Sylvain Gugger
Henri Lemberg
Gérard Rozsavolgyi
Laurent Pater

PARCOURS PRÉPAS

MATHS
PC/PC*

EDISCIENCE

Création de couverture : Studio graphique Dunod

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-084172-1

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux élèves de deuxième année de classe préparatoire PC. Il s'agit d'un complément à leur cours de mathématiques mettant l'accent sur les notions essentielles à connaître et les méthodes à maîtriser, et permettant de les mettre en œuvre par le biais d'exercices.
Le livre est divisé en quatre parties, treize chapitres et une section de sujets d'annales.

Chaque chapitre commence par une partie nommée *L'essentiel du cours*. On y présente tous les points les plus importants du cours (définitions, propositions, théorèmes, remarques) à la manière d'une fiche. Les preuves ne sont volontairement pas incluses pour se concentrer sur les résultats à connaître, mais peuvent être trouvées dans votre cours au besoin. La première chose à faire pour apprendre un chapitre donné est de retenir cette partie.
On trouve ensuite une partie nommée *Les méthodes à maîtriser*. Elle présente les méthodes en rapport avec le chapitre en cours qu'il faut absolument savoir mettre en pratique. Chaque méthode est illustrée par un exemple corrigé en détail, et comporte un renvoi vers les exercices qui l'utilisent. Il est très utile de refaire par soi-même les exemples de chaque méthode sur une feuille blanche lors des révisions du chapitre.

Si la méthode présentée est facilement programmable sur ordinateur, on trouvera ensuite un programme associé en langage Python.

Pour tester la connaissance du cours et des méthodes, chaque chapitre comporte ensuite une *Interro de cours*. Elle comporte généralement des questions de cours (énoncé d'une définition ou d'un théorème), des vrais/faux et des exemples d'application directe des méthodes. Cette partie permettra d'identifier rapidement les éventuelles lacunes sur le chapitre en cours.
La suite du chapitre est consacrée aux *Exercices*. On les a séparés en deux parties : dans la rubrique *S'entraîner*, on trouve un ensemble d'exercices couvrant tous les points du chapitre. Ce sont les plus faciles, en général, mais certaines méthodes étant plus difficiles à mettre en œuvre que d'autres, ils ne sont pas nécessairement de difficulté égale. La rubrique *Approfondir* contient d'autres exercices pour continuer de s'exercer, a priori un peu plus difficiles. Lorsque cela était possible, on a choisi des exercices proposés récemment à l'oral de concours d'entrée aux grandes écoles.
Enfin, la partie *Corrections* comporte les corrigés détaillés de l'interrogation de cours et des exercices.

La dernière partie de l'ouvrage est consacrée à des sujets d'annales d'écrits récemment posés aux concours d'entrée aux grandes écoles. On a cherché à rassembler une collection de sujets de difficulté moyenne couvrant l'ensemble du programme et illustrant les méthodes présentées dans cet ouvrage. Certaines parties ont été réécrites pour parfaitement correspondre au programme de la filière PC (lorsqu'il s'agit de sujets d'autres filières ou antérieurs à la réforme des programmes) et les erreurs d'énoncé ont été corrigées ou sont signalées par une note de bas de page.
Chaque sujet est corrigé de manière détaillée, avec des remarques signalant les questions les plus classiques ou les pièges à éviter.

Durant tout l'ouvrage, on a utilisé un certain nombre de pictogrammes :

pour attirer l'attention du lecteur sur un ou plusieurs points spécifiques.

pour signaler un piège ou une erreur à éviter.

pour mettre l'accent sur une bonne manière de rédiger.

Des vidéos pour vous aider à réussir en prépa

Pour réussir vos concours, vous devrez mettre en œuvre des compétences disciplinaires ***(hard skills)***, mais aussi des ***soft skills***, ces compétences transversales qui vous permettront de tenir le bon rythme. La collection ***Parcours Prépas*** vous offre six vidéos pour vous préparer à réussir dès la première année et faire la différence le jour J par la maîtrise de votre énergie (physique, émotionnelle, mentale), par l'entretien de votre motivation et par vos méthodes de travail.

*Tout d'abord deux vidéos méthodologiques d'**Alexis Brès**. Professeur agrégé de physique-chimie en MP2I (lycée Hoche, Versailles), il est aussi correcteur et concepteur de sujets pour la banque du concours e3a-Polytech ; ancien correcteur du concours d'entrée aux ENS. Auteur de L'Oral de physique aux concours des ENS et de Polytechnique (Dunod).*

Vidéo 1 : Apprendre à apprendre
Comment mobiliser efficacement son cours ?

http://dunod.link/jvy7mqd

Comment apprendre un cours ? Comment savoir si on l'a vraiment compris ? Comment le mobiliser dans les TD et dans les épreuves ? Comment créer du lien entre les connaissances pour se forger une intuition de la solution et gagner un temps précieux ? Autant de questions-réponses abordées dans cette vidéo. Une méthodologie particulièrement adaptée à l'apprentissage des cours de physique, de mathématiques ou de sciences industrielles.

Vidéo 2 : Écrit, oral : aborder sereinement la résolution d'un problème

http://dunod.link/z0psk69

Si les exigences d'un sujet d'écrit et d'un oral peuvent sembler assez différentes, il existe des techniques communes pour aborder ces épreuves sans stress. Cette vidéo fournit :

- des techniques pour apprivoiser la résolution d'un problème de physique : modalités de décryptage du sujet et de mobilisation du cours ;
- des recommandations sur le fond et la forme pour gagner la confiance des correcteurs ;
- des tactiques cohérentes pour gagner des points ;
- des points de vigilance concernant la préparation des khôlles et des oraux.

*Ensuite quatre vidéos « soft skills » pour aborder la prépa comme le ferait un sportif de haut niveau. Ces vidéos ont été conçues par **Stéphane Fassetta**, fondateur de Syprium, coach professionnel, préparateur mental de sportifs de haut niveau, professeur d'aïkido. Auteur de Nos 8 profils énergétiques (InterÉditions).*

Vidéo 3 : Les cinq piliers de l'énergie, ou comment réussir le marathon de la prépa ?

http://dunod.link/80x2gwu

La prépa, c'est un peu comme le sport de haut niveau : plus le temps passe, plus le niveau ou les contraintes augmentent. Maîtriser son énergie, c'est donc faire un usage optimum de ses ressources pour tenir le rythme des deux années, s'adapter à la diversité des situations et réussir ses épreuves. Cette vidéo présente les dimensions de notre énergie et les cinq piliers pour l'entretenir. La capacité à se ressourcer sur ces cinq piliers est une compétence à développer dès votre arrivée en prépa.

http://dunod.link/sicy8u3

Vidéo 4 : Gérer efficacement son temps en prépa

En prépa, on manque toujours de temps. L'enjeu est donc de gérer efficacement cette ressource pour atteindre les objectifs de vos différentes échéances.

Cette vidéo fournit des repères pour :

- trouver sa propre organisation personnelle : techniques de planification, objectifs SMART... ;
- développer sa capacité d'attention, essentielle à la compréhension, à la mémorisation, à la gestion de la charge mentale et à votre avancement ;
- connaître ses propres biorythmes pour un apprentissage efficient, en capitalisant sur les acquis de la chronobiologie.

http://dunod.link/p5maym6

Vidéo 5 : Gérer son stress et développer la confiance en soi pour les concours

Comme dans le sport de haut niveau, la préparation d'un concours soumet votre énergie à rude épreuve. Si une certaine pression est stimulante pour doper ses performances, l'installation dans un stress chronique compromet à la fois votre santé et vos chances de réussite.

Cette vidéo permet :

- d'identifier les sources externes et internes de son propre stress ;
- de comprendre le rôle du stress comme mécanisme naturel d'adaptation de l'organisme face à une situation déstabilisante et/ou à fort enjeu ;
- d'apprendre à reconnaître certains symptômes physiques, émotionnels ou cognitifs du stress pour prévenir l'épuisement ;
- de connaître les possibilités de régulation physique et mentale du stress ;
- d'entretenir passionnément sa motivation pour préserver durablement la confiance en soi, quelles que soient vos contre-performances.

http://dunod.link/vncd3c5

Vidéo 6 : Techniques respiratoires et de préparation mentale pour préparer les concours

La capacité à se relaxer ou à récupérer quand il le faut est essentielle pour tenir le rythme de préparation d'un concours.

Grâce à cette vidéo :

- vous saurez mettre en œuvre différentes techniques respiratoires adaptées à la récupération et à la dynamisation ;
- vous disposerez de deux techniques de préparation mentale pour conserver un état d'esprit positif, limiter votre niveau de stress et améliorer vos capacités d'attention.

Table des matières

Partie 1

Algèbre

CHAPITRE 1

Compléments : Algèbre linéaire - Polynômes

L'essentiel du cours

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Ce chapitre reprend et complète le programme d'algèbre linéaire et rafraîchit et complète les connaissances de première année concernant les polynômes en ajoutant notamment l'interpolation de Lagrange. Tous les résultats de base ne sont pas repris. Pour des rappels plus approfondis, il convient de se reporter à l'ouvrage de première année, partie 4 pour l'algèbre linéaire et chapitre 8 pour les polynômes.

■ 1 Produit et somme de sous-espaces vectoriels

Définition

Si $E_1, \dots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, on munit le produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ d'une loi + et d'une loi . en posant

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \qquad \text{et} \qquad \lambda.x = (\lambda.x_1, \dots, \lambda.x_n)$$

pour tous $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Espace vectoriel produit

Muni des lois + et . définies plus haut, $E_1 \times \cdots \times E_n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si de plus $E_1, \dots, E_n$ sont de dimension finie, $E_1 \times \cdots \times E_n$ est dimension finie et on a

$$\dim(E_1 \times \cdots \times E_n) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_n).$$

Si $E_1 = \cdots = E_n = E$, on a donc muni E^n d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

(1) On appelle **somme** de $F_1, \dots, F_p$ et on note $F_1 + \cdots + F_p$ l'ensemble des $x_1 + \cdots + x_p$, avec $(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$.

(2) On dit que la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est **directe** et on note $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ si l'écriture d'un élément de $F_1 + \cdots + F_p$ sous la forme $x_1 + \cdots + x_p$ (avec $(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$) est unique.

• Ces deux définitions généralisent la définition de somme de deux sous-espaces vectoriels vue en première année.
• On rappelle que deux sous-espaces vectoriels F et G vérifiant $F \oplus G = E$ sont dits **supplémentaires** dans E.

Caractérisation d'une somme directe de n sous-espaces

La somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe si et seulement si

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n,\, x_1 + \cdots + x_n = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\, x_i = 0.$$

Le fait que les intersections de deux des F_i soient réduites à $\{0\}$ n'implique pas que la somme soit directe (contrairement au cas de deux sous-espaces vectoriels).

Base adaptée

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que

$$E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p.$$

Si pour $i \in [\![1, p]\!]$, e_i est une base de F_i, la famille e obtenue en concaténant $e_1, \ldots, e_p$ est une base de E.

• Une telle base de E est dite **adaptée** à la décomposition $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.
• En particulier, si F et G sont supplémentaires dans E, on obtient une base de E (dite adaptée à $F \oplus G = E$) en concaténant une base de F avec une base de G.

Proposition

Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si $1 = k_0 \leqslant k_1 < \cdots < k_p = n + 1$, et si pour $i \in [\![1, p]\!]$, $F_i = \mathrm{Vect}(e_{k_{i-1}}, \ldots, e_{k_i - 1})$, on a $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim(F_1 + \cdots + F_n) \leqslant \dim(F_1) + \cdots + \dim(F_n)$$

avec égalité si et seulement si la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe.

Proposition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E tels que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$.
Si pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a $u_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$, il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $u_{|E_i} = u_i$.

En particulier, si deux applications linéaires coïncident sur chacun des E_i, elles sont égales.

2 Matrices et endomorphismes

Définition

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et si F est un sous-espace de E, on dit que F est **stable** par u si $u(F) \subset F$. On appelle alors **endomorphisme induit** par u sur F l'application $\tilde{u} : F \to F$, $x \mapsto u(x)$.

$\tilde{u}$ est encore linéaire, donc définit un endomorphisme de F (d'où l'appellation endomorphisme induit).

Proposition

Si $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$ vérifie $u \circ v = v \circ u$, alors $\mathrm{Im}(v)$ et $\mathrm{Ker}(v)$ sont stables par u.

Définition

Si $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$, on peut définir une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, dite **matrice par blocs** en posant

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

• Si B et C sont nulles, on dit que M est diagonale par blocs. Si B ou C est nulle, on dit que B est triangulaire (supérieure si C nulle, inférieure si B nulle) par blocs.
• On peut généraliser la notion de matrice diagonale ou triangulaire par blocs pour plus de deux blocs.

Caractérisation matricielle de la stabilité

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, F un sous-espace de E, G un supplémentaire de F dans E et e une base adaptée à $F \oplus G = E$. On écrit par blocs la matrice de u en base e : $\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ (avec $p = \dim(F)$).
Alors F est stable par u si et seulement si $C = 0$.

Produit par blocs

Pour tous couples $(A_1, A_2) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})^2$, $(B_1, B_2) \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})^2$, $(C_1, C_2) \in \mathscr{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})^2$ et $(D_1, D_2) \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})^2$, on a

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{pmatrix}.$$

Définition

On dit que deux matrices A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** s'il existe $P \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

• La relation « être semblable à » est une relation d'équivalence dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
• Par la formule du changement de base, deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme de E (de dimension n) dans des bases éventuellement différentes.

Définition

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ (ou $\mathrm{Tr}(A)$) la somme des coefficients diagonaux de A : $\mathrm{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Opérations sur la trace

- tr est linéaire.
- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}(A)$.
- Si $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
- Deux matrices semblables ont même trace.

Deux matrices de même trace ne sont pas forcément semblables. En taille 2 par exemple, $A = I_2$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables et ont même trace.

Définition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle **trace** de u et on note $\mathrm{tr}(u)$ (ou $\mathrm{Tr}(u)$) le scalaire $\mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_e(u))$, où e est une base de E.

Le scalaire $\mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_e(u))$ ne dépend pas de la base choisie puisque deux matrices semblables ont même trace.

Opérations sur la trace

- tr est linéaire.
- Si $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$, $\mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u)$.

■ 3 Exemples de déterminants

Proposition

Soit A une matrice triangulaire par blocs, avec deux blocs diagonaux A_1 et A_2. Alors

$$\det(A) = \det(A_1)\det(A_2).$$

On peut généraliser la proposition précédente avec plus de deux blocs.

Déterminant de Vandermonde

Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

La matrice (dite de Vandermonde) associée est donc inversible si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.

Le tableau suivant récapitule les liens entre une matrice M, une application linéaire u qu'elle représente, et une famille de vecteurs e' qu'elle représente.

Matrice M	**Application linéaire u**	**Famille e'**
Produit	Composition	
M inversible	u bijectif	e' base de E
M^{-1}	u^{-1}	$P_{e'}^{e}$
$\mathrm{rg}(M)$	$\mathrm{rg}(u)$	$\mathrm{rg}(e')$
$\mathrm{Ker}(A)$	$\mathrm{Ker}(u)$	
$\mathrm{Im}(A)$	$\mathrm{Im}(u)$	
$\mathrm{tr}(A)$	$\mathrm{tr}(u)$	
$\det(A)$	$\det(u)$	$\det_e(e')$

■ 4 Polynômes

Définition

- On dit qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est **presque nulle** s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $a_n = 0$. On note $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites presque nulles à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Un **polynôme** à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un objet de la forme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite presque nulle à coefficients dans $\mathbb{K}$. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

• La somme définissant un polynôme est en fait finie, puisque la suite des coefficients est presque nulle.
• Deux polynômes $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$ sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coefficients, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

L'inconnue X désigne l'indéterminée des polynômes. Attention à ne jamais écrire des relations du genre $X^2 + 1 = 0$ (pour résoudre une équation) ou posons $X = z$ (pour remplacer X par un nombre complexe z). Ces égalités sont fausses (le polynôme X^2+1 n'est pas nul, le polynôme X n'est pas la constante z).

Définition

Si $P = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ et $Q = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$ sont deux polynômes, on définit

$$P + Q = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)X^n \qquad \text{et} \qquad P \times Q = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)X^n.$$

Proposition

Muni des opérations + et × définies plus haut, $\mathbb{K}[X]$ est un anneau commutatif, muni de la multiplication par un scalaire, $\mathbb{K}[X]$ est un espace vectoriel.

En particulier, $P + Q$ et $P \times Q$ sont bien des polynômes (c'est-à-dire que leurs suites des coefficients sont bien presque nulles).

■ 5 Degré d'un polynôme

Définition

- Si $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ est un polynôme non nul, on appelle **degré** de P et on note $\deg(P)$ le plus grand entier d tel que $a_d \neq 0$. Si $P = 0$, on pose $\deg(P) = -\infty$.
- Si $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ est un polynôme non nul, on appelle **coefficient dominant** de P le coefficient $a_{\deg(P)}$.
- On dit qu'un polynôme est **unitaire** si son coefficient dominant vaut 1.

Si d est le degré de P, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ s'arrête au rang d, on peut donc écrire $P = \sum_{n=0}^{d} a_n X^n$.

Opérations sur le degré

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$.

- $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$ avec égalité quand $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Si P et Q sont de même degré, on ne peut rien dire de plus que

$$\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q)).$$

Les termes dominants peuvent se simplifier.

• En particulier, si P et Q sont non nuls, $P \times Q$ est non nul.
• On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant n$. C'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.

6 Divisibilité et division euclidienne

Définition

- Si $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, on dit que P **divise** Q (ou que Q est un **multiple** de P) s'il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = PR$. On le note $P|Q$.
- On dit que P et Q sont **associés** si $P|Q$ et $Q|P$.

Caractérisation des polynômes associés

Deux polynômes P et Q sont associés si et seulement si $\exists\lambda \in \mathbb{K}^*$, $P = \lambda Q$.

En particulier deux polynômes unitaires associés sont égaux.

Division euclidienne

Soit $(P, S) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $S \neq 0$.
Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $P = SQ + R$ et $\deg(R) < \deg(S)$.
On dit qu'on a effectué la **division euclidienne** de P par S. Q est appelé le quotient, R le reste.

7 Racines d'un polynôme

Définition

Si $P = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, on appelle **fonction polynomiale** associée à P la fonction polynomiale de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On la note $x \mapsto P(x)$

On peut souvent faire la confusion entre polynôme et fonction polynomiale associée (voir plus loin) mais il ne faut pas oublier que ce sont deux objets a priori différents. En particulier deux polynômes sont égaux quand ils ont même coefficients, alors que deux fonctions polynomiales sont égales lorsqu'elles ont même valeur en tout point.

Définition

Si $P \in \mathbb{K}[X]$, on dit que $a \in \mathbb{K}[X]$ est **racine** de P si $P(a) = 0$.

Proposition

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, a est racine de P si et seulement si $(X - a)|P$.

Théorème

- Tout polynôme non nul P admet au plus autant de racines que son degré.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet au moins $n+1$ racines, alors $P = 0$.
- Si $P \in \mathbb{K}[X]$ admet une infinité de racines, alors $P = 0$.

Le troisième point précédent permet de montrer que si deux fonctions polynomiales coïncident en une infinité de valeurs, alors les polynômes associés sont égaux. C'est ce qui permet de faire la confusion entre polynôme et fonction polynomiale associée.

Définition

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et si $a \in \mathbb{K}$ est racine de P, le plus grand entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $(X-a)^m | P$ est appelée **multiplicité** de a.

On dit que a est racine de multiplicité 0 de P si $P(a) \neq 0$.

Définition

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est **scindé** s'il admet autant de racines, chacune étant comptée avec sa multiplicité, que son degré.

Factorisation des polynômes scindés

- Si $P \in \mathbb{K}[X]$ admet $r_1, \dots, r_k$ comme racines de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_k$, alors $\prod_{i=1}^{k} (X - r_i)^{m_i}$ divise P.
- Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé, P se factorise sous la forme suivante
$$P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - r_i)^{m_i}$$
où $\lambda \in \mathbb{K}^*$ est le coefficient dominant de P, les $r_i \in \mathbb{K}$ sont les racines de P, de multiplicité m_i.

Relations coefficients racines

Soit $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. Si les nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de $\mathbb{K}$ sont les racines de P alors
$$\alpha_0 + \cdots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \alpha_0 \times \cdots \times \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

■ 8 Interpolation de Lagrange

Définition

Soient $a_0, \cdots, a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. On appelle **polynômes d'interpolation de Lagrange** associés aux a_i les polynômes

$$L_i = \prod_{0 \leqslant j \leqslant n, j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j} \quad \text{pour} \quad i \in [\![0, n]\!].$$

Ces polynômes vérifient $L_i(a_j) = 0$ si $i \neq j$ et $L_i(a_i) = 1$.

Interpolation de Lagrange

Soient $a_0, \ldots, a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Si $(y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $P(a_i) = y_i$. Il s'agit du polynôme

$$P = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i.$$

Base des polynômes interpolateurs de Lagrange

La famille des polynômes d'interpolation de Lagrange $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ associés aux $n + 1$ points $a_0, \cdots, a_n$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Les méthodes à maîtriser

Méthode 1.1 : Savoir montrer qu'une somme de sous-espaces est directe

1. Lorsqu'on a une somme de deux sous-espaces F et G, il suffit de montrer que $F \cap G = \{0\}$.
2. Lorsqu'on a une somme de n sous-espaces $E_1, \dots, E_n$, il faut prendre un n-uplet

$$(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n \text{ tel que } x_1 + \cdots + x_n = 0$$

et montrer que les x_i sont tous nuls.

Exemple d'application

Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère F l'ensemble des fonctions constantes, G l'ensemble des fonctions impaires et H l'ensemble des fonctions h telles que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h(x) = 0$. Montrer que la somme $F + G + H$ est directe.

Le fait que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de E est laissé en exercice.
Soit $(f, g, h) \in F \times G \times H$ tel que $f + g + h = 0$. Comme g est impaire, $g(0) = 0$. Ainsi, en prenant la valeur en 0, on a $f(0) = 0$. Comme f est constante, f est constante nulle.
Par suite, $g + h = 0$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $h(x) = 0$, donc $g(x) = 0$. Comme g est impaire, g est donc constante nulle, et on en déduit que $h = 0$.
Ainsi la somme $F + G + H$ est directe.

Voir exercices **1.1** et **1.8**.

Méthode 1.2 : Savoir montrer que deux matrices carrées sont semblables

Le théorème de changement de base permet de montrer que deux matrices carrées sont semblables : il suffit de trouver un endomorphisme que ces deux matrices représentent, mais dans des bases différentes.

Exemple d'application

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $A^2 = A$. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Posons $E = \mathbb{K}^n$ et e la base canonique de E. On considère $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = \mathrm{Mat}_e(u)$ (A est la matrice de l'endomorphisme u dans la base e). La relation $A^2 = A$ donne $\mathrm{Mat}_e(u \circ u) = \mathrm{Mat}_e(u)$, donc $u \circ u = u$. Ainsi u est un projecteur de E.
Les sous-espaces de E : $F = \mathrm{Im}(u)$ et $G = \mathrm{Ker}(u)$ sont supplémentaires dans E. Pour $y \in F$, $u(y) = y$, et pour $z \in G$, $u(z) = 0$. Ainsi, si e' est une base de E adaptée à $F \oplus G = E$, en notant $p = \dim(F)$, on a $\mathrm{Mat}_{e'}(u) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Finalement, $A = \mathrm{Mat}_e(u)$ est semblable à $\mathrm{Mat}_{e'}(u) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Voir exercices **1.6**, **1.10** et **1.11**.

Méthode 1.3 : Exploiter une relation polynomiale pour le calcul de puissance/d'inverse

Lorsqu'on a une relation de la forme $a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_d A^d = 0$ avec $a_0 \neq 0$, on peut facilement déterminer l'inverse de A (il suffit de la manipuler pour obtenir une relation $AB = I_n$).
De plus, si $p \in \mathbb{N}$ et si on écrit $X^p = PQ_p + R_p$ la division euclidienne de X^p par le polynôme $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d$, on a $A^p = R_p(A)$, ce qui permet de calculer les puissances successives de la matrice A (pour peu que l'on arrive à calculer facilement R_p).

Exemple d'application

Calculer l'inverse et les puissances successives de $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On pourra constater que $A^2 - 5A + 6I_2 = 0$.

Notons tout d'abord que $A^2 = \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$, donc $A^2 - 5A + 6I_2 = 0$.

Par suite, $-A^2 + 5A = 6I_2$ et en posant $B = -\frac{1}{6}A + \frac{5}{6}I_2$, on trouve $AB = I_2$. A est donc inversible, d'inverse $B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Notons $P = X^2 - 5X + 6$ et pour $p \in \mathbb{N}$, $X^p = Q_p P + R_p$ la division euclidienne de X^p par P. Notons que les racines de P sont 2 et 3, donc $R_p(2) = 2^p$ et $R_p(3) = 3^p$. Comme $\deg(R_p) < \deg(P) = 2$, R_p est de la forme $a_p X + b_p$, avec $(a_p, b_p) \in \mathbb{R}^2$. Les deux équations précédentes donnent alors le système $\begin{cases} 2a_p + b_p = 2^p \\ 3a_p + b_p = 3^p \end{cases}$.
La combinaison $L_2 - L_1$ donne $a_p = 3^p - 2^p$. Par suite $b_p = 2^p - 2a_p = 3 \times 2^p - 2 \times 3^p$. Ainsi

$$A^p = R_p(A) = a_p A + b_p I_2 = \begin{pmatrix} 2 \times 3^p - 2^p & -3^p + 2^p \\ 2 \times 3^p - 2^{p+1} & -3^p + 2^{p+1} \end{pmatrix}.$$

Comme vu ici, on exploite souvent les racines de P pour déterminer les coefficients de R_p.

Voir exercices **1.4** et **1.5**.

Méthode 1.4 : Savoir calculer un déterminant

Que la taille soit petite ou que ce soit un déterminant de taille n, la méthode est tout à fait analogue. Il faut commencer par effectuer des opérations élémentaires pour faire apparaître le maximum de zéros sur une ligne ou une colonne puis développer par rapport à cette ligne/colonne.
S'il s'agit d'un déterminant explicite de petite taille, on est alors ramené à un calcul d'un déterminant encore plus petit et on recommence jusqu'à arriver à des déterminants de taille 2, qui se calculent avec les produits en croix.
S'il s'agit d'un déterminant de taille n, on peut tenter de trouver une équation de récurrence.

Exemple d'application

Calculer les déterminants

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

(1) Pour calculer D, on commence par effectuer les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ (pour faire apparaître des 0 en première colonne). On a alors

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -6 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & -6 \\ 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-5) \times 6 = -30$$

en développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la seconde ligne.

(2) Pour k allant de n à 2 (dans cet ordre), on effectue $L_k \leftarrow L_k - a_1 L_{k-1}$. Ceci ne change pas le déterminant et on trouve

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & (a_2 - a_1)a_2 & \dots & (a_n - a_1)a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (a_2 - a_1)a_2^{n-2} & \dots & (a_n - a_1)a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne, on obtient alors

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ (a_2 - a_1)a_2 & \dots & (a_n - a_1)a_n \\ \vdots & & \vdots \\ (a_2 - a_1)a_2^{n-2} & \dots & (a_n - a_1)a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \left(\prod_{i=2}^{n} (a_i - a_1) \right) V(a_2, \dots, a_n).$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned} V(a_1, \dots, a_n) &= \prod_{i=2}^{n} (a_i - a_1) V(a_2, \dots, a_n) = \left(\prod_{i=2}^{n} (a_i - a_1) \right) \prod_{i=3}^{n} (a_i - a_2) V(a_3, \dots, a_n) \\ &= \dots = \prod_{j=1}^{n-2} \prod_{i=j+1}^{n} (a_i - a_j) V(a_{n-1}, a_n) = \prod_{j=1}^{n-2} \prod_{i=j+1}^{n} (a_i - a_j)(a_n - a_{n-1}) \\ &= \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=j+1}^{n} (a_i - a_j) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j). \end{aligned}$$

Voir exercices **1.7**, **1.13** et **1.14**.

Exemple d'application

Écrire un programme Python calculant le déterminant d'une matrice

Lorsqu'on applique l'algorithme du pivot de Gauss à une matrice A, ou bien elle n'est pas inversible (et son déterminant vaut 0), ou bien on arrive à une forme triangulaire supérieure (et le déterminant est le produit des coefficients diagonaux). Le programme Python suivant calcule le déterminant d'une matrice A (en utilisant une fonction `echange` qui échange deux lignes, et `combine` qui réalise $L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$).

```python
import numpy as np
def determinant(A):
    i = 0
    n = np.shape(A)[0]
    det = 1
    for i in range(0,n):
        k = i
        for l in range(i+1,n):
            if abs(A[l,i]) > abs(A[k,i]):
                k = l
        if A[k,i] == 0:
            return 0
        else:
            A = echange(A,i,k)
            if i != k:
                det = -det
            det *= A[i,i]
            for l in range(i+1,n):
                A = combine(A,l,i,-A[l,i]/A[i,i])
    return det
```

À chaque étape, parmi les pivots disponibles, on choisit le plus grand en valeur absolue. Ceci permet d'améliorer la stabilité numérique de l'algorithme (voir le cours d'informatique).

Interro de cours

1. Donner la définition de $E_1 + \cdots + E_n$ est directe.

2. Déterminer (et justifier) si les énoncés suivants sont vrais ou faux, $E_1, \ldots, E_n$ étant des sous-espaces vectoriels de E.

(a) Si $E_i \cap E_j = \{0\}$ pour tout $i \neq j \in [\![1, p]\!]$, alors $E_1 + \cdots + E_n$ est directe.

(b) Si $E_1 + \cdots + E_n$ est directe, alors $E_i \cap E_j = \{0\}$ pour tout $i \neq j \in [\![1, p]\!]$.

(c) $E_1 + \cdots + E_n$ est directe si

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, \quad x_1 + \cdots + x_n = 0 \Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0.$$

(d) La somme $E_1 + \cdots + E_n$ est directe si tout élément de E peut s'écrire sous la forme $x_1 + \cdots + x_n$, avec $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.

3. Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et pour $i \in [\![0, n]\!]$, $F_i = \{P \in E \,;\, \forall j \in [\![0, n]\!] \backslash \{i\},\, P(j) = 0\}$. Montrer que $F_0 + \cdots + F_n$ est directe et que cette somme vaut E.

4. Rappeler la définition de la trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme.

5. Déterminer (et justifier) si les énoncés suivants sont vrais ou faux.

(a) Deux matrices carrées semblables ont même rang.

(b) Deux matrices carrées de même rang sont semblables.

(c) Deux matrices carrées semblables ont même trace.

(d) Deux matrices carrées de même trace sont semblables.

6. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A^2 = I_n$. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$.

7. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$. En déduire que A est inversible, exprimer son inverse ainsi que les puissances successives de A.

8. Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

9. Rappeler la formule donnant la valeur du déterminant de Vandermonde.

10. Donner l'expression des polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $n + 1$ abscisses distinctes qu'on note $a_0, a_1, \cdots a_n$.

Exercices

■ S'entraîner

Exercice 1.1

Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose que pour tout entier $p \in [\![2, n]\!]$, $(F_1 + \cdots + F_{p-1}) \cap F_p = \{0\}$. Montrer que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe.

Exercice 1.2

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, avec $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$. Montrer que M est inversible si et seulement si A et C sont inversibles.
Donner alors M^{-1} en fonction de A, B et C.

Exercice 1.3

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E. Montrer que la trace de p est égale à son rang.
2. Soient $q \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^q = I_n$. Montrer que $\dim(\operatorname{Ker}(A - I_n)) = \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} \operatorname{tr}(A^k)$.

   On pourra appliquer la question précédente à $B = \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} A^k$.

Exercice 1.4

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$.
2. Si A est inversible, en déduire l'expression de A^{-1}.

Exercice 1.5

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 - 6A + 8I_2 = 0$.
2. En déduire que A est inversible, et donner l'expression de A^{-1}.
3. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.6

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$ (où u^n désigne $u \circ \cdots \circ u$, avec n fois u).

1. Si $x \in E \setminus \operatorname{Ker}(u^{n-1})$, montrer que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E et donner la matrice de u dans cette base.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$. Montrer que A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.7

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, calculer le déterminant de taille $n \in \mathbb{N}^*$: $\begin{vmatrix} a+b & b & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & a & a+b \end{vmatrix}$.

■ Approfondir

Exercice 1.8

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $E_1, \ldots, E_n, F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E vérifiant pour tout entier $i \in [\![1,n]\!]$, $E_i \subset F_i$ et

$$E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n.$$

Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $E_i = F_i$.

Exercice 1.9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Le but de cet exercice est de montrer que si $F_1, \ldots, F_p$ sont des sous-espaces stricts de E (c'est-à-dire différents de E), alors $F_1 \cup \cdots \cup F_p \neq E$.

1. Montrer qu'il suffit de montrer le résultat voulu lorsque $F_1, \ldots, F_p$ sont de dimension $n-1$ (ce que l'on suppose dans la suite).

2. Soit F un sous-espace de E de dimension $n-1$. Montrer que si $a \notin F$, $F \oplus \mathbb{K}a = E$. En déduire qu'il existe $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ non nulle telle que $F = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

3. Soit e une base de E. Montrer que $x \in F_1 \cup \cdots \cup F_p$ si et seulement si ses coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ en base e vérifient

$$(a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n) \cdots (a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n) = 0$$

où pour $i \in [\![1,p]\!]$, $(a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

4. En exploitant le fait que $P = (a_{1,1} + \cdots + a_{1,n}X^{n-1}) \times \cdots \times (a_{p,1} + \cdots + a_{p,n}X^{n-1})$ est non nul, montrer que $F_1 \cup \cdots \cup F_p \neq E$.

Exercice 1.10

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée de trace nulle.

1. Montrer que si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie vérifiant, pour tout vecteur $x \in E$, $(x, u(x))$ liée, alors u est une homothétie.

2. En déduire que M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & N \end{pmatrix}$, avec $N \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

3. Montrer que M est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice 1.11

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A^2 = -I_n$, $E = \mathbb{R}^n$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.

1. Justifier que n est pair.
2. Montrer si $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $(x, u(x))$ est libre. Si $y \notin \mathrm{Vect}(x, u(x))$, montrer que $(x, u(x), y, u(y))$ est libre.
3. En déduire que A est semblable à une matrice diagonale par blocs, avec des blocs diagonaux de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Donner une base de Ker(tr) en fonction des matrices $E_{i,j}$ (dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient (i, j) qui vaut 1).
2. Soit f une forme linéaire sur E vérifiant $\forall (A, B) \in E^2$, $f(AB) = f(BA)$. Montrer que f est proportionnelle à la trace.
3. Soit g un endomorphisme de E vérifiant $\forall (A, B) \in E^2$, $g(AB) = g(BA)$ et $g(I_n) = I_n$. Montrer que g préserve la trace (c'est-à-dire que pour tout $A \in E$, $\mathrm{tr}(g(A)) = \mathrm{tr}(A)$).

Exercice 1.13

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}$.

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $D_{n+1} = n! + (n+1)D_n$.
2. En déduire une expression de D_n en fonction de $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (on pourra étudier $\dfrac{D_n}{n!}$).

Exercice 1.14

1. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Montrer que $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A + B)\det(A - B)$.
2. Soit $(A, B, C, D) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^4$ tel que A soit inversible et $AC = CA$. Montrer que
$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - CB).$$

Corrections

Interro de cours

1. La somme $E_1 + \cdots + E_n$ est directe si l'écriture d'un élément x de cet espace sous la forme $x_1 + \cdots + x_n$, avec $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ est unique.

2. **(a) est faux :** Dans $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel par exemple, $F = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{R}i$ et $H = \mathbb{R}j$ (où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$) vérifient $F \cap G = F \cap H = G \cap H = \{0\}$, mais la somme $F + G + H$ n'est pas directe (sinon elle serait de dimension 3, ce qui est absurde puisque $\mathbb{C}$ est de dimension 2).
(b) est vrai : Si $i \neq j \in [\![1, p]\!]$ et $x \in E_i \cap E_j$, on a $0 = x + (-x)$, avec $x \in E_i$ et $-x \in E_j$, donc $x = -x = 0$ (puisque la somme est directe). Ainsi $E_i \cap E_j = \{0\}$.
(c) est vrai : C'est un théorème du cours.
(d) est faux : La somme est directe si l'écriture est unique (pas si elle existe). Pour un contre-exemple, les espaces F, G et H du (a) conviennent : tout élément de $\mathbb{C}$ peut s'écrire sous la forme $x + iy + 0$ (x et y étant des réels) avec $x \in F$, $iy \in G$ et $0 \in H$, mais la somme n'est pas directe.

3. Soit $(P_0, \ldots, P_n) \in F_0 \times \cdots \times F_n$ tel que $P_0 + \cdots + P_n = 0$. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, en prenant la valeur en i, on obtient $P_i(i) = 0$ (puisque pour $j \neq i$, $P_j(i) = 0$). Ainsi P_i admet tous les entiers entre 0 et n comme racines, ce qui lui fait $n + 1$ racines au moins. Comme $\deg(P_i) \leqslant n$, on en déduit que $P_i = 0$, et comme ceci vaut pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, la somme $F_0 + \cdots + F_n$ est directe.
De plus $\dim(F_i) \geqslant 1$ pour $i \in [\![0, n]\!]$ (F_i contient au moins le polynôme $\prod\limits_{j\neq i}(X - j)$), donc

$$\dim(F_1 \oplus \cdots \oplus F_n) = \dim(F_1) + \cdots + \dim(F_n) \geqslant n + 1 = \dim(E)$$

et on en déduit que $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = E$.

4. Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
Si $u \in \mathscr{L}(E)$, $\operatorname{tr}(u)$ est la trace de la matrice de u dans une base de E (ce scalaire ne dépend pas de la base choisie car deux matrices semblables ont même trace).

5. **(a) est vrai :** Si A et B sont semblables, elles représentent le même endomorphisme u dans deux bases différentes. Ainsi $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(B)$.
(b) est faux : Deux matrices de même rang ne sont pas nécessairement semblables. Par exemple $A = I_2$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables mais ont même rang (2). En effet, si on avait $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $B = P^{-1}AP$, alors $B = P^{-1}P = I_2$... absurde !
(c) est vrai : C'est un théorème du cours.
(d) est faux : Deux matrices de même trace ne sont pas nécessairement semblables. Par exemple $A = I_2$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables (comme vu au b) mais ont même trace (2).

6. On pose $E = \mathbb{R}^n$, e la base canonique de E, et on considère l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{Mat}_e(u) = A$. La relation $A^2 = I_n$ donne $u^2 = \operatorname{id}_E$, donc u est une symétrie. C'est la symétrie par rapport à $F = \operatorname{Ker}(u - \operatorname{id}_E)$ parallèlement à $G = \operatorname{Ker}(u + \operatorname{id}_E)$.
Soit $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$. Si $p = \dim(F)$, pour $i \in [\![1, p]\!]$, on a $u(f_i) = f_i$ et pour $i \in [\![p+1, n]\!]$, on a $u(f_i) = -f_i$. La matrice de u en base f est donc $B = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$.

7. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$, donc $A^2 - 3A + 2I_2 = 0$. Par suite $A(3I_2 - A) = 2I_2$, ce qui montre que A est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I_2 - A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Notons $P = X^2 - 3X + 1$ et pour $p \in \mathbb{N}$, $X^p = Q_pP + R_p$ est la division euclidienne de X^p par P. On a $A^p = R_p(A)$. Comme $\deg(R_p) < \deg(P) = 2$, R_p est de la forme $a_pX + b_p$, avec $(a_p, b_p) \in \mathbb{R}^2$. Les racines de P sont 1 et 2, donc $R_p(1) = 1$ et $R_p(2) = 2^p$, ce qui montre que a_p et b_p sont solutions du système
$\begin{cases} a_p + b_p = 1 \\ 2a_p + b_p = 2^p \end{cases}$
En effectuant la combinaison $L_2 - L_1$, on obtient $a_p = 2^p - 1$. Par suite $b_p = 1 - a_p = 2 - 2^p$. Ainsi

$$A^p = R_p(A) = a_pA + b_pI_2 = \begin{pmatrix} 3 - 2^{p+1} & -2^{p+1} + 2 \\ 3 \times 2^p - 3 & 3 \times 2^p - 2 \end{pmatrix}.$$

8. En développant suivant la première colonne, on trouve

$$D \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

9. On a $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.

Cette formule a été prouvée dans la méthode **1.4**, il est très important de savoir la retrouver (et la reprouver) rapidement.

10.
Les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux a_i sont :

$$L_i = \prod_{0 \leqslant j \leqslant n, j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j} \quad \text{pour} \quad i \in [\![0, n]\!].$$