate que sa consommation annuelle lui coûte 540 euros. Quelle est la consommation annuelle d'Éric en kWh ?

(a) 900 kWh
(b) 1 500 kWh
(c) 2 250 kWh
♣ *(d) 3 150 kWh*
(e) Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Ne tombez pas dans le piège

Il est indispensable de noter très précisément ce que représente l'inconnue choisie : x n'est pas la consommation annuelle d'Éric ni celle en période creuse mais bien seulement sa consommation en période pleine ; les items (a) et (c) ne sont donc pas corrects. La consommation en période creuse est en effet donnée par $2,5 \times 900 = 2\,250$ kWh.

Pour aller plus loin

Il importe de lire **attentivement** et **entièrement** l'énoncé d'un problème avant de se lancer dans la recherche de sa solution ! La résolution peut alors comporter les étapes suivantes. Tout d'abord, choisir une notation pour les inconnues et spécifier ce que chacune représente en mentionnant l'unité si nécessaire. Ensuite, préciser ce que l'on peut calculer successivement en les utilisant et en déduire une ou plusieurs équations que l'on résout. Enfin, rédiger une conclusion qui exprime la solution du problème.

7 Un sac de billes

Énoncé

Un sac contient des billes à partager de façon égale entre des enfants. S'il y avait 6 enfants de plus, chacun recevrait 2 billes en moins et s'il y avait 3 enfants de moins, chacun recevrait 2 billes de plus. Compte tenu de cela, ce sac contient

(a) 6 billes.
(b) 12 billes.
(c) 18 billes.
(d) 72 billes.
(e) Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Réponse erronée fréquente

(a) ou (b)

Réflexes pour répondre correctement

Notons que tous les items sont des réponses à priori possibles. Il faut donc chercher l'item correct par un calcul.

Cela étant, résoudre ce type de problème s'effectue à partir d'une mise en équation. Allons-y.

Soient x le nombre d'enfants et y le nombre de billes reçues par chacun ; le nombre de billes contenues dans le sac vaut donc xy. C'est ce nombre qu'il faut trouver.

D'une part on sait que s'il y avait 6 enfants de plus, leur nombre serait $x+6$ et le nombre de billes reçues par chacun serait $y-2$; il y a donc $(x+6)(y-2)$ billes dans le sac. D'autre part, on sait aussi que s'il y avait 3 enfants en moins, leur nombre serait $x-3$ et le nombre de billes reçues par chacun serait $y+2$; il y a donc $(x-3)(y+2)$ billes dans le sac. On obtient ainsi le système

$$\begin{cases} xy = (x+6)(y-2) \\ xy = (x-3)(y+2). \end{cases}$$

Comme $(x+6)(y-2) = xy - 2x + 6y - 12$ et $(x-3)(y+2) = xy + 2x - 3y - 6$, on a alors successivement

$$\begin{cases} xy = (x+6)(y-2) \\ xy = (x-3)(y+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -2x + 6y - 12 \\ 0 = 2x - 3y - 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 18 \\ x = 3y - 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 12. \end{cases}$$

Ainsi chacun des 12 enfants reçoit 6 billes ; le sac contient donc $12 \times 6 = 72$ billes.

Réponse exacte

Un sac contient des billes à partager de façon égale entre des enfants. S'il y avait 6 enfants de plus, chacun recevrait 2 billes en moins et s'il y avait 3 enfants de moins, chacun recevrait 2 billes de plus. Compte tenu de cela, ce sac contient

(a) 6 billes.
(b) 12 billes.
(c) 18 billes.
♣ *(d) 72 billes.*
(e) Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Ne tombez pas dans le piège

Après résolution, un manque d'attention peut conduire à donner l'item (a) (6 billes) comme étant celui qui est correct si on a oublié qu'on demandait le nombre de billes dans le sac et non le nombre de billes reçues par chaque enfant ($y = 6$).

La réponse erronée (b) (12 billes) peut quant à elle provenir d'un manque de précision dans les notations adoptées pour les inconnues : on prend alors $x = 12$ comme étant la réponse alors que x représente le nombre d'enfants.

Pour aller plus loin

Quand on manipule deux inconnues, il est fondamental de bien spécifier quelle notation est utilisée pour chacune, sinon on risque de les confondre par la suite.

8 Manipulation de réels

Énoncé

On donne deux nombres réels dont le produit est égal à 1. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est toujours correcte ?

(a) Chacun des deux nombres vaut 1.
(b) Au moins l'un des deux nombres est supérieur ou égal à 1.
(c) L'un des deux nombres est supérieur ou égal à 1 et l'autre est inférieur ou égal à 1.
(d) Au moins l'un des deux nombres est inférieur ou égal à 1.
(e) Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Réponse erronée fréquente

(b) ou (c)

Réflexes pour répondre correctement

À la lecture de la question, on voit que l'on peut immédiatement éliminer plusieurs items.

L'item (a) est incorrect car le produit d'un réel non nul quelconque et de son inverse est bien sûr toujours égal à 1. Le nombre 1 n'est donc pas le seul qui convient !

Les items (b) et (c) sont incorrects car le produit des deux nombres étant positif (puisqu'égal à 1), ils ont tous les deux le même signe. Si leur signe est négatif, ils sont tous les deux strictement inférieurs à 1. Cette situation est possible : il suffit de considérer le réel -1. Le produit de ce réel par lui-même est égal à 1 et -1 est strictement inférieur à 1 !

Il faut aussi noter que puisqu'on sait dès le départ qu'il n'y a qu'une seule réponse possible, l'item (c) ne peut pas être correct car alors (b) le serait aussi !

Il reste donc à examiner l'item (d). Ayant un produit positif, les deux nombres ont donc le même signe. S'ils sont négatifs, ils sont tous les deux inférieurs à 1. S'ils sont positifs, un des deux au moins est inférieur ou égal à 1 car s'ils étaient tous les deux strictement supérieurs à 1, leur produit le serait également !

Réponse exacte

On donne deux nombres réels dont le produit est égal à 1. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est toujours correcte ?

(a) Chacun des deux nombres vaut 1.
(b) Au moins l'un des deux nombres est supérieur ou égal à 1.
(c) L'un des deux nombres est supérieur ou égal à 1 et l'autre est inférieur ou égal à 1.
♣ *(d) Au moins l'un des deux nombres est inférieur ou égal à 1.*
(e) Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Ne tombez pas dans le piège

Bien souvent, en premier réflexe, on ne pense qu'aux nombres réels **positifs**. Dans ce cas, les items (b) **et** (c) seraient corrects.

Comme on ne peut **pas avoir deux** items corrects, cela devrait déclencher une remise en question de la réponse choisie… Mais trop souvent, la lecture est progressive : on lit (b) avant (c) et si on est convaincu que (b) est correct, on ne lit pas plus loin… et on tombe dans le piège.

Pour aller plus loin

Il est important de **lire** un énoncé complètement (sauf bien sûr si on est absolument persuadé d'avoir la réponse correcte avant de terminer la lecture des items) car une distraction est toujours possible !

Ajoutons qu'en langage mathématique, le début de l'énoncé s'écrit : soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $xy = 1$. Deux cas se présentent :
– si $x \leq 1$, alors l'item (d) est vérifié.
– si $x > 1$, alors $y = 1/x$, donc on a $y < 1$ et l'item (d) est également vérifié.