

Pierre Bernard | Mathieu Mansuy
Anne-Charline Chalmin | Oscar Devys | Marie Virat
Sylvain Gugger

MATHS

PT

**EXERCICES
INCONTOURNABLES**

2^e édition

DUNOD

l'intelligence

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

Retrouvez nos ouvrages pour les prépas scientifiques ici



<http://dunod.link/prepassc>

NOUS NOUS ENGAGEONS EN FAVEUR DE L'ENVIRONNEMENT :



Nos livres sont imprimés sur des papiers certifiés pour réduire notre impact sur l'environnement.



Le format de nos ouvrages est pensé afin d'optimiser l'utilisation du papier.



Depuis plus de 30 ans, nous imprimons 70 % de nos livres en France et 25 % en Europe et nous mettons tout en œuvre pour augmenter cet engagement auprès des imprimeurs français.



Nous limitons l'utilisation du plastique sur nos ouvrages (film sur les couvertures et les livres).

© Dunod, 2024
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-086473-7

Table des matières

Algèbre

1 Déterminants	15
1.1 : Calcul de déterminants de taille 4	15
1.2 : Avec des coefficients binomiaux	17
1.3 : Calcul de déterminant par récurrence d'ordre 1*	18
1.4 : Déterminant par récurrence linéaire d'ordre 2*	21
1.5 : Calcul par somme de colonnes*	24
1.6 : Déterminant d'une somme*	26
1.7 : Déterminant d'un endomorphisme*	27
1.8 : Déterminant de Hurwitz*	30
1.9 : Déterminant de Vandermonde	33
1.10 : Polynômes de Tchebychev dans un déterminant	37
1.11 : Déterminant d'une famille de vecteurs*	40
2 Algèbre linéaire	43
2.1 : Étude d'un projecteur	43
2.2 : Projecteurs et trace	45
2.3 : Somme de projecteurs	47
2.4 : Racines carrées de $-I_n$	48
2.5 : Réduction des matrices de trace nulle	51
2.6 : Matrices de rang 1	52
2.7 : Somme de sous-espaces de polynômes	55
2.8 : Utilisation des polynômes de Lagrange	57
3 Réduction	61
3.1 : Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de polynômes	61
3.2 : Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de fonctions	64
3.3 : Réduction d'une matrice de taille 3	67
3.4 : Diagonalisation	70
3.5 : Réduction	74

3.6 : Trigonalisation	77
3.7 : Une suite récurrente linéaire	80
3.8 : Réduction d'une matrice à paramètres	84
3.9 : Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit	86
3.10 : Diagonalisation simultanée	88
3.11 : Diagonalisabilité et sous-espaces stables	91
4 Espaces euclidiens	95
4.1 : Produit scalaire matriciel	95
4.2 : Une caractérisation des bases orthonormées	97
4.3 : Famille de polynômes orthogonaux	98
4.4 : Un problème de minimisation	102
4.5 : Une caractérisation des isométries antisymétriques	104
4.6 : Isométries matricielles	106
4.7 : Isométries du plan	108
4.8 : Isométries de l'espace	109
4.9 : Centre de $O(E)$	111
4.10 : Décomposition d'une isométrie en produit de réflexions	113
4.11 : Applications conservant le produit vectoriel	116
4.12 : Quotients de Rayleigh	118
4.13 : Décomposition polaire	121

Géométrie

5 Topologie de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3, fonctions vectorielles	127
5.1 : Calcul de déterminants par dérivation	127
5.2 : Approximation d'une fonction par interpolation	129
5.3 : Une application des formules de Taylor	132
5.4 : Un calcul de limite	134
5.5 : Ouverts et fermés de \mathbb{R} , de \mathbb{R}^2 et de \mathbb{R}^3	136
6 Courbes paramétrées du plan	139
6.1 : Tracé de la cardioïde	139
6.2 : Tracé de l'astroïde	142
6.3 : Étude d'une courbe avec asymptotes	146
6.4 : Longueur de la deltoïde	151
6.5 : Un paramétrage normal	153
6.6 : Repère de Frenet et éléments de courbure	154
6.7 : Enveloppe d'une famille de droites	157
6.8 : Développée de la cycloïde	159
6.9 : Droites tangentes et normales	162

7 Courbes et surfaces de l'espace	165
7.1 : Parapluie de Whitney	165
7.2 : Paraboloïdes	167
7.3 : Hélicoïde	171
7.4 : Hyperboloïde à une nappe	172
7.5 : Conoïde de Plücker	176
7.6 : Une surface de révolution	178
7.7 : Ruban de Möbius	182
8 Coniques	185
8.1 : Étude et tracé d'une conique (ellipse et hyperbole)	185
8.2 : Étude et tracé d'une conique (parabole)	188
8.3 : Intersections d'une surface avec des plans	191
8.4 : Équation réduite à partir de la définition géométrique	194
8.5 : Réflexion sur une ellipse	198

Analyse

9 Séries numériques	205
9.1 : Série avec terme général défini par récurrence	205
9.2 : Équivalents de sommes et de restes	207
9.3 : Développement asymptotique	209
9.4 : Transformation d'Abel	213
9.5 : Utilisation d'un produit de Cauchy	216
9.6 : Série alternée un peu cachée	218
9.7 : Règle de Raabe-Duhamel	222
10 Séries entières	227
10.1 : Calculs de sommes de séries numériques	227
10.2 : Calculs de rayons de convergence à l'aide de la règle de d'Alembert	230
10.3 : Calculs de rayons de convergence avec la définition	231
10.4 : Domaine de convergence	233
10.5 : Convergence et calcul de la somme	235
10.6 : Théorème d'Abel radial	237
10.7 : Détermination d'une somme	240
10.8 : Développement d'une fonction en série entière	242
10.9 : Calcul de la somme d'une série numérique	243
10.10 : Nombres de Catalan	247
10.11 : Étude du comportement au bord	251
11 Intégrales généralisées	253
11.1 : Un premier calcul d'intégrale	253
11.2 : Intégration par parties	256

11.3 : Deux intégrales trigonométriques	257
11.4 : Changement de variable	261
11.5 : Convergence de l'intégrale de Dirichlet	263
11.6 : Convergence et calcul d'une famille d'intégrales	267
11.7 : Calcul d'intégrales généralisées à l'aide de séries	269
11.8 : Calcul de l'intégrale de Dirichlet	272
12 Intégrales à paramètres	277
12.1 : Calcul d'une intégrale à paramètre	277
12.2 : Prolongement \mathcal{C}^∞	281
12.3 : Transformée de Laplace du sinus cardinal	283
12.4 : Calcul de l'intégrale de Dirichlet	285
12.5 : Intégrale de Gauss	289
12.6 : Fonction Γ d'Euler	292
12.7 : Théorème de d'Alembert-Gauss	296
13 Équations différentielles	303
13.1 : À partir d'une solution de l'équation homogène	303
13.2 : Utilisation d'un changement de fonction	305
13.3 : Utilisation d'un changement de variable	309
13.4 : Utilisation de séries entières (cas régulier)	310
13.5 : Utilisation de séries entières (cas singulier)	313
13.6 : Lemme de Grönwall	317
14 Fonctions de plusieurs variables	319
14.1 : Étude de continuité	319
14.2 : Dérivée directionnelle	320
14.3 : À propos du théorème de Schwarz	321
14.4 : Une équation aux dérivées partielles	324
14.5 : Équation des cordes vibrantes	326
14.6 : Recherche d'extremum	329
14.7 : Extremums sur un fermé-borné	331
14.8 : Tangente à une hyperbole	333
14.9 : Fonctions homogènes	334
14.10 : Courbe définie de manière implicite	337

Probabilités

15 Espaces probabilisés	345
15.1 : Loi de succession de Laplace	345
15.2 : Ruine du joueur	347
15.3 : Apparition de mots dans une suite de piles ou faces	350
15.4 : Probabilité de survie d'une espèce	353

15.5 : Lemmes de Borel-Cantelli	356
15.6 : Produit eulérien	359
16 Variables aléatoires discrètes	361
16.1 : Natalité	361
16.2 : Cartes à collectionner	362
16.3 : Nombre de poussins	365
16.4 : Compétition d'athlétisme	366
16.5 : Un jeu de pile ou face	369
16.6 : Temps de jeu à la roulette	371
16.7 : Loi conjointe et lois marginales	376
16.8 : Matrice aléatoire	379
16.9 : Processus de Galton-Watson	382
16.10 : Lois généralisées de Bernoulli	387
16.11 : Une inégalité de concentration	393
Index	399

Avant-propos

Cet ouvrage est conçu pour les élèves de deuxième année de classes préparatoires scientifiques en filière PT.

Il propose de mettre en pratique les notions abordées en cours de mathématiques par le biais d'exercices. Chacun est assorti d'une correction détaillée, dans laquelle l'accent est mis sur la méthode qui mène à la solution. Comme l'indique le titre, l'objectif a été de couvrir, pour l'ensemble des chapitres du programme, non seulement toutes les notions à connaître, mais encore les techniques, astuces essentielles, ainsi que quelques exercices-types, classiques ou de synthèse : en particulier, on progresse, au sein de chaque chapitre, des techniques les plus fondamentales d'application du cours vers des techniques plus avancées pouvant ressembler à des exercices d'oral de concours.

Cette 2^e édition tient compte de toutes les nouveautés et modifications du nouveau programme, valable à partir de l'année 2022-2023. Au-delà d'une mise à jour nécessaire liée au changement de programme, nous avons cherché à améliorer et approfondir l'édition précédente. Il en résulte une centaine de pages supplémentaires, dédiées pour moitié à l'approfondissement des exercices existants, et pour moitié au traitement des nouveaux exercices.

Bien entendu, nous avons veillé à ce que ces apports respectent les principes qui ont fait le succès de cette collection :

- fournir un panel le plus représentatif possible des exercices-types, compétences et notions, sur chaque chapitre ;
- donner, pour chaque exercice, d'une part une rédaction exemplaire conforme aux attendus des épreuves écrites – tout en mettant en relief les canevas susceptibles de resservir –, d'autre part une explicitation des démarches inductives et déductives sous-jacentes – afin d'entraîner l'esprit des lecteurs à aborder des exercices originaux.

Enfin, nous souhaitons ici remercier les auteurs historiques, sur le travail desquels nous nous sommes fondés pour cette édition : Julien Freslon, Sylvain Gugger, Jérôme Poineau et Daniel Fredon.

Les auteurs,

Pierre BERNARD
(coordonnateur, référent T_EX)

Mathieu MANSUY
(référent PC et probabilités)


Oscar DEVYS
(référent MP)



Anne-Charline CHALMIN
(référente PSI)

Marie VIRAT
(référente PT)

Structure de l'ouvrage

Le livre est divisé en 16 chapitres, chacun étant consacré à une partie du programme. Nous avons regroupé les chapitres selon les thèmes classiques : Algèbre, Géométrie, Analyse et Probabilités. Au sein d'un même chapitre, les exercices, classés par ordre croissant de difficulté, ont été choisis de façon à passer en revue les notions à connaître, mais aussi à présenter les techniques susceptibles d'être utilisées.

En ce qui concerne les corrections, nous avons choisi de séparer clairement la réflexion préliminaire, comprenant analyse du problème et tâtonnements, de la rédaction finale, rigoureuse et précise. Cette dernière étape est signalée, dans le texte, par la présence d'un liseré gris sur la gauche et du pictogramme . Insistons sur le fait que nous ne prétendons nullement présenter l'unique cheminement permettant d'aboutir à la solution d'un exercice donné, ni la seule rédaction acceptable. Dans les deux cas, bien des possibilités existent.

Par ailleurs, lorsque nous avons souhaité mettre en lumière un point important, nous l'avons rédigé sur un fond grisé et indiqué par . De même, la présence d'un piège dont il faut se méfier est signalée par .

Cet ouvrage a été rédigé en vue d'une utilisation thématique, c'est-à-dire non linéaire :

- De manière intuitive, un étudiant qui veut approfondir un chapitre particulier s'attellera aux exercices du chapitre en question. Parfois, un exercice utilisera des notions d'autres chapitres pas encore étudiés ; dans ce cas l'énoncé de l'exercice le rappellera.
- De manière plus précise, il se référera à l'index en fin d'ouvrage, afin d'aller directement travailler les notions de son choix. Ainsi, un étudiant qui voudrait travailler spécifiquement l'utilisation du *lemme des coalitions* en probabilités n'aura pas besoin de feuilleter tous les exercices de la quatrième partie, mais pourra se contenter de chercher l'entrée « coalitions (lemme des) » de l'index qui le renverra directement aux exercices mentionnant cette notion.

Remerciements

Pierre BERNARD et Anne-Charline CHALMIN souhaitent remercier leurs collègues du lycée Saliège :

- Mathieu LEROY-LERÊTRE, pour ses conseils sur T_EX,
- Emmanuel ROBIN, pour son expertise sur les programmes.

Mathieu MANSUY souhaite remercier Amandine POLET pour ses nombreux conseils, et a une pensée pour sa grand-mère Françoise.

Marie VIRAT souhaite remercier Dédé, Steph, Émeraude, Caro, Nicolas et Pierre pour leur soutien, leurs encouragements et leurs réflexions dans la réalisation de cet ouvrage.

Partie 1

Algèbre

Déterminants

Le lecteur fidèle de la série Exercices incontournables reconnaîtra une partie des exercices du chapitre 12 « Déterminants » de l'ouvrage PCSI-PTSI de la même collection. Ces exercices sont mis en évidence par une * dans leur titre.

Exercice 1.1 : Calcul de déterminants de taille 4

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Donner, sous forme factorisée, la valeur des déterminants suivants :

$$1. \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \qquad 2. \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

1. Pour calculer un déterminant de petite taille, on effectue des opérations élémentaires pour obtenir si possible une ligne ou une colonne avec tous les coefficients nuls sauf un. On développe ensuite suivant cette ligne ou cette colonne pour se ramener à un déterminant de taille plus petite.

Ici, il est facile d'avoir des 0 sur la première ligne ou dans la première colonne.



En retranchant la première colonne aux trois autres, puis en développant par rapport à la première ligne, on trouve :

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & b-a & b-a \\ a & b-a & c-a & c-a \\ a & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} \\ &= a \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = a(b-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} \end{aligned}$$

puisque $(b-a)$ peut se mettre en facteur de la première ligne. On retranche ensuite la première colonne aux deux autres et on développe par rapport à la

première ligne pour trouver :

$$D = a(b-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b-a & c-b & c-b \\ b-a & c-b & d-b \end{vmatrix} = a(b-a) \begin{vmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{vmatrix} \\ = a(b-a)[(c-b)(d-b) - (c-b)^2] = a(b-a)(c-b)(d-c).$$

2. Dans cette question, il n'est pas évident de faire apparaître des 0 sur toute une ligne (ou dans toute une colonne) sauf un élément. Si on veut le faire directement, il faudrait diviser par a , b ou c et donc traiter à part le cas où ce réel est nul.

Il y a plus simple en revanche : la somme des colonnes (ou des lignes) est constante. Donc, en effectuant une opération élémentaire, on peut obtenir une colonne avec 4 fois le même réel, qui pourra se mettre en facteur et donner une colonne de 1.



Il vaut mieux éviter de diviser par un paramètre de l'énoncé s'il peut être nul. Dans le cas des déterminants, la linéarité par rapport à chaque ligne/colonne permet souvent de contourner cette difficulté.



En effectuant $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, on trouve :

$$D = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+2c & c & c & b \\ a+b+2c & a & b & c \\ a+b+2c & b & a & c \\ a+b+2c & c & c & a \end{vmatrix} \\ = (a+b+2c) \begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 1 & a & b & c \\ 1 & b & a & c \\ 1 & c & c & a \end{vmatrix}.$$

On retranche ensuite la première ligne aux trois autres et on développe suivant la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 0 & a-c & b-c & c-b \\ 0 & b-c & a-c & c-b \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-c & b-c & c-b \\ b-c & a-c & c-b \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} \\ = (a-b) \begin{vmatrix} a-c & b-c \\ b-c & a-c \end{vmatrix} \\ = (a-b)[(a-c)^2 - (b-c)^2] \\ = (a-b)[(a-c+b-c)(a-c-b+c)] \\ = (a-b)^2(a+b-2c)$$

où l'on a développé le déterminant de taille 3 par rapport à sa dernière ligne. Au final le déterminant cherché vaut :

$$D = (a + b + 2c)(a - b)^2(a + b - 2c).$$

Exercice 1.2 : Avec des coefficients binomiaux

Pour tout couple $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on note $\Delta_{n,p}$ le déterminant d'ordre p suivant :

$$\Delta_{n,p} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p-1} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \binom{n+p-1}{1} & \cdots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix}.$$

1. Montrer, en effectuant des opérations sur les colonnes, que :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad \Delta_{n,p} = \Delta_{n+1,p}.$$

2. En déduire la valeur de $\Delta_{n,p}$.

1. Notons, pour commencer, que les coefficients de la première colonne peuvent être réécrits sous la forme $\binom{n+i-1}{0}$ pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, de sorte que le coefficient en position $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ du déterminant $\Delta_{n,p}$ s'écrit $\binom{n+i-1}{j-1}$.

Pour établir le lien entre $\Delta_{n+1,p}$ et $\Delta_{n,p}$, on exploite la relation de Pascal :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad \binom{m}{n-1} + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n}.$$



Si $n < p$, on obtient des coefficients binomiaux de la forme $\binom{q}{r}$ avec $q < r$. Par convention, ces coefficients sont nuls. Et cette convention est compatible avec la formule de Pascal.

Ainsi, dans le déterminant $\Delta_{n,p}$, si l'on ajoute les colonnes C_i et C_{i-1} (pour i entre 2 et p), on obtient la colonne i du déterminant $\Delta_{n+1,p}$.



Pour i parcourant les entiers de 2 à p (dans cet ordre), on effectue successivement les opérations élémentaires $C_i \leftarrow C_i + C_{i-1}$. On obtient par la relation de Pascal :

$$\Delta_{n,p} = \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p-1} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+2}{1} & \cdots & \binom{n+2}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+p-1}{0} & \binom{n+p}{1} & \cdots & \binom{n+p}{p-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p-1} \\ 1 & \binom{n+2}{1} & \cdots & \binom{n+2}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \binom{n+p}{1} & \cdots & \binom{n+p}{p-1} \end{vmatrix} \\ = \Delta_{n+1,p}.$$



On n'effectue jamais des opérations sur les colonnes (ou les lignes) simultanément : il y a un ordre dans lequel on opère. Il convient de bien le préciser, car le résultat de la série d'opérations dépend de l'ordre dans lequel elles ont été effectuées.

2. En conséquence de l'égalité établie, à p fixé, la suite $(\Delta_{n,p})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. On détermine sa première valeur pour obtenir le résultat.



Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La suite $(\Delta_{n,p})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante d'après la question précédente.

$$\text{Or : } \Delta_{0,p} = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{0}{1} & \cdots & \binom{0}{p-1} \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{p-1}{0} & \binom{p-1}{1} & \cdots & \binom{p-1}{p-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 1 \end{vmatrix} = 1$$

puisque'il s'agit du déterminant d'une matrice triangulaire inférieure. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta_{n,p} = 1.$$

Exercice 1.3 : Calcul de déterminant par récurrence d'ordre 1*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère le déterminant de taille $2n$:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & a & b & & \vdots \\ \vdots & & b & a & & \vdots \\ 0 & \ddots & & & \ddots & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

1. Calculer D_1 et D_2 .
2. Trouver une relation liant D_{n+1} à D_n .
3. En déduire D_n .

1. Cette question initiale est essentielle pour vous aider à saisir la structure du déterminant. Même si elle n'était pas posée, il serait dans votre intérêt de vous poser cette question. D_1 est un déterminant de taille 2 qu'on va pouvoir calculer directement.



Pour $n = 1$, on obtient :

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2.$$

Ensuite, D_2 est un déterminant de taille 4 : pour le calculer, on va utiliser les formules de développement par rapport aux lignes ou colonnes et se ramener à D_1 .



Développons D_2 par rapport à la première ligne :

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & b & a \\ b & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Développons chacun des deux déterminants par rapport à leur dernière ligne :

$$D_2 = a^2 \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} - b^2 \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2(a^2 - b^2) - b^2(a^2 - b^2) = (a^2 - b^2)^2.$$

2. Inspirons-nous du calcul de D_2 et exprimons D_{n+1} en fonction de D_n via des développements par rapport à certaines lignes ou colonnes.



Il faut bien remarquer ici que D_{n+1} est un déterminant de taille $2n + 2$ alors que D_n est un déterminant de taille $2n$. Il faudra donc utiliser deux fois les formules de développement par rapport aux lignes ou colonnes pour passer de D_{n+1} à D_n .



Commençons par développer D_{n+1} par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned}
 D_{n+1} &= a \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b & 0 \\ 0 & \ddots & & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & a & b & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & b & a & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & & & \ddots & 0 & \vdots \\ b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} \\
 &+ (-1)^{1+2n+2b} \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & a & b & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & b & a & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \\ b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
 &= a \underbrace{\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b & 0 \\ 0 & \ddots & & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & a & b & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & b & a & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & & & \ddots & 0 & \vdots \\ b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}}_{\text{de taille } 2n+1} - b \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & a & b & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & b & a & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \\ b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}}_{\text{de taille } 2n+1}
 \end{aligned}$$



Lorsqu'on développe ainsi un déterminant par rapport à la première ligne, il faut bien prendre soin de déterminer quelles sont les nouvelles premières lignes et colonnes.



Ensuite, on développe ces deux déterminants par rapport à la dernière ligne :

$$\begin{aligned}
 D_{n+1} &= a^2(-1)^{2n+1+2n+1}D_n - (-1)^{1+2n+1}b^2D_n \\
 &= a^2D_n - b^2D_n \\
 &= (a^2 - b^2)D_n.
 \end{aligned}$$

3. La relation précédemment trouvée montre que la suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique. De plus, nous connaissons son premier terme D_1 : nous allons donc pouvoir exprimer explicitement D_n en fonction de n .



La suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $a^2 - b^2$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D_n = (a^2 - b^2)^{n-1} D_1.$$

De plus, $D_1 = a^2 - b^2$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D_n = (a^2 - b^2)^n.$$

Exercice 1.4 : Déterminant par récurrence linéaire d'ordre 2*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le déterminant de taille n suivant, dit *tridiagonal* :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & c & & (0) \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c \\ (0) & & b & a \end{vmatrix} \quad \text{où } (a, b, c) \in \mathbb{K}^3, b \neq 0, c \neq 0.$$

1. Développer D_n par rapport à la première colonne.
2. En déduire une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 vérifiée par la suite de terme général D_n .
3. Exprimer D_n en fonction de n . On ne cherchera pas à expliciter les solutions de l'équation caractéristique.
4. Que dire si b ou c est nul ?

1. On suit l'indication de l'énoncé. Mais cela implique d'écrire des déterminants d'ordre $n - 1$, donc définis uniquement si $n \geq 2$.



Supposons $n \geq 2$. Le développement par rapport à la première colonne donne :

$$D_n = a \underbrace{\begin{vmatrix} a & c & & (0) \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c \\ (0) & & b & a \end{vmatrix}}_{\text{de taille } n-1} - b \underbrace{\begin{vmatrix} c & 0 & 0 & (0) \\ b & a & c & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ (0) & & \ddots & \ddots & c \\ & & & b & a \end{vmatrix}}_{\text{de taille } n-1}.$$

2. On reconnaît D_{n-1} pour le premier déterminant, mais le second est un peu plus compliqué. C'est en le développant par rapport à la première ligne (qui ne compte qu'un coefficient non nul) que l'on va pouvoir conclure. Cette fois, on obtiendra un déterminant de taille $n - 2$, ce qui n'a de sens que si $n \geq 3$.



En supposant $n \geq 3$, on obtient, en développant par rapport à la première ligne,

$$\begin{vmatrix} c & 0 & 0 & & (0) \\ b & a & c & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & c \\ (0) & & & & b & a \end{vmatrix} = cD_{n-2}.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 3$, $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$.

3. Il ne reste plus qu'à appliquer les formules du cours, mais aussi à calculer les deux premiers termes.



La suite $(D_n)_{n \geq 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

- Les deux premiers termes de la suite sont

$$D_1 = |a| = a \quad \text{et} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a & c \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - bc.$$

- L'équation caractéristique de la relation de récurrence est

$$(C) \quad x^2 - ax + bc = 0.$$

Il faut distinguer deux cas, selon qu'il y a deux racines simples ou une double.



► Supposons $a^2 - 4bc \neq 0$: (C) admet alors deux racines distinctes r et s . On sait qu'on dispose de deux complexes λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D_n = \lambda r^n + \mu s^n.$$

Les deux premiers termes fournissent le système

$$\begin{cases} \lambda r + \mu s = a \\ \lambda r^2 + \mu s^2 = a^2 - bc \end{cases}.$$

Comme indiqué dans l'énoncé, on va résoudre ce système sans expliciter r et s . Mais on gardera en tête qu'on connaît malgré tout la somme et le produit des racines d'une équation du second degré en fonction de ses coefficients.



Il n'est pas rare que les relations sur la somme et sur le produit des racines d'un polynôme du second degré permettent de simplifier des calculs utilisant ces racines, en particulier en évitant de les expliciter.



r et s étant racines de (C), on connaît leur somme et leur produit :

$$r + s = a \quad \text{et} \quad rs = bc.$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \lambda r + \mu s = r + s \\ \lambda r^2 + \mu s^2 = r^2 + rs + s^2 \end{cases},$$

qui donne, en soustrayant r fois la première équation à la seconde,

$$\begin{cases} \lambda r + \mu s = r + s \\ \mu s(s - r) = s^2 \end{cases}.$$

Comme b et c ne sont pas nuls, $rs = bc$ non plus, donc $s \neq 0$. En utilisant également le fait que $s \neq r$ (et donc $s - r \neq 0$), on en déduit $\mu = \frac{s}{s-r}$, puis $\lambda = -\frac{r}{s-r}$, et finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D_n = \frac{s^{n+1} - r^{n+1}}{s - r}.$$

Lorsque l'équation caractéristique a une racine double non nulle, on connaît également la forme de la suite récurrente.



► Supposons $a^2 - 4bc = 0$: (C) a une racine double, qui est $\frac{a}{2}$.

Notons que $a \neq 0$ car sinon, avec $a^2 - 4bc = 0$, on en tirerait $bc = 0$, et donc b ou c nul, ce qui n'est pas par hypothèse. Ainsi, on peut prendre deux scalaires λ et μ tels que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$D_n = (\lambda + \mu n) \left(\frac{a}{2}\right)^n.$$

Or, l'égalité $a^2 - 4bc = 0$ donne $bc = \left(\frac{a}{2}\right)^2$; ce qui permet de simplifier D_2 :

$$D_2 = a^2 - bc = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2 = 3 \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Par suite, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{a}{2} = a \\ (\lambda + 2\mu) \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 3 \left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{cases},$$

qu'on peut simplifier puisque $a \neq 0$:

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda + 2\mu = 3 \end{cases}.$$

Le couple $(\lambda, \mu) = (1, 1)$ est solution évidente, et c'est la seule puisque ce système est de déterminant non nul, donc de Cramer. Finalement,

$$D_n = (n + 1) \left(\frac{a}{2}\right)^n.$$



L'hypothèse faite sur b et c est utilisée à plusieurs reprises : elle entraîne $s \neq 0$, ce qui permet de simplifier par s dans le premier cas, mais aussi $a \neq 0$, ce qui justifie les calculs dans le second.

4. Ce cas particulier ne pose pas de problème. En général, on attend dans ce genre de question une discussion sur la validité des formules générales : restent-elles valables dans les cas particuliers qui ont dû être exclus au cours de l'étude précédente ?



Si b ou c est nul, le déterminant est triangulaire, et vaut $D_n = a^n$. On peut vérifier que les formules précédentes restent valables :

- Si $a = 0$, l'équation caractéristique (C) se réduit à $x^2 = 0$, qui a pour racine double 0. Dans ce cas, l'égalité $D_n = (n+1) \left(\frac{a}{2}\right)^n$ est bien satisfaite, puisque $D_n = 0$ et a aussi.
- Si $a \neq 0$, l'équation caractéristique (C) se réduit à $x^2 - ax = 0$, c'est-à-dire $x(x-a) = 0$, qui a deux solutions 0 et a distinctes. Dans ce cas, l'expression $\frac{a^{n+1} - 0^{n+1}}{a-0} = a^n$ est bien égale à D_n .

En conclusion, les formules établies restent valides même si b ou c s'annulent.

Exercice 1.5 : Calcul par somme de colonnes*

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dont les colonnes sont notées A_1, \dots, A_n . On considère la matrice B dont les colonnes, notées B_1, \dots, B_n , sont définies par

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad B_j = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} A_k.$$

1. Exprimer le déterminant de B en fonction du déterminant de A .
2. En déduire le calcul du déterminant de la matrice suivante (où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$) :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & 0 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_n & \cdots & \cdots & a_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

1. La matrice B est définie colonne par colonne, à partir des colonnes de A . Nous allons donc chercher à calculer son déterminant par opérations sur les colonnes.



Posons $S = A_1 + \dots + A_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. En ajoutant toutes les colonnes à la première dans le déterminant de B , on obtient alors, par linéarité par rapport à la première colonne,

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(B_1, B_2, \dots, B_n) \\ &= \det((n-1)S, B_2, \dots, B_n) \\ &= (n-1) \det(S, B_2, \dots, B_n). \end{aligned}$$

En soustrayant la première colonne à toutes les autres, il vient, par linéarité successive par rapport à chacune des colonnes 2 à n ,

$$\begin{aligned} \det(B) &= (n-1) \det(S, -A_2, \dots, -A_n) \\ &= (-1)^{n-1} (n-1) \det(S, A_2, \dots, A_n). \end{aligned}$$

Enfin, remarquons que $S - \sum_{k=2}^n A_k = A_1$. Donc, en soustrayant toutes les colonnes à la première, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \det(B) &= (-1)^{n-1} (n-1) \det(A_1, A_2, \dots, A_n) \\ &= (-1)^{n-1} (n-1) \det(A). \end{aligned}$$

2. L'énoncé explique comment construire la matrice B à partir de la matrice A . Il nous faut ici effectuer la démarche inverse : à partir de la matrice B donnée dans l'énoncé, on cherche à définir la matrice A qui lui est associée. Il s'agit donc d'exprimer les colonnes de A en fonction de celles de B . Or, si pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$B_j = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} A_k,$$

alors, en sommant ces égalités pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\sum_{j=1}^n B_j = (n-1) \sum_{k=1}^n A_k,$$

et donc

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad A_k = \sum_{j=1}^n A_j - B_k = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n B_j - B_k.$$

On va ainsi pouvoir définir la matrice A à partir de B .



Considérons la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes, notées A_1, \dots, A_n , sont définies par

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad A_k = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n B_j - B_k.$$

Calculons :

$$\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n B_j = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} (n-1)a_1 \\ \vdots \\ (n-1)a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, A est la matrice diagonale $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, et on vérifie que la matrice associée à A par la procédure de l'énoncé est précisément la matrice B .

On peut donc appliquer la formule obtenue à la question précédente :

$$\begin{aligned} \det(B) &= \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & 0 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_n & \cdots & \cdots & a_n & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n-1} (n-1) \det(A) \\ &= (-1)^{n-1} (n-1) \prod_{i=1}^n a_i. \end{aligned}$$

Exercice 1.6 : Déterminant d'une somme*

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(A + B) = \det(A) + \det(B).$$

On va raisonner par conditions nécessaires. Considérons A une telle matrice, et regardons ce que nous pouvons en dire. Une première idée est d'étudier ce que donne cette égalité lorsque $B = A$.



Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(A + B) = \det(A) + \det(B).$$

En particulier, on obtient pour $B = A$:

$$\det(2A) = 2 \det(A), \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2^n \det(A) = 2 \det(A).$$

Puisque $n \geq 2$, il en résulte que $\det(A) = 0$ et que A n'est pas inversible.



Le déterminant n'est pas une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Non seulement $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A) \neq \lambda \det(A)$ en général, mais surtout le déterminant d'une somme n'est pas la somme des déterminants (sauf cas particuliers) : $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Puisque A est non inversible, elle satisfait plus précisément :

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(A + B) = \det(B).$$

Bien sûr, cette condition est bien satisfaite si A est la matrice nulle. Et il paraît difficile qu'il en soit autrement. Raisonnons pour cela par l'absurde en supposant A non nulle. Pour aboutir à une contradiction, on va chercher une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et telle que $A + B$ ne soit pas inversible. Toute la difficulté est de construire une telle matrice. Pour cela, arrangeons-nous pour que $A + B$ possède une colonne nulle, ce

qui nous assurera que $\det(A + B) = 0$. Les autres colonnes de B nous intéressent peu, elles doivent cependant être choisies de telle sorte que B soit inversible.



Supposons $A \neq O_n$. Il existe donc $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que la i -ème colonne de A , notée $C_i(A)$ dans la suite, est non nulle.

D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille libre $(-C_i(A))$ en une base $(B_1, \dots, B_{i-1}, -C_i(A), B_{i+1}, \dots, B_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Prenons alors pour B la matrice (donnée en colonnes) :

$$B = (B_1 | \dots | B_{i-1} | -C_i(A) | B_{i+1} | \dots | B_n).$$

La matrice B est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car la famille de ses vecteurs colonnes est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. De plus, $A + B$ est égale à

$$(C_1(A) + B_1 | \dots | C_{i-1}(A) + B_{i-1} | 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} | C_{i+1}(A) + B_{i+1} | \dots | C_n(A) + B_n).$$

La i -ème colonne de $A + B$ étant nulle, cette matrice n'est pas inversible.

Pour la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ainsi construite, l'équation devient :

$$0 = \det(A + B) = \det(B) \neq 0.$$

D'où une contradiction. Ainsi, A est nécessairement la matrice nulle.

Et réciproquement, la matrice $A = O_n$ satisfait évidemment la condition de l'énoncé.

En conclusion, seule la matrice nulle est solution de cette équation.

Exercice 1.7 : Déterminant d'un endomorphisme*

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])$ définie par

$$f(P) = P - P'.$$

1. Calculer $\det(f)$.

2. On considère l'application $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])$ définie par

$$g(P) = P + P' + P'' + \dots + P^{(n)} = \sum_{k=0}^n P^{(k)}.$$

Déterminer $g \circ f(P)$ pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et en déduire $\det(g)$.

3. Retrouver la valeur de $\det(g)$ en écrivant la matrice de g dans la base canonique.

Rappelons que le déterminant d'un endomorphisme est le déterminant de sa matrice dans n'importe quelle base. Cela autorise de choisir la base la mieux adaptée aux calculs. L'énoncé évoque la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, on va constater que cette base est tout à fait propice aux calculs.

1. Commençons par remarquer que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. Considérons pour cela l'endomorphisme dérivation D de $\mathbb{K}_n[X]$, qui à tout polynôme P associe son polynôme dérivé P' . Alors $f = \text{Id}_{\mathbb{K}_n[X]} - D$, et f est bien un endomorphisme de

$\mathbb{K}_n[X]$ en tant que combinaison linéaire de deux endomorphismes de $\mathbb{K}_n[X]$. Pour calculer son déterminant, écrivons la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.



Notons $\mathcal{C} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Calculons :

$$f(1) = 1, \quad f(X) = X-1, \quad f(X^2) = X^2-2X, \quad \dots \quad f(X^n) = X^n-nX^{n-1}.$$

Ainsi, la matrice de f dans \mathcal{C} s'écrit :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice triangulaire supérieure, donc son déterminant est le produit des coefficients diagonaux, à savoir 1. Ainsi :

$$\det(f) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)) = 1.$$

2. Là encore, on vérifie facilement que g est bien un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ par stabilité de $\mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])$ par composition et combinaison linéaire, en remarquant que :

$$g = \text{Id}_{\mathbb{K}_n[X]} + D + D^2 + \dots + D^n.$$



Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Alors :

$$\begin{aligned} g \circ f(P) &= g(P - P') = \sum_{k=0}^n (P - P')^{(k)} \\ &= \sum_{k=0}^n P^{(k)} - P^{(k+1)} \quad \text{par linéarité de la dérivée } k\text{-ième} \\ &= P^{(0)} - P^{(n+1)} \quad \text{par télescope} \\ &= P - 0_{\mathbb{K}_n[X]} \quad \text{car } \deg(P) \leq n. \end{aligned}$$

Donc $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{K}_n[X]}$, de sorte que :

$$\det(g \circ f) = \det(\text{Id}_{\mathbb{K}_n[X]}) = 1.$$

Par ailleurs :

$$\det(g \circ f) = \det(f) \times \det(g) = \det(g).$$

On obtient $\det(g) = 1$.



On peut aussi raisonner au niveau des applications :

$$\begin{aligned}
 g \circ f &= \left(\sum_{k=0}^n D^k \right) \circ (\text{Id}_{\mathbb{K}_n[X]} - D) \\
 &= \sum_{k=0}^n D^k \circ \text{Id}_{\mathbb{K}_n[X]} - \sum_{k=0}^n D^{k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^n (D^k - D^{k+1}) \\
 &= D^0 - D^{n+1} \quad \text{par télescopage} \\
 &= \text{Id}_{\mathbb{K}_n[X]} \quad \text{car } D^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])}.
 \end{aligned}$$

3. On procède de même qu'à la première question.



Calculons les images des vecteurs de la base canonique \mathcal{C} par g :

$$g(1) = 1, \quad g(X) = X + 1, \quad g(X^2) = X^2 + 2X + 2.$$

Plus généralement, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$g(X^k) = X^k + kX^{k-1} + \dots + \frac{k!}{i!} X^i + \dots + k!.$$

On en déduit la matrice représentative de g dans \mathcal{C} :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 & \dots & n! \\ 0 & 1 & 2 & 6 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 3 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire supérieure avec tous ses coefficients diagonaux égaux à 1, donc on retrouve bien que $\det(g) = 1$.

Exercice 1.8 : Déterminant de Hurwitz*

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$, et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que le déterminant suivant est un polynôme de degré au plus 1 :

$$H_n(X) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + X & a + X & \dots & a + X \\ b + X & \lambda_2 + X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a + X \\ b + X & \dots & b + X & \lambda_n + X \end{vmatrix}.$$

2. Calculer le déterminant D_n de taille n suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & a & \dots & a \\ b & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & \lambda_n \end{vmatrix}.$$

3. Calculer le déterminant Δ_n de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & a & \dots & a \\ a & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & \lambda_n \end{vmatrix}.$$

1. Justifions tout d'abord que $H_n(X)$ est bien un polynôme. Pour cela, remarquons que le déterminant d'une matrice s'obtient par sommes et produits de ses coefficients, comme le montrent par exemple les formules de calcul du déterminant par développement suivant une ligne ou une colonne.



Puisqu'un déterminant d'une matrice s'obtient par sommes et produits de ses coefficients, $H_n(X)$ est bien un polynôme.

Il n'est à première vue pas évident du tout que son degré soit inférieur à 1, et que les termes de degré supérieur à 2 se simplifient. On va, pour le constater aisément, procéder à des opérations élémentaires afin que seule la première colonne dépende encore de X .



Retranchons la première colonne C_1 à toutes les autres en effectuant les opérations élémentaires $C_i \leftarrow C_i - C_1$ pour tout $2 \leq i \leq n$:

$$H_n(X) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + X & a - \lambda_1 & a - \lambda_1 & \dots & a - \lambda_1 \\ b + X & \lambda_2 - b & a - b & \dots & a - b \\ b + X & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a - b \\ b + X & 0 & \dots & 0 & \lambda_n - b \end{vmatrix}.$$