Marie-Virginie Speller

De la Terminale au Supérieur

MATHÉMATIQUES

Tout pour bien démarrer ses études d'économie-gestion

DUNOD

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier l'équipe d'édition pour son soutien, son écoute et sa confiance.

Merci en particulier à Maxine et à Matthieu avec qui ce fut un plaisir de travailler.

Je remercie également tous les élèves que j'ai pu accompagner au cours de leurs études. Leurs doutes et leurs questionnements m'ont permis d'insister sur les points qui posent le plus de problèmes aux étudiants à la sortie du lycée.

J'espère que cet ouvrage répondra aux attentes des futurs étudiants en sciences économiques.

Bon travail et belle rentrée à tous !

Marie-Virginie SPELLER

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN : 978-2-10-080080-3

80080 - (I) - OSB 80 - P294U - LUM - NRI

JOUVE
1, rue du Docteur Sauvé, 53100 MAYENNE
Dépôt légal : juin 2019

Imprimé en France

Table des matières

Partie 1 Outils mathématiques

Partie 2 Les fonctions d'une seule variable

Partie 3 Intégration

Partie 4 Les suites

Partie 5 Les nombres complexes

Partie 6 Les Matrices

Partie 7 Probabilités et Statistiques

Introduction : Bienvenue à l'université !

Tout d'abord FÉLICITATIONS à vous qui êtes devenu bachelier ! Bravo !

Avant de consulter cet ouvrage nous vous invitons à lire ces quelques lignes en guise d'introduction car vous entrez dans un nouvel univers, la « fac » ! Comme vous pourrez le découvrir, l'université est bien différente du lycée.

À qui s'adresse ce livre ?

Cet ouvrage regroupe les notions de lycée à maîtriser parfaitement en mathématiques pour entrer en licence d'économie. Même s'il s'agit d'« économie », les mathématiques et les statistiques y sont très représentés et ont souvent un gros coefficient.

Ce livre est un « compagnon » qui vous aidera à appréhender les chapitres traités en TD et en amphithéâtre. Certaines pages anticipent le programme pour faciliter la compréhension des différents raisonnements et thèmes abordés.

Une nouvelle forme d'évaluation

Vous aviez l'habitude, au lycée, d'être évalué par des interrogations et des contrôles fréquents. À l'université, vous aurez seulement un à deux contrôles continus par semestre et par matière. Des partiels ont également lieu en milieu et en fin d'année scolaire. Vous devez donc travailler de manière régulière pour ne pas accumuler trop de retard et vous retrouver débordé la veille des partiels !

Quelle attitude adopter à l'université ?

- **Travaillez régulièrement !**

Avec la masse de nouvelles informations que vous allez devoir digérer au cours de la semaine, vous ne pouvez pas vous permettre de travailler par intermittence. Sinon vous serez vite perdu et accumulerez trop de retard.

Prenez l'habitude de lire vos notes prises au cours de la journée tous les soirs en rentrant chez vous. Notez les différents points que vous ne saisissez pas bien et n'hésitez pas à aller voir vos professeurs pour leur poser des questions.

- **Entraidez-vous !**

Prêtez vos cours aux absents, expliquez ce que vous avez bien compris à ceux qui ont des difficultés, travaillez avec vos camarades de TD, etc. Vous avancez, en effet, beaucoup plus rapidement en expliquant aux autres et en leur posant des questions plutôt qu'en travaillant tout seul dans votre coin.

• **Sortez et faites-vous des amis !**

Ne faites pas que travailler avec les personnes de votre promotion, sortez, allez au cinéma, allez au théâtre, allez voir des expositions, pratiquez un sport, etc. Organisez-vous aussi des dîners de TD. Le but est de partager autre chose que la vie purement scolaire avec vos camarades.

• **Rassurez-vous !**

Il se peut que vous entendiez beaucoup de commentaires décourageants sur l'université : « il y a beaucoup d'échec », « c'est très difficile si tu n'as suivi telle ou telle filière », etc. De quoi vous miner le moral. Mais considérez les choses du bon côté :

– vous avez choisi cet enseignement et vous avez obtenu votre baccalauréat. C'est tout de même une très bonne nouvelle !

– vous allez travailler sur des thèmes qui vous plaisent *a priori* ;

– vous allez découvrir un nouvel univers très différent du lycée ;

– même si les deux premières années sont plutôt généralistes, vous pourrez choisir, au cours de vos études, des options qui correspondent davantage à vos goûts et préférences.

• La fin de l'année… premier bilan

– Vous êtes admis deuxième année ! BRAVO et bonne chance pour la suite !

– Vous n'êtes pas reçu en deuxième année. Deux solutions s'offrent à vous : redoubler ou changer de filière :

  – dans le cas d'un redoublement, vous bénéficiez d'une certaine avance sur le programme et disposez donc davantage de temps libre. Profitez-en pour perfectionner votre anglais, apprendre une autre langue étrangère, apprendre à jouer d'un instrument de musique, chercher un job étudiant, etc.

  – si vous souhaitez vous réorienter, demandez conseil à vos professeurs : certaines passerelles existent et une réorientation est possible. Consultez, si vous en ressentez le besoin, une conseillère d'orientation. Rendez-vous aussi aux portes ouvertes des écoles de commerce post-bac et des autres universités, etc. Certaines recrutent au niveau bac + 1.

– En aucun cas, cette non-admission en deuxième année ne constitue un échec. Vous avez découvert un autre monde que le lycée, rencontré de nouvelles personnes et avez acquis de nouvelles notions. Vous pourrez ainsi réussir brillamment dans d'autres filières.

« Rire souvent et beaucoup ; gagner le respect des gens intelligents et l'affection des enfants ; savoir qu'un être a respiré plus aisément parce que vous avez vécu. C'est cela réussir sa vie. »

Ralph Waldo Emerson

À ma famille de cœur

Partie

1 Outils mathématiques

1 Calcul mental

1. Je fais le point sur mes connaissances

a. Opérateurs utilisés dans le dénombrement

Factorielles

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots 2 \times 1$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800

ASTUCE : SIMPLIFICATION DE FACTORIELLES

$n! = n \times (n-1)!$ ainsi $\dfrac{n!}{(n-1)!} = n$

Exemples

$10! = 10 \times 9!$ $\qquad$ $\dfrac{8!}{7!} = \dfrac{8 \times 7!}{7!} = 8$

Combinaisons

La combinaison de k éléments parmi n est le nombre de manières de choisir simultanément k éléments parmi n. Pour $n \geq k$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

Triangle de Pascal $\binom{n}{k}$

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	2	3	4	5
2	0	0	1	3	6	10
3	0	0	0	1	4	10
4	0	0	0	0	1	5
5	0	0	0	0	0	1

À RETENIR

$$\binom{n}{0} = 1 \; ; \; \binom{n}{1} = n \; ; \; \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{k} = 0 \text{ pour } n < k$$

Arrangements

L'arrangement de k éléments parmi n est le nombre de manières de choisir k éléments parmi n successivement et sans remise. Pour $n \geq k$:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = k! \times \binom{n}{k}$$

b. Sommes

	Sommer $(n+1)$ fois la même constante a	Somme des $(n+1)$ premiers entiers	Somme des $(n+1)$ premiers entiers élevés au carré	Somme des $(n+1)$ premiers entiers élevés au cube
Type de somme	$\sum_{k=0}^{n} a = (n+1) \times a$	$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

ASTUCE : COMMENT OBTENIR LE NOMBRE DE TERMES D'UNE SOMME ?

Il suffit de soustraire l'indice du dernier terme à celui du premier et d'ajouter 1.

Ainsi pour une somme commençant à $k = p$ et finissant à $k = n$ (avec $n \geq p$), il y a $(n - p + 1)$ termes.

Exemple

Dans la somme $\sum_{k=5}^{12} k$, il y a $12 - 5 + 1 = 8$ termes.

2. Je mémorise les mots clés

Carré

Élever un nombre au carré revient à le multiplier par lui-même : $x^2 = x \times x$.

Chiffre

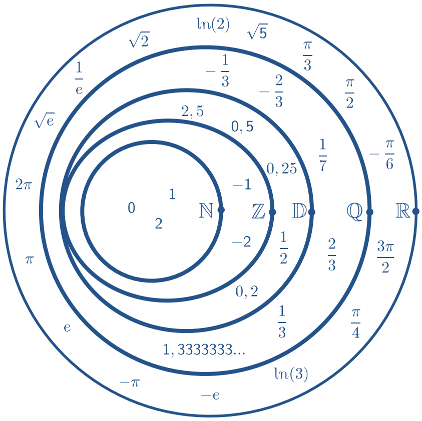
Un chiffre est un symbole permettant d'écrire des nombres. Il y a 10 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

Cube

Élever un nombre au cube revient à le multiplier par lui-même à deux reprises : $x^3 = x \times x \times x$.

Outils mathématiques
Les fonctions
Intégration
Les suites
Les nombres complexes
Les matrices
Probabilités et Statistiques

Ensemble de nombres



Entiers naturels

Un entier naturel est un nombre positif permettant de dénombrer les objets ou choses. L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ \ldots\}$.

Exemples

1 et 2 sont des entiers naturels.

Entiers relatifs

Un entier relatif est un nombre entier positif ou négatif. L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} = \{\ldots\ ;\ -3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \ldots\}$.

Exemples

– 1 et 5 sont des entiers naturels.

Factorielle

La factorielle d'un entier naturel n est le produit des nombres entiers compris entre 0 et n. $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$.

Nombre

Un nombre est formé de plusieurs chiffres. Il existe une infinité de nombres.

Nombres décimaux

Un nombre décimal a une écriture décimale finie. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exemples

0,5 et 1,25 sont des nombres décimaux.

Nombres rationnels

Un nombre rationnel est un nombre décimal ayant une écriture décimale périodique. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Exemples

$\frac{1}{3}$ et 1,33333… sont des nombres rationnels.

Nombres réels

Un nombre réel est représenté par une partie entière et une série finie ou infinie de décimales. L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Exemples

$\frac{1}{3}$; 1 ; 0,5 ; π ; $\sqrt{2}$ sont des réels.

REMARQUE

L'ensemble des nombres réels regroupe les nombres entiers (naturels et relatifs), les nombres décimaux et les nombres rationnels.

Puissance

Élever un nombre à une certaine puissance n revient à le multiplier par lui-même à $(n-1)$ reprises.

3. Ai-je bien compris le cours ?

Question 1 : $\binom{5}{2} = ?$

❒ **A.** 1 ❒ **B.** 2 ❒ **C.** 5 ❒ **D.** 10

Question 2 : $\sum_{k=0}^{10} k = ?$

❒ **A.** 10 ❒ **B.** 11 ❒ **C.** 55 ❒ **D.** 110

Question 3 : $\sum_{k=0}^{10} k^3 = ?$

❒ **A.** 3 025 ❒ **B.** 2 025 ❒ **C.** 550 ❒ **D.** 110

Question 4 : $\sum_{k=0}^{10} 2^k = ?$

❒ **A.** 2 048 ❒ **B.** 2 047 ❒ **C.** 550 ❒ **D.** 11

Question 5 : $\sum_{k=3}^{10} 1 = ?$

❒ **A.** 7 ❒ **B.** 8 ❒ **C.** 9 ❒ **D.** 10

4. Je vérifie mes résultats

1. Réponse D. $\binom{5}{2} = \dfrac{5!}{2! \times (5-2)!} = \dfrac{5!}{2! \times 3!} = \dfrac{120}{2 \times 6} = \dfrac{120}{12} = 10.$

2. Réponse C. $\sum_{k=0}^{10} k = \dfrac{10(10+1)}{2} = \dfrac{10 \times 11}{2} = \dfrac{110}{2} = 55.$

REMARQUE

- Dans cette somme, il y a 10 – 0 + 1 = 11 termes.

3. Réponse A. $\sum_{k=0}^{10} k^3 = \left(\dfrac{10(10+1)}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{10 \times 11}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{110}{2}\right)^2 = 55^2 = 3\,025.$

REMARQUE

Pour calculer le carré de 55, vous pouvez utiliser l'astuce évoqué précédemment :

$55^2 = 3\,025$, en effet :

$$\left.\begin{array}{l} 5 \times (5+1) = 5 \times 6 = \mathbf{30} \\ 5^2 = \mathbf{25} \end{array}\right\} \quad 55^2 = \mathbf{3\,025}.$$

4. Réponse B. $\sum_{k=0}^{10} 2^k = 2^0 \times \dfrac{1-2^{10+1}}{1-2} = 1 \times \dfrac{1-2^{11}}{1-2} = \dfrac{1-2^{11}}{-1} = 2^{11} - 1 = 2\,048 - 1 = 2\,047.$

REMARQUE

- Dans cette somme, il y a 10 – 0 + 1 = 11 termes.

ASTUCE

Apprenez bien vos puissances de 2 : $2^{10} = 1\,024$ donc

$2^{11} = 2 \times 2^{10} = 2 \times 1\,024 = 2\,048$

5. Réponse B. $\sum_{k=3}^{10} 1 = 1 + \ldots + 1 = 1 \times 8 = 8.$

REMARQUE

Dans cette somme, il y a 10 – 3 + 1 = 8 termes.

ASTUCE

Sommer n fois une même constante revient à la multiplier par n. Dans cette question la constante 1 est sommée 8 fois.

Calculs impliquant différents opérateurs 2

1. Je fais le point sur mes connaissances

a. Les fractions

Définition

La fraction $\frac{a}{b}$ est égale à la division de a par b avec b non nul.

ATTENTION

Le dénominateur d'une fraction doit toujours être non nul !

Simplification de fractions

Pour tout réel a et pour tous réels non nuls x et b :

$$\frac{x \times a}{x \times b} = \frac{a \times x}{b \times x} = \frac{a}{b}$$

Exemple

$\frac{10}{14} = \frac{5 \times 2}{7 \times 2} = \frac{5}{7}$

Produit de deux fractions

Pour tous réels a et c et pour tous réels non nuls b et d :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Exemple

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$

Quotient de deux fractions

Pour tout réel a et pour tous réels non nuls b, c et d :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Exemple

$\frac{2}{3} \div \frac{4}{2} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{2 \times 2}{3 \times 4} = \frac{4}{12} = \frac{4 \times 1}{4 \times 3} = \frac{1}{3}$

b. Les puissances

Quelques valeurs et définition

Élever un nombre à la puissance n revient à multiplier $(n - 1)$ fois ce nombre par lui-même.

$$x^n = \underbrace{x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ fois}}$$

REMARQUE

x apparaît n fois et est multiplié par lui-même $(n - 1)$ fois.

$$x^0 = 1 \qquad x^1 = x$$

Exemples

$$2^0 = 1 \qquad 3^1 = 3 \qquad 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

Addition et soustraction de puissances

Cas où la puissance est différente :

$$x^a + x^b \neq x^{a+b} \qquad x^a - x^b \neq x^{a-b}$$

Exemples

$$2^2 + 2^3 = 12 \neq 2^{2+3} = 32 \qquad 5^3 - 5^2 = 100 \neq 5^{3-2} = 5$$

Cas où la puissance est identique :

$$x^a + x^a = 2x^a \qquad x^a + y^a \neq (x + y)^a$$

Exemples

$$2^3 + 2^3 = 16 = 2 \times 2^3 = 16 \qquad 5^3 + 5^3 = 250 \neq (5 + 5)^3 = 1\,000$$

Signe d'un nombre élevé à une certaine puissance

Tout nombre réel élevé à une puissance paire est positif :

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ x^{2n} > 0$$

Tout nombre élevé à une puissance impaire garde son signe initial :

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x > 0,\ x^{2n+1} > 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x < 0,\ x^{2n+1} < 0$$

Exemples

$$(-1)^4 = 1 \qquad 2^3 = 8 \qquad (-3)^5 = -243 \qquad 3^2 = 9$$

Multiplication de puissances

$$x^a \times x^b = x^{a+b} \qquad (x \times y)^a = x^a \times y^a$$

Exemples

$$2^7 \times 2^3 = 2^{7+3} = 2^{10} = 1\,024 \qquad (2 \times 5)^2 = 2^2 \times 5^2 = 4 \times 25 = 100$$

Division de puissances

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \qquad \frac{1}{x^a} = x^{-a} \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$$

Exemples

$$\frac{2^2}{2^5} = 2^{2-5} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \qquad \frac{10^3}{10^{-4}} = 10^{3-(-4)} = 10^{3+4} = 10^7$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9} \qquad \left(\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{7^3}{2^3} = \frac{343}{8}$$

Puissances de puissances

$$(x^a)^b = x^{a \times b} = x^{ab}$$

Exemples

$$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12} = 4\,096 \qquad (3^4)^{0{,}5} = 3^{4 \times 0{,}5} = 3^2 = 9$$

c. Les racines carrées

Définition

La racine carrée d'un nombre réel (positif ou nul) renvoie une valeur dont le carré est égal au nombre initial.

La racine carrée d'un nombre élevé au carré est égale à la valeur absolue de ce nombre :

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a \text{ si } a \text{ positif} \\ -a \text{ si } a \text{ négatif} \end{cases}$$

REMARQUE

$\forall x \geq 0,\ \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = x^{0{,}5}$.

À RETENIR

Une racine carrée est toujours positive ou nulle !

Simplification de racines carrées

Pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout réel a :

$$\sqrt{xa^2} = |a|\sqrt{x}$$

Pour tout réel a non nul :

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Exemples

$$\sqrt{32} = \sqrt{2 \times 16} = \sqrt{2 \times 4^2} = 4\sqrt{2} \qquad \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Addition et soustraction de racines carrées

Pour a et b réels positifs ou nuls tels que $a \geq b$:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b} \qquad \sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b} \qquad \sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a}$$

Exemples

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} \neq \sqrt{5} \qquad \sqrt{5} - \sqrt{2} \neq \sqrt{3} \qquad \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Multiplication et division de racines carrées

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \qquad \sqrt{a} \div \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Exemples

$$\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{3 \times 2} = \sqrt{6} \qquad \sqrt{6} \div \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3}$$

2. Je mémorise les mots clés

Dénominateur

Il s'agit du nombre situé en bas d'une fraction. Dans la fraction $\frac{a}{b}$, il s'agit du diviseur de la division de a par b (où b est non nul).

Fraction

Une fraction s'écrit sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ où a est le numérateur et b le dénominateur (b non nul). Il s'agit aussi de la division de a par b.

Numérateur

Il s'agit du nombre situé en haut d'une fraction. Dans la fraction $\frac{a}{b}$, il s'agit du dividende de la division de a par b (où b est non nul).

Puissance

Élever un nombre à la puissance n revient à la multiplier par lui-même à $(n - 1)$ reprises.

Quotient

Le quotient est le résultat de la division d'un dividende par un diviseur.

Racine carrée

La racine carrée d'un nombre réel (positif ou nul) renvoie une valeur dont le carré est égal au nombre initial.

Radicande

Dans l'expression d'une racine carrée, le radicande est l'expression située à l'intérieur du symbole √.

Radical

Le radical est une autre appellation de la racine carrée.

3. Ai-je bien compris le cours ?

Question 1 : $\sqrt{288}+\sqrt{32}-\sqrt{128}=$?

❐ **A.** $8\sqrt{2}$ ❐ **B.** $14\sqrt{2}$ ❐ **C.** $17\sqrt{2}$ ❐ **D.** 1 024

Question 2 : $\dfrac{12}{5}\times\dfrac{3}{4}=$?

❐ **A.** $\dfrac{3}{2}$ ❐ **B.** $\dfrac{9}{5}$ ❐ **C.** $\dfrac{2}{3}$ ❐ **D.** $\dfrac{5}{4}$

Question 3 : $\dfrac{14}{3}\div\dfrac{5}{7}=$?

❐ **A.** $\dfrac{12}{7}$ ❐ **B.** $\dfrac{14}{5}$ ❐ **C.** $\dfrac{10}{3}$ ❐ **D.** $\dfrac{98}{15}$

Question 4 : $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}=$?

❐ **A.** $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$ ❐ **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ ❐ **C.** $\dfrac{\sqrt{15}}{6}$ ❐ **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{12}$

Question 5 : $\dfrac{2^8\times3^{-5}\times4^3}{3^2\times2^{-5}}=$?

❐ **A.** $\dfrac{2^{19}}{3^7}$ ❐ **B.** $\dfrac{2^{12}}{3^3}$ ❐ **C.** $\dfrac{2^{11}}{3^{-7}}$ ❐ **D.** $\dfrac{2^{17}}{3^5}$

4. Je vérifie mes résultats

1. Réponse A. $\sqrt{288}+\sqrt{32}-\sqrt{128}=\sqrt{144\times2}+\sqrt{16\times2}-\sqrt{64\times2}=12\sqrt{2}+4\sqrt{2}-8\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

2. Réponse B. $\dfrac{12}{5}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{36}{20}=\dfrac{18}{10}=\dfrac{9}{5}=1{,}8$

3. Réponse D. $\dfrac{14}{3}\div\dfrac{5}{7}=\dfrac{14}{3}\times\dfrac{7}{5}=\dfrac{98}{15}$

4. Réponse C. $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}=\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{12}}{\sqrt{12}\times\sqrt{12}}=\dfrac{\sqrt{60}}{12}=\dfrac{\sqrt{15\times4}}{12}=\dfrac{2\sqrt{15}}{12}=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$

5. Réponse A. $\dfrac{2^8\times3^{-5}\times4^3}{3^2\times2^{-5}}=\dfrac{2^8\times3^{-5}\times(2^2)^3}{3^2\times2^{-5}}=\dfrac{2^8\times3^{-5}\times2^{2\times3}}{3^2\times2^{-5}}=\dfrac{2^8\times3^{-5}\times2^6}{3^2\times2^{-5}}$

$=\dfrac{2^{8+6}\times3^{-5}}{3^2\times2^{-5}}=\dfrac{2^{14}\times3^{-5}}{3^2\times2^{-5}}=\dfrac{2^{14+5}}{3^{2+5}}=\dfrac{2^{19}}{3^7}$

3 Développement et factorisation – Identités remarquables – Binôme de Newton

1. Je fais le point sur mes connaissances

a. Développement et factorisation

<table>
<tr><th colspan="2">Associativité</th></tr>
<tr><td>$(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$</td><td>$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)=a\times b\times c$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Commutativité</th></tr>
<tr><td>$a+b=b+a$</td><td>$a\times b=b\times a$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Distributivité</th></tr>
<tr><td>$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$</td><td>$(a+b)\times(c+d)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Identités remarquables</th></tr>
<tr><td>Les carrés
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$</td><td>Les cubes
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$</td></tr>
</table>

b. Binôme de Newton

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}=(a+b)^n$$

2. Je mémorise les mots clés

Développement

Il s'agit du résultat du développement (distributivité) d'un ou plusieurs facteurs.

Factorisation

Il s'agit de la multiplication d'une somme ou d'une différence par un même facteur (le facteur commun).

Produit

Il s'agit de la multiplication d'un ou plusieurs facteurs.

Somme

Il s'agit de l'addition d'un ou plusieurs termes.

3. Ai-je bien compris le cours ?

Question 1 : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = ?$

❒ **A.** 0 ❒ **B.** 1 ❒ **C.** 2 ❒ **D.** 2^n

Question 2 : Développer l'expression $A = (x + 1)(x^2 - 2x + 4)$:

❒ **A.** $x^3 - x^2 + 2x + 4$ ❒ **C.** $x^3 + x^2 + 4$

❒ **B.** $x^3 - 2x^2 + x + 4$ ❒ **D.** $-3x^2 + x + 4$

Question 3 : Factoriser l'expression $A = (x + 1) + 2(x^2 - 1) - (x + 1)^2$:

❒ **A.** $A = (x + 1)(x - 3)$ ❒ **C.** $A = (2x + 1)(x + 4)$

❒ **B.** $A = (x + 1)(x - 2)$ ❒ **D.** $A = (3x - 1)(x + 3)$

Question 4 : Factorisez l'expression $B = x^3 - 343$:

❒ **A.** $B = (x - 7)(x^2 + 7)$ ❒ **C.** $B = (x - 7)(x^2 + 7x + 49)$

❒ **B.** $B = (x + 7)(x^2 + 7)$ ❒ **D.** $B = (x + 7)(x^2 - 7x + 49)$

Question 5 : Factorisez l'expression $C = x^3 + 512$:

❒ **A.** $C = (x - 8)(x^2 + 8x + 64)$ ❒ **C.** $C = (x + 8)^2(x + 8)$

❒ **B.** $C = (x + 8)(x^2 + 8)$ ❒ **D.** $C = (x + 8)(x^2 - 8x + 64)$

4. Je vérifie mes résultats

1. Réponse D. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$

ASTUCE

En remplaçant a et b par 1 dans la formule du Binôme de Newton, vous obtenez :

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k \times 1^{n-k} = (1+1)^n$ et finalement $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

2. Réponse A. $(x + 1)(x^2 - 2x + 4) = x^3 - 2x^2 + 4x + x^2 - 2x + 4 = x^3 - x^2 + 2x + 4$

3. Réponse B. En repérant le facteur commun $x + 1$, vous obtenez :

$A = (x + 1) + 2(x^2 - 1) - (x + 1)^2 = (x + 1) \times 1 + 2(x - 1)(x + 1) - (x + 1)(x + 1)$

$A = (x + 1)[1 + 2(x - 1) - (x + 1)] = (x + 1)(1 + 2x - 2 - x - 1) = (x + 1)(x - 2)$

4. Réponse C. En reconnaissant l'identité remarquable

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ avec $a = x$ et $b = 7$:

$B = x^3 - 343 = x^3 - 7^3 = (x - 7)(x^2 + x \times 7 + 7^2) = (x - 7)(x^2 + 7x + 49)$

5. Réponse D. En reconnaissant l'identité remarquable

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ avec $a = x$ et $b = 8$:

$C = x^3 + 512 = x^3 + 8^3 = (x + 8)(x^2 - x \times 8 + 8^2) = (x + 8)(x^2 - 8x + 64)$

4 Équations

1. Je fais le point sur mes connaissances

a. Généralités

Les équations se présentent sous la forme $f(x) = b$ et les solutions s'obtiennent en effectuant le calcul $x = f^{-1}(b)$ où f^{-1} est la fonction réciproque de f (avec f fonction bijective). f peut être affine, de forme logarithmique, exponentielle, etc.

ATTENTION

La formule $x = f^{-1}(b)$ n'est valable que si f est bijective.

Exemple

La fonction carrée f définie par $f(x) = x^2$ ne réalise pas une bijection sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ (elle est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$).
Vous ne pouvez donc pas utiliser la formule $x = f^{-1}(b)$ avec cette fonction.

À RETENIR

Une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I vers $f(I) = J$.

RAPPEL

Une fonction f est strictement monotone sur un intervalle I si elle n'est que strictement croissante sur I ou que strictement décroissante sur I.

b. Les équations avec expressions affines

Équations du type ax = 0 *avec* a *réel :*

Si a est non nul, alors l'unique solution de cette équation est $x = 0$ et $S = \{0\}$.

Si a est nul, alors l'équation admet une infinité de solutions et $S = \mathbb{R}$.

Équations du type x + b = 0 *avec* b *réel :*

L'unique solution de cette équation est $x = -b$ et $S = \{-b\}$.

Équations du type ax + b = 0 *avec* a *et* b *réels non nuls :*

L'unique solution de cette équation est $x = -\dfrac{b}{a}$ et $S = \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$.

Exemples

- $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $S = \{0\}$
- $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $S = \{1\}$
- $3x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{8}{3}$ et $S = \left\{-\dfrac{8}{3}\right\}$
- $-2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{-2} \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$ et $S = \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$

c. Les équations sous forme de facteurs

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul :

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Exemples

- $(-5x+1)(2x-3) = 0 \Leftrightarrow -5x+1 = 0 \text{ ou } 2x-3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{5} \text{ ou } x = \dfrac{3}{2}$ et $S = \left\{\dfrac{1}{5}\ ;\ \dfrac{3}{2}\right\}$
- $(x-1)(x-3) + x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) + (x-3)(x+3) = 0$

  $\Leftrightarrow (x-3)[(x-1)+(x+3)] = 0 \Leftrightarrow (x-3)(2x+2) = 0$

  $\Leftrightarrow x - 3 = 0$ ou $2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -1$ et $S = \{-1\ ;\ 3\}$

d. Les équations sous forme de quotients

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur **non nul** :

$$\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ et } B \neq 0$$

ATTENTION

Lorsque vous obtenez une solution qui est une valeur interdite (c'est-à-dire qui annule le dénominateur), vous ne devez pas en tenir compte dans l'ensemble des solutions.

Exemple

$\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0$ et $x - 2 \neq 0$

$\Leftrightarrow (x - 2 = 0$ ou $x - 3 = 0)$ et $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x = 3$ et $S = \{3\}$

ATTENTION

Dans cet exemple, 2 est une valeur interdite !

e. Les équations non linéaires

Équation	Solution(s)
$\frac{1}{x} = a,\ x \neq 0,\ a \neq 0$	$x = \frac{1}{a},\ x \neq 0,\ a \neq 0$
$\ln(x) = a,\ x > 0$	$x = \mathrm{e}^{a}$
$\mathrm{e}^{x} = a,\ a > 0$	$x = \ln(a),\ a > 0$
$\sqrt{x} = a,\ a \geq 0$	$x = a^2,\ a \geq 0$
$x^2 = a,\ a \geq 0$	$x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}\ a \geq 0$
$x^3 = a,\ a$ réel	$x = \sqrt[3]{a},\ a$ réel
$\lvert x \rvert = a,\ a \geq 0$	$x = a$ ou $x = -a$
$x^{2p} = a,\ a \geq 0$	$x = \sqrt[2p]{a}$ ou $x = -\sqrt[2p]{a}\ a \geq 0$
$x^{2p+1} = a,\ a$ réel	$x = \sqrt[2p+1]{a},\ a$ réel

REMARQUE

Un nombre entier pair n s'écrit $n = 2p$ et un nombre entier impair s'écrit $n = 2p + 1$ avec p entier naturel.

À RETENIR

- Un carré est toujours positif ou nul.
- Une racine carrée est toujours positive ou nulle.
- Une valeur absolue est toujours positive ou nulle.
- Une exponentielle est toujours strictement positive.

Exemples

- $\frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$
- $\frac{1}{x} = 0$ n'admet pas de solution
- $\ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\mathrm{e}}$
- $\mathrm{e}^{x} = 4 \Leftrightarrow x = \ln(4)$
- $\mathrm{e}^{x} = -2$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ car une exponentielle est toujours strictement positive.
- $\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 2^2 \Leftrightarrow x = 4$
- $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$
- $x^2 = -25$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ car un carré est toujours positif ou nul (en revanche cette équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont $5\mathrm{i}$ et $-5\mathrm{i}$, voir chapitre sur les nombres complexes).
- $x^3 = 512 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{512} \Leftrightarrow x = 8$
- $x^3 = -27 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-27} \Leftrightarrow x = -3$
- $\lvert x \rvert = 4 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -4$
- $\lvert x \rvert = -2$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$ car une valeur absolue est toujours positive ou nulle.

2. Je mémorise les mots clés

Ensemble vide

Il s'agit de l'ensemble ne comportant aucun élément. Il est noté $\varnothing$ et est utilisé lorsqu'une équation n'admet pas de solution.

Infinité de solutions

Une équation admet une infinité de solutions lorsqu'elle est toujours vraie. On note, dans ce cas, l'ensemble des solutions $S = \mathbb{R}$.

Produit de facteurs nul

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

Solution

La (ou les) solution(s) d'une équation de la forme $f(x) = 0$ est le (ou sont les) point(s) d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses.

Valeur interdite

Une valeur interdite est une valeur que ne peut pas prendre x.

Exemple

Dans l'équation $\frac{x-1}{x+1} = 0$, la valeur interdite est donnée par la condition « dénominateur $\neq 0$ » ce qui équivaut à $x + 1 \neq 0$ et donc à $x \neq -1$. Ainsi -1 est la valeur interdite.

3. Ai-je bien compris le cours ?

Question 1 : Résoudre l'équation : $\ln(x) = 3$

❒ **A.** $S = \{-3\}$ ❒ **C.** $S = \{\ln(3)\}$

❒ **B.** $S = \{e^3\}$ ❒ **D.** $S = \{-\ln(3)\}$

Question 2 : Résoudre l'équation : $e^x = 2$

❒ **A.** $S = \{2\}$ ❒ **C.** $S = \{\ln(2)\}$

❒ **B.** $S = \{e^2\}$ ❒ **D.** $S = \{\ln(0,5)\}$

Question 3 : Résoudre l'équation : $\frac{(x+1)(x-2)}{x-3} = 0$

❒ **A.** $S = \{-1 ; 2 ; 3\}$ ❒ **C.** $S = \{-3 ; -2 ; 1\}$

❒ **B.** $S = \{-2 ; 1\}$ ❒ **D.** $S = \{-1 ; 2\}$

Question 4 : Résoudre l'équation $\frac{x+1}{x-2} = 1$

❒ **A.** $S = \varnothing$ ❒ **C.** $S = \{-1 ; 2\}$

❒ **B.** $S = \mathbb{R}$ ❒ **D.** $S = \{-1\}$

Question 5 : Résoudre l'équation : $(x-1)(2x-4) - (x^2-1) + (x-1) = 0$

❒ **A.** $S = \{1 ; 4\}$ ❒ **C.** $S = \{-2 ; 4\}$

❒ **B.** $S = \{1 ; 2\}$ ❒ **D.** $S = \{-1 ; -4\}$

4. Je vérifie mes résultats

1. Réponse B. $\ln(x) = 3 \Leftrightarrow x = e^3$ et $S = \{e^3\}$

2. Réponse C. $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$ et $S = \{\ln(2)\}$

3. Réponse D. En appliquant la méthode de résolution d'une équation écrite sous la forme d'un quotient, vous obtenez :

$$\frac{(x+1)(x-2)}{x-3} = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0 \text{ et } x - 3 \neq 0$$

$\Leftrightarrow (x + 1 = 0$ ou $x - 2 = 0)$ et $x \neq 3 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$.

L'équation admet ainsi deux solutions : -1 et 2 et a une valeur interdite : 3.

$S = \{-1 ; 2\}$

4. Réponse A. Vous devez tout d'abord réécrire l'équation en plaçant tous les termes du même côté :

$$\frac{x+1}{x-2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2} - 1 = 0$$

Puis réduire au même dénominateur :

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2} - \frac{x-2}{x-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)-(x-2)}{x-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-x+2}{x-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{x-2} = 0$$

$\Leftrightarrow 3 = 0$ (impossible) et $x - 2 \neq 0$

Donc cette équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$ et $S = \varnothing$

REMARQUE

En effectuant un produit en croix, vous obtenez directement $x + 1 = x - 2$ ce qui équivaut à $3 = 0$ ce qui est impossible et $S = \varnothing$.

Cette méthode est plus facile à appliquer mais vous risquez d'oublier les valeurs interdites éventuelles.

5. Réponse A. Vous devez d'abord factoriser l'expression générale de l'équation :

$(x - 1)(2x - 4) - (x^2 - 1) + (x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(2x - 4) - (x - 1)(x + 1) + (x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)[(2x - 4) - (x + 1) + 1] = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(2x - 4 - x - 1 + 1) = 0$

Puis vous résolvez l'équation qui est désormais sous la forme d'un produit de deux facteurs :

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 4) = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 4$ et $S = \{1 ; 4\}$