Pierre Bernard | Mathieu Mansuy
Anne-Charline Chalmin | Oscar Devys | Marie Virat
Sylvain Gugger

MATHS

PT

EXERCICES INCONTOURNABLES

J'intègre

2e édition

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-086473-7

Table des matières

Algèbre

Géométrie

Analyse

Probabilités

Avant-propos

Cet ouvrage est conçu pour les élèves de deuxième année de classes préparatoires scientifiques en filière PT.

Il propose de mettre en pratique les notions abordées en cours de mathématiques par le biais d'exercices. Chacun est assorti d'une correction détaillée, dans laquelle l'accent est mis sur la méthode qui mène à la solution. Comme l'indique le titre, l'objectif a été de couvrir, pour l'ensemble des chapitres du programme, non seulement toutes les notions à connaître, mais encore les techniques, astuces essentielles, ainsi que quelques exercices-types, classiques ou de synthèse : en particulier, on progresse, au sein de chaque chapitre, des techniques les plus fondamentales d'application du cours vers des techniques plus avancées pouvant ressembler à des exercices d'oral de concours.

Cette 2$^{\text{e}}$ édition tient compte de toutes les nouveautés et modifications du nouveau programme, valable à partir de l'année 2022-2023. Au-delà d'une mise à jour nécessaire liée au changement de programme, nous avons cherché à améliorer et approfondir l'édition précédente. Il en résulte une centaine de pages supplémentaires, dédiées pour moitié à l'approfondissement des exercices existants, et pour moitié au traitement des nouveaux exercices.

Bien entendu, nous avons veillé à ce que ces apports respectent les principes qui ont fait le succès de cette collection :

- fournir un panel le plus représentatif possible des exercices-types, compétences et notions, sur chaque chapitre ;
- donner, pour chaque exercice, d'une part une rédaction exemplaire conforme aux attendus des épreuves écrites – tout en mettant en relief les canevas susceptibles de resservir –, d'autre part une explicitation des démarches inductives et déductives sous-jacentes – afin d'entraîner l'esprit des lecteurs à aborder des exercices originaux.

Enfin, nous souhaitons ici remercier les auteurs historiques, sur le travail desquels nous nous sommes fondés pour cette édition : Julien Freslon, Sylvain Gugger, Jérôme Poineau et Daniel Fredon.

Les auteurs,

Pierre BERNARD
(coordonnateur, référent TEX)

Mathieu MANSUY
(référent PC et probabilités)

Oscar DEVYS
(référent MP)

Anne-Charline CHALMIN
(référente PSI)

Marie VIRAT
(référente PT)

Structure de l'ouvrage

Le livre est divisé en 16 chapitres, chacun étant consacré à une partie du programme. Nous avons regroupé les chapitres selon les thèmes classiques : Algèbre, Géométrie, Analyse et Probabilités. Au sein d'un même chapitre, les exercices, classés par ordre croissant de difficulté, ont été choisis de façon à passer en revue les notions à connaître, mais aussi à présenter les techniques susceptibles d'être utilisées.

En ce qui concerne les corrections, nous avons choisi de séparer clairement la réflexion préliminaire, comprenant analyse du problème et tâtonnements, de la rédaction finale, rigoureuse et précise. Cette dernière étape est signalée, dans le texte, par la présence d'un liseré gris sur la gauche et du pictogramme . Insistons sur le fait que nous ne prétendons nullement présenter l'unique cheminement permettant d'aboutir à la solution d'un exercice donné, ni la seule rédaction acceptable. Dans les deux cas, bien des possibilités existent.

Par ailleurs, lorsque nous avons souhaité mettre en lumière un point important, nous l'avons rédigé sur un fond grisé et indiqué par . De même, la présence d'un piège dont il faut se méfier est signalée par .

Cet ouvrage a été rédigé en vue d'une utilisation thématique, c'est-à-dire non linéaire :

- De manière intuitive, un étudiant qui veut approfondir un chapitre particulier s'attellera aux exercices du chapitre en question. Parfois, un exercice utilisera des notions d'autres chapitres pas encore étudiés ; dans ce cas l'énoncé de l'exercice le rappellera.
- De manière plus précise, il se référera à l'index en fin d'ouvrage, afin d'aller directement travailler les notions de son choix. Ainsi, un étudiant qui voudrait travailler spécifiquement l'utilisation du *lemme des coalitions* en probabilités n'aura pas besoin de feuilleter tous les exercices de la quatrième partie, mais pourra se contenter de chercher l'entrée « coalitions (lemme des) » de l'index qui le renverra directement aux exercices mentionnant cette notion.

Remerciements

Pierre BERNARD et Anne-Charline CHALMIN souhaitent remercier leurs collègues du lycée Saliège :

- Mathieu LEROY-LERÊTRE, pour ses conseils sur TEX,
- Emmanuel ROBIN, pour son expertise sur les programmes.

***

Mathieu MANSUY souhaite remercier Amandine POLET pour ses nombreux conseils, et a une pensée pour sa grand-mère Françoise.

***

Marie VIRAT souhaite remercier Dédé, Steph, Émeraude, Caro, Nicolas et Pierre pour leur soutien, leurs encouragements et leurs réflexions dans la réalisation de cet ouvrage.

Partie 1

Algèbre

CHAPITRE 1

Déterminants

*Le lecteur fidèle de la série Exercices incontournables reconnaîtra une partie des exercices du chapitre 12 « Déterminants » de l'ouvrage PCSI-PTSI de la même collection. Ces exercices sont mis en évidence par une * dans leur titre.*

Exercice 1.1 : Calcul de déterminants de taille 4

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Donner, sous forme factorisée, la valeur des déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$

1. Pour calculer un déterminant de petite taille, on effectue des opérations élémentaires pour obtenir si possible une ligne ou une colonne avec tous les coefficients nuls sauf un. On développe ensuite suivant cette ligne ou cette colonne pour se ramener à un déterminant de taille plus petite.
Ici, il est facile d'avoir des 0 sur la première ligne ou dans la première colonne.

En retranchant la première colonne aux trois autres, puis en développant par rapport à la première ligne, on trouve :

$$D = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & b-a & b-a \\ a & b-a & c-a & c-a \\ a & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = a(b-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix}$$

puisque $(b-a)$ peut se mettre en facteur de la première ligne. On retranche ensuite la première colonne aux deux autres et on développe par rapport à la première ligne pour trouver :

$$D = a(b-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b-a & c-b & c-b \\ b-a & c-b & d-b \end{vmatrix} = a(b-a)\begin{vmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{vmatrix}$$
$$= a(b-a)[(c-b)(d-b)-(c-b)^2] = a(b-a)(c-b)(d-c).$$

2. Dans cette question, il n'est pas évident de faire apparaître des 0 sur toute une ligne (ou dans toute une colonne) sauf un élément. Si on veut le faire directement, il faudrait diviser par a, b ou c et donc traiter à part le cas où ce réel est nul.
Il y a plus simple en revanche : la somme des colonnes (ou des lignes) est constante. Donc, en effectuant une opération élémentaire, on peut obtenir une colonne avec 4 fois le même réel, qui pourra se mettre en facteur et donner une colonne de 1.

Il vaut mieux éviter de diviser par un paramètre de l'énoncé s'il peut être nul. Dans le cas des déterminants, la linéarité par rapport à chaque ligne/colonne permet souvent de contourner cette difficulté.

En effectuant $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, on trouve :

$$D = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+2c & c & c & b \\ a+b+2c & a & b & c \\ a+b+2c & b & a & c \\ a+b+2c & c & c & a \end{vmatrix}$$
$$= (a+b+2c)\begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 1 & a & b & c \\ 1 & b & a & c \\ 1 & c & c & a \end{vmatrix}.$$

On retranche ensuite la première ligne aux trois autres et on développe suivant la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 0 & a-c & b-c & c-b \\ 0 & b-c & a-c & c-b \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-c & b-c & c-b \\ b-c & a-c & c-b \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$
$$= (a-b)\begin{vmatrix} a-c & b-c \\ b-c & a-c \end{vmatrix}$$
$$= (a-b)[(a-c)^2-(b-c)^2]$$
$$= (a-b)[(a-c+b-c)(a-c-b+c)]$$
$$= (a-b)^2(a+b-2c)$$

où l'on a développé le déterminant de taille 3 par rapport à sa dernière ligne. Au final le déterminant cherché vaut :

$$D = (a+b+2c)(a-b)^2(a+b-2c).$$

Exercice 1.2 : Avec des coefficients binomiaux

Pour tout couple $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on note $\Delta_{n,p}$ le déterminant d'ordre p suivant :

$$\Delta_{n,p} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p-1} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \binom{n+p-1}{1} & \cdots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix}.$$

1. Montrer, en effectuant des opérations sur les colonnes, que :

$$\forall\,(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad \Delta_{n,p} = \Delta_{n+1,p}.$$

2. En déduire la valeur de $\Delta_{n,p}$.

1. Notons, pour commencer, que les coefficients de la première colonne peuvent être récrits sous la forme $\binom{n+i-1}{0}$ pour $i \in [\![1,p]\!]$, de sorte que le coefficient en position $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ du déterminant $\Delta_{n,p}$ s'écrit $\binom{n+i-1}{j-1}$.

Pour établir le lien entre $\Delta_{n+1,p}$ et $\Delta_{n,p}$, on exploite la relation de Pascal :

$$\forall\,(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad \binom{m}{n-1} + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n}.$$

Si $n < p$, on obtient des coefficients binomiaux de la forme $\binom{q}{r}$ avec $q < r$. Par convention, ces coefficients sont nuls. Et cette convention est compatible avec la formule de Pascal.

Ainsi, dans le déterminant $\Delta_{n,p}$, si l'on ajoute les colonnes C_i et C_{i-1} (pour i entre 2 et p), on obtient la colonne i du déterminant $\Delta_{n+1,p}$.

Pour i parcourant les entiers de 2 à p (dans cet ordre), on effectue successivement les opérations élémentaires $C_i \leftarrow C_i + C_{i-1}$. On obtient par la relation de Pascal :

$$\Delta_{n,p} = \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p-1} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+2}{1} & \cdots & \binom{n+2}{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n+p-1}{0} & \binom{n+p}{1} & \cdots & \binom{n+p}{p-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p-1} \\ 1 & \binom{n+2}{1} & \cdots & \binom{n+2}{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \binom{n+p}{1} & \cdots & \binom{n+p}{p-1} \end{vmatrix}$$
$$= \Delta_{n+1,p}.$$

On n'effectue jamais des opérations sur les colonnes (ou les lignes) simultanément : il y a un ordre dans lequel on opère. Il convient de bien le préciser, car le résultat de la série d'opérations dépend de l'ordre dans lequel elles ont été effectuées.

2. En conséquence de l'égalité établie, à p fixé, la suite $(\Delta_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. On détermine sa première valeur pour obtenir le résultat.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La suite $(\Delta_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante d'après la question précédente.

Or : $$\Delta_{0,p} = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{0}{1} & \cdots & \binom{0}{p-1} \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{p-1}{0} & \binom{p-1}{1} & \cdots & \binom{p-1}{p-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 1 \end{vmatrix} = 1$$

puisqu'il s'agit du déterminant d'une matrice triangulaire inférieure. D'où :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Delta_{n,p} = 1.$$

Exercice 1.3 : Calcul de déterminant par récurrence d'ordre 1*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère le déterminant de taille $2n$:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & & & \iddots & 0 \\ \vdots & & a & b & & \vdots \\ \vdots & & b & a & & \vdots \\ 0 & \iddots & & & \ddots & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

1. Calculer D_1 et D_2.
2. Trouver une relation liant D_{n+1} à D_n.
3. En déduire D_n.

1. Cette question initiale est essentielle pour vous aider à saisir la structure du déterminant. Même si elle n'était pas posée, il serait dans votre intérêt de vous poser cette question. D_1 est un déterminant de taille 2 qu'on va pouvoir calculer directement.

Pour $n = 1$, on obtient :

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2.$$

Ensuite, D_2 est un déterminant de taille 4 : pour le calculer, on va utiliser les formules de développement par rapport aux lignes ou colonnes et se ramener à D_1.

Développons D_2 par rapport à la première ligne :

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & b & a \\ b & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Développons chacun des deux déterminants par rapport à leur dernière ligne :

$$D_2 = a^2 \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} - b^2 \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2(a^2 - b^2) - b^2(a^2 - b^2) = (a^2 - b^2)^2.$$

2. Inspirons-nous du calcul de D_2 et exprimons D_{n+1} en fonction de D_n *via* des développements par rapport à certaines lignes ou colonnes.

Il faut bien remarquer ici que D_{n+1} est un déterminant de taille $2n+2$ alors que D_n est un déterminant de taille $2n$. Il faudra donc utiliser deux fois les formules de développement par rapport aux lignes ou colonnes pour passer de D_{n+1} à D_n.

Commençons par développer D_{n+1} par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned}
D_{n+1} &= a\begin{vmatrix}
a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b & 0\\
0 & \ddots & & & \iddots & 0 & \vdots\\
\vdots & & a & b & & \vdots & \vdots\\
\vdots & & b & a & & \vdots & \vdots\\
0 & \iddots & & & \ddots & 0 & \vdots\\
b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a & 0\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a
\end{vmatrix}\\
&\quad + (-1)^{1+2n+2} b\begin{vmatrix}
0 & a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b\\
\vdots & 0 & \ddots & & & \iddots & 0\\
\vdots & \vdots & & a & b & & \vdots\\
\vdots & \vdots & & b & a & & \vdots\\
\vdots & 0 & \iddots & & & \ddots & 0\\
0 & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a\\
b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{vmatrix}\\
&= a\underbrace{\begin{vmatrix}
a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b & 0\\
0 & \ddots & & & \iddots & 0 & \vdots\\
\vdots & & a & b & & \vdots & \vdots\\
\vdots & & b & a & & \vdots & \vdots\\
0 & \iddots & & & \ddots & 0 & \vdots\\
b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a & 0\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a
\end{vmatrix}}_{\text{de taille } 2n+1} - b\underbrace{\begin{vmatrix}
0 & a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b\\
\vdots & 0 & \ddots & & & \iddots & 0\\
\vdots & \vdots & & a & b & & \vdots\\
\vdots & \vdots & & b & a & & \vdots\\
\vdots & 0 & \iddots & & & \ddots & 0\\
0 & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a\\
b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{vmatrix}}_{\text{de taille } 2n+1}
\end{aligned}$$

Lorsqu'on développe ainsi un déterminant par rapport à la première ligne, il faut bien prendre soin de déterminer quelles sont les nouvelles premières lignes et colonnes.

Ensuite, on développe ces deux déterminants par rapport à la dernière ligne :

$$\begin{aligned}
D_{n+1} &= a^2(-1)^{2n+1+2n+1}D_n - (-1)^{1+2n+1}b^2 D_n\\
&= a^2 D_n - b^2 D_n\\
&= (a^2 - b^2)D_n.
\end{aligned}$$

3. La relation précédemment trouvée montre que la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique. De plus, nous connaissons son premier terme D_1 : nous allons donc pouvoir exprimer explicitement D_n en fonction de n.

La suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison a^2-b^2. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D_n = (a^2-b^2)^{n-1}D_1.$$

De plus, $D_1 = a^2-b^2$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D_n = (a^2-b^2)^n.$$

Exercice 1.4 : Déterminant par récurrence linéaire d'ordre 2*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le déterminant de taille n suivant, dit *tridiagonal* :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & c & & (0) \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c \\ (0) & & b & a \end{vmatrix} \quad \text{où } (a,b,c)\in\mathbb{K}^3, b\neq 0, c\neq 0.$$

1. Développer D_n par rapport à la première colonne.
2. En déduire une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 vérifiée par la suite de terme général D_n.
3. Exprimer D_n en fonction de n. On ne cherchera pas à expliciter les solutions de l'équation caractéristique.
4. Que dire si b ou c est nul ?

1. On suit l'indication de l'énoncé. Mais cela implique d'écrire des déterminants d'ordre $n-1$, donc définis uniquement si $n \geqslant 2$.

Supposons $n \geqslant 2$. Le développement par rapport à la première colonne donne :

$$D_n = a\underbrace{\begin{vmatrix} a & c & & (0) \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c \\ (0) & & b & a \end{vmatrix}}_{\text{de taille } n-1} - b\underbrace{\begin{vmatrix} c & 0 & 0 & & (0) \\ b & a & c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c \\ (0) & & & b & a \end{vmatrix}}_{\text{de taille } n-1}.$$

2. On reconnaît D_{n-1} pour le premier déterminant, mais le second est un peu plus compliqué. C'est en le développant par rapport à la première ligne (qui ne compte qu'un coefficient non nul) que l'on va pouvoir conclure. Cette fois, on obtiendra un déterminant de taille $n-2$, ce qui n'a de sens que si $n \geqslant 3$.

En supposant $n \geqslant 3$, on obtient, en développant par rapport à la première ligne,

$$\begin{vmatrix} c & 0 & 0 & & (0) \\ b & a & c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c \\ (0) & & & b & a \end{vmatrix} = cD_{n-2}.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 3$, $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$.

3. Il ne reste plus qu'à appliquer les formules du cours, mais aussi à calculer les deux premiers termes.

La suite $(D_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

- Les deux premiers termes de la suite sont

$$D_1 = \begin{vmatrix} a \end{vmatrix} = a \quad \text{et} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a & c \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - bc.$$

- L'équation caractéristique de la relation de récurrence est

$$\text{(C)} \qquad x^2 - ax + bc = 0.$$

Il faut distinguer deux cas, selon qu'il y a deux racines simples ou une double.

► Supposons $a^2 - 4bc \neq 0$: (C) admet alors deux racines distinctes r et s. On sait qu'on dispose de deux complexes λ et μ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad D_n = \lambda r^n + \mu s^n.$$

Les deux premiers termes fournissent le système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \lambda r & + & \mu s & = & a \\ \lambda r^2 & + & \mu s^2 & = & a^2 - bc \end{array} \right. .$$

Comme indiqué dans l'énoncé, on va résoudre ce système sans expliciter r et s. Mais on gardera en tête qu'on connaît malgré tout la somme et le produit des racines d'une équation du second degré en fonction de ses coefficients.

Il n'est pas rare que les relations sur la somme et sur le produit des racines d'un polynôme du second degré permettent de simplifier des calculs utilisant ces racines, en particulier en évitant de les expliciter.

r et s étant racines de (C), on connaît leur somme et leur produit :

$$r + s = a \quad \text{et} \quad rs = bc.$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \lambda r & + & \mu s & = & r+s \\ \lambda r^2 & + & \mu s^2 & = & r^2+rs+s^2 \end{cases},$$

qui donne, en soustrayant r fois la première équation à la seconde,

$$\begin{cases} \lambda r & + & \mu s & = & r+s \\ & & \mu s(s-r) & = & s^2 \end{cases}.$$

Comme b et c ne sont pas nuls, $rs = bc$ non plus, donc $s \neq 0$. En utilisant également le fait que $s \neq r$ (et donc $s - r \neq 0$), on en déduit $\mu = \frac{s}{s-r}$, puis $\lambda = -\frac{r}{s-r}$, et finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D_n = \frac{s^{n+1} - r^{n+1}}{s-r}.$$

Lorsque l'équation caractéristique a une racine double non nulle, on connaît également la forme de la suite récurrente.

▶ Supposons $a^2 - 4bc = 0$: (C) a une racine double, qui est $\frac{a}{2}$.
Notons que $a \neq 0$ car sinon, avec $a^2 - 4bc = 0$, on en tirerait $bc = 0$, et donc b ou c nul, ce qui n'est pas par hypothèse. Ainsi, on peut prendre deux scalaires λ et μ tels que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$D_n = (\lambda + \mu n)\left(\frac{a}{2}\right)^n.$$

Or, l'égalité $a^2 - 4bc = 0$ donne $bc = \left(\frac{a}{2}\right)^2$; ce qui permet de simplifier D_2 :

$$D_2 = a^2 - bc = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2 = 3\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Par suite, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{a}{2} = a \\ (\lambda+2\mu)\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = 3\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \end{cases},$$

qu'on peut simplifier puisque $a \neq 0$:

$$\begin{cases} \lambda+\mu = 2 \\ \lambda+2\mu = 3 \end{cases}.$$

Le couple $(\lambda, \mu) = (1, 1)$ est solution évidente, et c'est la seule puisque ce système est de déterminant non nul, donc de Cramer. Finalement,

$$D_n = (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n.$$

L'hypothèse faite sur b et c est utilisée à plusieurs reprises : elle entraîne $s \neq 0$, ce qui permet de simplifier par s dans le premier cas, mais aussi $a \neq 0$, ce qui justifie les calculs dans le second.

4. Ce cas particulier ne pose pas de problème. En général, on attend dans ce genre de question une discussion sur la validité des formules générales : restent-elles valables dans les cas particuliers qui ont dû être exclus au cours de l'étude précédente ?

Si b ou c est nul, le déterminant est triangulaire, et vaut $D_n = a^n$. On peut vérifier que les formules précédentes restent valables :

- Si $a = 0$, l'équation caractéristique (C) se réduit à $x^2 = 0$, qui a pour racine double 0. Dans ce cas, l'égalité $D_n = (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n$ est bien satisfaite, puisque $D_n = 0$ et a aussi.
- Si $a \neq 0$, l'équation caractéristique (C) se réduit à $x^2 - ax = 0$, c'est-à-dire $x(x-a) = 0$, qui a deux solutions 0 et a distinctes. Dans ce cas, l'expression $\frac{a^{n+1}-0^{n+1}}{a-0} = a^n$ est bien égale à D_n.

En conclusion, les formules établies restent valides même si b ou c s'annulent.

Exercice 1.5 : Calcul par somme de colonnes*

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, dont les colonnes sont notées $A_1, \dots, A_n$. On considère la matrice B dont les colonnes, notées $B_1, \dots, B_n$, sont définies par

$$\forall\, j \in [\![1,n]\!], \quad B_j = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq j}} A_k.$$

1. Exprimer le déterminant de B en fonction du déterminant de A.
2. En déduire le calcul du déterminant de la matrice suivante (où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$) :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & 0 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_n & \cdots & \cdots & a_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

1. La matrice B est définie colonne par colonne, à partir des colonnes de A. Nous allons donc chercher à calculer son déterminant par opérations sur les colonnes.

Posons $S = A_1 + \cdots + A_n \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. En ajoutant toutes les colonnes à la première dans le déterminant de B, on obtient alors, par linéarité par rapport à la première colonne,

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(B_1, B_2, \dots, B_n) \\ &= \det((n-1)S, B_2, \dots, B_n) \\ &= (n-1)\det(S, B_2, \dots, B_n). \end{aligned}$$

En soustrayant la première colonne à toutes les autres, il vient, par linéarité successive par rapport à chacune des colonnes 2 à n,

$$\begin{aligned}\det(B) &= (n-1)\det(S, -A_2, \ldots, -A_n)\\ &= (-1)^{n-1}(n-1)\det(S, A_2, \ldots, A_n).\end{aligned}$$

Enfin, remarquons que $S - \sum_{k=2}^{n} A_k = A_1$. Donc, en soustrayant toutes les colonnes à la première, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}\det(B) &= (-1)^{n-1}(n-1)\det(A_1, A_2, \ldots, A_n)\\ &= (-1)^{n-1}(n-1)\det(A).\end{aligned}$$

2. L'énoncé explique comment construire la matrice B à partir de la matrice A. Il nous faut ici effectuer la démarche inverse : à partir de la matrice B donnée dans l'énoncé, on cherche à définir la matrice A qui lui est associée. Il s'agit donc d'exprimer les colonnes de A en fonction de celles de B. Or, si pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$B_j = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n\\ k \neq j}} A_k,$$

alors, en sommant ces égalités pour $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\sum_{j=1}^{n} B_j = (n-1)\sum_{k=1}^{n} A_k,$$

et donc

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad A_k = \sum_{j=1}^{n} A_j - B_k = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} B_j - B_k.$$

On va ainsi pouvoir définir la matrice A à partir de B.

Considérons la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes, notées $A_1, \ldots, A_n$, sont définies par

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad A_k = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} B_j - B_k.$$

Calculons :

$$\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} B_j = \frac{1}{n-1}\begin{pmatrix}(n-1)a_1\\ \vdots\\ (n-1)a_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}.$$

Ainsi, A est la matrice diagonale $\operatorname{diag}(a_1, \cdots, a_n)$, et on vérifie que la matrice associée à A par la procédure de l'énoncé est précisément la matrice B.

On peut donc appliquer la formule obtenue à la question précédente :

$$\begin{aligned}\det(B) &= \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & 0 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_n & \cdots & \cdots & a_n & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)\det(A) \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)\prod_{i=1}^{n} a_i.\end{aligned}$$

Exercice 1.6 : Déterminant d'une somme*

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Déterminer toutes les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\forall\, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(A+B) = \det(A) + \det(B).$$

On va raisonner par conditions nécessaires. Considérons A une telle matrice, et regardons ce que nous pouvons en dire. Une première idée est d'étudier ce que donne cette égalité lorsque $B = A$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que

$$\forall\, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(A+B) = \det(A) + \det(B).$$

En particulier, on obtient pour $B = A$:

$$\det(2A) = 2\det(A), \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2^n \det(A) = 2\det(A).$$

Puisque $n \geqslant 2$, il en résulte que $\det(A) = 0$ et que A n'est pas inversible.

Le déterminant n'est pas une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Non seulement $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A) \neq \lambda \det(A)$ en général, mais surtout le déterminant d'une somme n'est pas la somme des déterminants (sauf cas particuliers) : $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Puisque A est non inversible, elle satisfait plus précisément :

$$\forall\, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(A+B) = \det(B).$$

Bien sûr, cette condition est bien satisfaite si A est la matrice nulle. Et il paraît difficile qu'il en soit autrement. Raisonnons pour cela par l'absurde en supposant A non nulle. Pour aboutir à une contradiction, on va chercher une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et telle que $A + B$ ne soit pas inversible. Toute la difficulté est de construire une telle matrice. Pour cela, arrangeons-nous pour que $A + B$ possède une colonne nulle, ce qui nous assurera que $\det(A+B) = 0$. Les autres colonnes de B nous intéressent peu, elles doivent cependant être choisies de telle sorte que B soit inversible.

Supposons $A \neq O_n$. Il existe donc $i \in [\![1, n]\!]$ tel que la i-ème colonne de A, notée $C_i(A)$ dans la suite, est non nulle.
D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille libre $(-C_i(A))$ en une base $(B_1, \ldots B_{i-1}, -C_i(A), B_{i+1}, \ldots, B_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Prenons alors pour B la matrice (donnée en colonnes) :

$$B = (B_1| \ldots |B_{i-1}| - C_i(A)|B_{i+1}| \ldots |B_n).$$

La matrice B est inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ car la famille de ses vecteurs colonnes est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. De plus, $A + B$ est égale à

$$(C_1(A)+B_1| \ldots |C_{i-1}(A)+B_{i-1}|0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}|C_{i+1}(A)+B_{i+1}| \ldots |C_n(A)+B_n).$$

La i-ème colonne de $A + B$ étant nulle, cette matrice n'est pas inversible.
Pour la matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ainsi construite, l'équation devient :

$$0 = \det(A + B) = \det(B) \neq 0.$$

D'où une contradiction. Ainsi, A est nécessairement la matrice nulle.
Et réciproquement, la matrice $A = O_n$ satisfait évidemment la condition de l'énoncé.
En conclusion, seule la matrice nulle est solution de cette équation.

Exercice 1.7 : Déterminant d'un endormorphisme*

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}_n[X])$ définie par

$$f(P) = P - P'.$$

1. Calculer $\det(f)$.
2. On considère l'application $g \in \mathscr{L}(\mathbb{K}_n[X])$ définie par

$$g(P) = P + P' + P'' + \cdots + P^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}.$$

Déterminer $g \circ f(P)$ pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et en déduire $\det(g)$.
3. Retrouver la valeur de $\det(g)$ en écrivant la matrice de g dans la base canonique.

Rappelons que le déterminant d'un endomorphisme est le déterminant de sa matrice dans n'importe quelle base. Cela autorise de choisir la base la mieux adaptée aux calculs. L'énoncé évoque la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, on va constater que cette base est tout à fait propice aux calculs.

1. Commençons par remarquer que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. Considérons pour cela l'endomorphisme dérivation D de $\mathbb{K}_n[X]$, qui à tout polynôme P associe son polynôme dérivé P'. Alors $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}_n[X]} - D$, et f est bien un endomorphisme de

$\mathbb{K}_n[X]$ en tant que combinaison linéaire de deux endomorphismes de $\mathbb{K}_n[X]$. Pour calculer son déterminant, écrivons la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

Notons $\mathscr{C} = (1, X, X^2, \cdots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Calculons :

$f(1) = 1, \quad f(X) = X-1, \quad f(X^2) = X^2-2X, \quad \dots \quad f(X^n) = X^n-nX^{n-1}.$

Ainsi, la matrice de f dans $\mathscr{C}$ s'écrit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice triangulaire supérieure, donc son déterminant est le produit des coefficients diagonaux, à savoir 1. Ainsi :

$$\det(f) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)) = 1.$$

2. Là encore, on vérifie facilement que g est bien un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ par stabilité de $\mathscr{L}(\mathbb{K}_n[X])$ par composition et combinaison linéaire, en remarquant que :

$$g = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}_n[X]} + D + D^2 + \cdots + D^n.$$

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Alors :

$$\begin{aligned} g \circ f(P) = g(P - P') &= \sum_{k=0}^{n} (P - P')^{(k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} - P^{(k+1)} \quad \text{par linéarité de la dérivée } k\text{-ième} \\ &= P^{(0)} - P^{(n+1)} \quad \text{par télescopage} \\ &= P - 0_{\mathbb{K}_n[X]} \quad \text{car } \deg(P) \leqslant n. \end{aligned}$$

Donc $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}_n[X]}$, de sorte que :

$$\det(g \circ f) = \det(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}_n[X]}) = 1.$$

Par ailleurs :

$$\det(g \circ f) = \det(f) \times \det(g) = \det(g).$$

On obtient $\det(g) = 1$.

On peut aussi raisonner au niveau des applications :

$$\begin{aligned}
g \circ f &= \left(\sum_{k=0}^{n} D^k\right) \circ (\mathrm{Id}_{\mathbb{K}_n[X]} - D) \\
&= \sum_{k=0}^{n} D^k \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{K}_n[X]} - \sum_{k=0}^{n} D^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (D^k - D^{k+1}) \\
&= D^0 - D^{n+1} \qquad \text{par télescopage} \\
&= \mathrm{Id}_{\mathbb{K}_n[X]} \qquad \text{car } D^{n+1} = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}_n[X])}.
\end{aligned}$$

3. On procède de même qu'à la première question.

Calculons les images des vecteurs de la base canonique $\mathscr{C}$ par g :

$$g(1) = 1, \quad g(X) = X + 1, \quad g(X^2) = X^2 + 2X + 2.$$

Plus généralement, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$g(X^k) = X^k + kX^{k-1} + \cdots + \frac{k!}{i!} X^i + \cdots + k!.$$

On en déduit la matrice représentative de g dans $\mathscr{C}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 & \cdots & n! \\ 0 & 1 & 2 & 6 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 3 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire supérieure avec tous ses coefficients diagonaux égaux à 1, donc on retrouve bien que $\det(g) = 1$.

Exercice 1.8 : Déterminant de Hurwitz*

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$, et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que le déterminant suivant est un polynôme de degré au plus 1 :

$$H_n(X) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + X & a + X & \ldots & a + X \\ b + X & \lambda_2 + X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a + X \\ b + X & \ldots & b + X & \lambda_n + X \end{vmatrix}.$$

2. Calculer le déterminant D_n de taille n suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & a & \ldots & a \\ b & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \ldots & b & \lambda_n \end{vmatrix}.$$

3. Calculer le déterminant Δ_n de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & a & \ldots & a \\ a & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \ldots & a & \lambda_n \end{vmatrix}.$$

1. Justifions tout d'abord que $H_n(X)$ est bien un polynôme. Pour cela, remarquons que le déterminant d'une matrice s'obtient par sommes et produits de ses coefficients, comme le montrent par exemple les formules de calcul du déterminant par développement suivant une ligne ou une colonne.

Puisqu'un déterminant d'une matrice s'obtient par sommes et produits de ses coefficients, $H_n(X)$ est bien un polynôme.

Il n'est à première vue pas évident du tout que son degré soit inférieur à 1, et que les termes de degré supérieur à 2 se simplifient. On va, pour le constater aisément, procéder à des opérations élémentaires afin que seule la première colonne dépende encore de X.

Retranchons la première colonne C_1 à toutes les autres en effectuant les opérations élémentaires $C_i \leftarrow C_i - C_1$ pour tout $2 \leqslant i \leqslant n$:

$$H_n(X) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + X & a - \lambda_1 & a - \lambda_1 & \ldots & a - \lambda_1 \\ b + X & \lambda_2 - b & a - b & \ldots & a - b \\ b + X & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a - b \\ b + X & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n - b \end{vmatrix}.$$