

# **MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES**



# MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Cours et exercices corrigés


*Jacques Vélú*

Professeur au Conservatoire national  
des Arts et Métiers

DUNOD

Illustration de couverture : Metallic Citizen. AdobeStock.com

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>	<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--	---



© Dunod, 2000, 2020 pour la nouvelle présentation

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

ISBN 978-2-10-081957-7

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

CHAPITRE 1 • <b>NOMBRES RÉELS</b>	1
1.1 La droite réelle	1
1.2 Les développements décimaux	2
1.3 Valeur absolue	6
1.4 Intervalles	8
EXERCICES	11
CHAPITRE 2 • <b>FONCTIONS RÉELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE</b>	13
2.1 Fonctions	13
2.2 Formules	15
2.3 Courbe représentative	19
2.4 Continuité	21
2.5 Limites	24
2.6 Calcul des limites	31
2.7 Encadrement des limites	33
EXERCICES	36

---

CHAPITRE 3 • <b>DÉRIVÉE D'UNE FONCTION</b>	39
3.1 Tangente et dérivée	39
3.2 Vitesse moyenne, vitesse instantanée	42
3.3 Fonctions non dérivables	44
3.4 Calcul des dérivées	47
3.5 Dérivées d'ordre supérieur	50
EXERCICES	52
CHAPITRE 4 • <b>VALEURS PRISES PAR UNE FONCTION</b>	54
4.1 Image d'un intervalle	54
4.2 Image d'un segment	56
4.3 Le cas des fonctions monotones	58
4.4 Fonction réciproque	59
4.5 Fonctions trigonométriques réciproques	61
EXERCICES	64
CHAPITRE 5 • <b>ACCROISSEMENTS FINIS</b>	66
5.1 Extremums locaux	66
5.2 Extremums absolus	68
5.3 Le théorème de Rolle	70
5.4 Le théorème des accroissements finis	72
5.5 Variation des fonctions	74
5.6 La formule de Taylor	76
5.7 Concavité	78
EXERCICES	80
CHAPITRE 6 • <b>EXPONENTIELLES ET LOGARITHMES</b>	82
6.1 Comment définir les exponentielles ?	82
6.2 Le logarithme népérien	84
6.3 L'exponentielle	88
6.4 La fonction $a^x$	90
6.5 Les fonctions puissance	92

---

6.6	La trigonométrie hyperbolique	94
	EXERCICES	98
	<b>CHAPITRE 7 • DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS</b>	100
7.1	Formes indéterminées	100
7.2	Terme principal et calcul des limites	101
7.3	La notation $o$	104
7.4	Développements limités	107
7.5	Calcul des développements limités	112
	EXERCICES	126
	<b>CHAPITRE 8 • INTÉGRALES</b>	128
8.1	Aires	128
8.2	Fonctions en escalier	132
8.3	Intégrale d'une fonction continue	134
8.4	Propriétés des intégrales	138
8.5	Intégrales généralisées	140
8.6	Valeur moyenne d'une fonction	143
8.7	Primitive d'une fonction continue	146
	EXERCICES	148
	<b>CHAPITRE 9 • CALCUL DES INTÉGRALES</b>	150
9.1	Calcul numérique et calcul formel	150
9.2	Primitives et intégrales	153
9.3	Intégration par partie	155
9.4	Changement de variable	157
	EXERCICES	165
	<b>CHAPITRE 10 • NOMBRES COMPLEXES</b>	168
10.1	L'origine des nombres complexes	168
10.2	Conjugaison	171
10.3	Représentation géométrique	172
10.4	Forme trigonométrique	174

---

10.5 Géométrie plane	178
10.6 Exponentielle complexe	180
EXERCICES	183
CHAPITRE 11 • POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES	186
11.1 Équations algébriques	186
11.2 Polynômes complexes	189
11.3 Fractions rationnelles	193
11.4 Utilisations de la décomposition en éléments simples	201
EXERCICES	204
CHAPITRE 12 • ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE	207
12.1 Pourquoi des équations différentielles ?	207
12.2 Équations différentielles linéaires	210
12.3 Résolution de l'équation avec second membre	212
12.4 Équations générales du premier ordre	216
12.5 Résolution de quelques équations	219
EXERCICES	224
CHAPITRE 13 • ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE PLUS GRAND QUE 1	226
13.1 Résultats généraux	226
13.2 Équations linéaires homogènes	227
13.3 Équations linéaires avec second membre	231
13.4 Équations linéaires à coefficients constants	233
13.5 Oscillateur harmonique	239
EXERCICES	247
ANNEXE A • SOLUTIONS DES EXERCICES	249
ANNEXE B • FORMULAIRE	295
INDEX	302



# Avant-propos

Ce livre contient le cours enseigné au CNAM, dans la demi-valeur de Mathématiques Générales A2.

Faire cet enseignement relève du défi : nous n'avons que 25 heures de cours et 32 heures d'exercices dirigés pour apprendre les bases du calcul différentiel et du calcul intégral à un vaste public composé d'élèves qui n'ont pas forcément un baccalauréat scientifique. Cette contrainte nous force parfois à montrer plutôt que démontrer, mais sans jamais tomber dans le travers du bachotage...

La disparité de nos élèves oblige à revoir d'abord quelques notions de base, celles de nombre réel ou de dérivée par exemple. Parce qu'il s'agit d'avancer vite et loin en peu de temps, les rappels font l'objet d'un choix. Certains seulement sont détaillés et il y a donc des prérequis. Il faut connaître la trigonométrie (la définition et les propriétés du sinus, du cosinus et de la tangente), les équations et les polynômes du second degré. Il faut savoir faire des calculs algébriques, être capable de raisonner, comprendre la différence entre une démonstration et une observation. Tout cela, théoriquement, est su lorsqu'on passe le bac, pourtant l'expérience têtue montre qu'un an après la sortie du système éducatif, tout ou presque a disparu des mémoires !

Ne plus savoir telle ou telle formule n'est pas catastrophique – il suffit de se replonger dans un livre pour la retrouver – mais la perte du savoir faire, d'autant plus forte qu'il aura été bref, a parfois des allures de voyage sans retour. C'est en refaisant des exercices simples, pris dans les livres gardés du lycée, qu'on remettra en place les mécanismes perdus.

L'enseignement de Mathématiques Générales est souvent abordé avec appréhension par les auditeurs qui reprennent leurs études après quelques années d'interruption. Pourtant, tous les ans, nous avons la joie de voir certains se découvrir une passion pour la discipline qui les avait terrifiés jusque-là. Nos élèves sont remarquables et nous les admirons...

L'ouvrage est classique dans son agencement. S'il présente des originalités, on les trouvera dans la façon de dire les choses. Un élève du CNAM ne se contente pas d'un : « c'est évident », il préfère qu'on lui dise franchement : « cela se démontre mais c'est trop dur pour l'instant ».

Tout au long, l'accent est mis sur l'importance de la notion de formule et le livre se termine par un formulaire. C'est en effet par le biais des formules que nous donnons des noms aux objets mathématiques et que nous pouvons les manipuler. Il est donc utile de leur accorder la place qu'elles méritent.

L'objectif final du cours est d'apprendre à faire des développements limités, calculer des intégrales, résoudre des équations différentielles. Accompagnées d'exercices de niveau varié dont on trouvera les solutions condensées à la fin du livre, ces notions sont présentées, montrées, expliquées et appliquées dans de nombreux exemples. Des « méthodes pratiques » indiquent comment faire les calculs « à la main ».

Avec l'arrivée des logiciels de calcul formel cette pratique est en train de changer. Autrefois, les examinateurs jugeaient les candidats sur leur capacité à bien calculer. Le fait qu'ils trouvent « juste » donnait l'impression qu'ils avaient compris et qu'ils savaient ; les fautes de calculs étaient impitoyablement sanctionnées. A présent la situation est différente car des logiciels, encore trop onéreux pour être largement utilisés, reproduisent au niveau supérieur la révolution des calculettes : quelques ordres et vous avez le développement limité, la dérivée, l'intégrale, la courbe représentative d'une fonction. L'heure du calcul bête et méchant a sonné ! Bien sûr des questions nouvelles surgissent : les ordres donnés sont-ils les bons ? doit-on se fier à ce que donne la machine ? comment interpréter le résultat ? mais le mouvement est irréversible. Bien loin de provoquer le déclin des mathématiques comme certains l'ont imprudemment annoncé, cette irruption de la technologie leur donne encore plus de vigueur (et d'allégresse !). Débarrassés de la corvée des calculs, soulagés de la crainte de se tromper, les mathématiciens ont bien plus de force pour étendre le champ de leur discipline.

L'esprit de nos examens a donc évolué : désormais plus de place est faite à la réflexion. Surmontant les difficultés matérielles, nous installons peu à peu des compléments de formation basés sur l'emploi de ces logiciels. Mes collaborateurs font un travail remarquable dans ce domaine, avec une mention toute particulière pour Isabelle Gil qui a ouvert la brèche et qui nous propose sans cesse des idées nouvelles.

Dans quelques années les supports de cours suivront eux aussi cette évolution pour se changer en séquences vidéo. Cette métamorphose donnera au livre encore plus d'importance quand, face à des élèves réels, les professeurs seront de plus en plus virtuels ; bien loin de disparaître, le livre deviendra alors l'objet unique de la transmission du savoir.

Ce livre est dédié aux nombreux élèves qui m'ont fait découvrir toute l'astuce déployée par mes maîtres pour me faire apprendre les notions difficiles sans me poser trop de question ! Je les en remercie.

*rue Saint-Martin  
le 12 juin 2000*

## Chapitre 1

# Nombres réels

### 1.1 LA DROITE RÉELLE

**1.1.1** Les nombres réels jouent un rôle fondamental dans les sciences car ce sont eux qui servent à exprimer la valeur des grandeurs physiques ; le but de ce cours est d'apprendre à les utiliser.

L'ensemble des nombres réels, qu'on note traditionnellement  $\mathbb{R}$ , est représenté par une **droite graduée** (figure 1.1). Chaque point de la droite représente un nombre réel qu'on appelle l'**abscisse** du point. Le point d'abscisse 0 s'appelle l'**origine** de la droite.

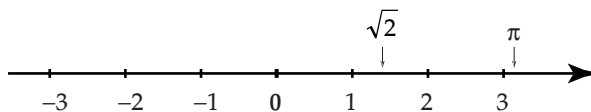


Figure 1.1 La droite réelle

On identifie souvent les points de la droite avec leur abscisse ; on dit par exemple : *le point  $\sqrt{2}$*  au lieu de dire : *le point d'abscisse  $\sqrt{2}$* , et la droite graduée prend alors le nom de **droite réelle**.

**1.1.2** La première propriété des nombres réels est qu'ils permettent de faire des calculs : on peut les *ajouter* ou les *multiplier* (voir exercices 1.1 et 1.2).

La seconde, tout aussi importante, est qu'on peut *comparer* deux nombres réels afin de voir lequel est le plus grand. La comparaison peut se faire facilement avec les points de la droite. En effet, les graduations permettent de choisir un sens de

parcours, qu'on indique par une flèche<sup>1</sup> (*figure 1.1*), on dit alors que la droite est **orientée**, et cette orientation permet de retrouver l'ordre des nombres : l'inégalité  $x \leq y$  a lieu quand le point d'abscisse  $x$  est avant celui d'abscisse  $y$ .

Rappelons que la suite de symboles  $x \leq y$  se prononce :  $x$  est **inférieur ou égal** à  $y$ , ou bien :  $x$  est **plus petit que**  $y$ . Pour indiquer que  $x$  est inférieur ou égal à  $y$ , mais que  $x$  et  $y$  sont différents, on écrit  $x < y$ , et on dit :  $x$  est **strictement inférieur** à  $y$ . Une inégalité construite avec le symbole  $\leq$  s'appelle une **inégalité large** et une inégalité construite avec  $<$  s'appelle une **inégalité stricte**.

Le procédé fondamental de l'**analyse** consiste, lorsqu'on a un nombre  $x$  mal connu, à trouver deux nombres bien connus  $a$  et  $b$  tels que  $a \leq x \leq b$ . Une telle expression s'appelle un **encadrement** de  $x$ , le nombre  $a$  est un **minorant** de  $x$ , et  $b$  un **majorant** ; plus l'écart entre  $a$  et  $b$  est petit, meilleur est l'encadrement.

Le plus grand nombre **entier** inférieur ou égal à  $x$  s'appelle la **partie entière** de  $x$  et on le note  $[x]$ . C'est le seul nombre entier,  $n$ , qui vérifie les inégalités  $n \leq x < (n+1)$ .

## 1.2 LES DÉVELOPPEMENTS DÉCIMAUX

**1.2.1** Parce que les calculs effectués directement à partir des points de la droite graduée ne sont pas assez commodes pour les besoins pratiques, on représente les nombres réels par des *chiffres*. Rappelons quelques résultats bien connus.

Un nombre réel obtenu en divisant un nombre entier par une puissance de 10 s'appelle un **nombre décimal**. Les nombres décimaux ont l'intérêt d'être facilement représentés par des chiffres au moyen de leur **développement décimal**.

**Exemple 1.2.1.1** Les nombres réels  $\frac{124}{10}$  et  $\frac{-36}{10\,000}$  sont des nombres décimaux dont les développements décimaux sont :

$$\frac{124}{10} = 12,4 \quad \text{et} \quad \frac{-36}{10\,000} = -0,003\,6$$

Malheureusement (ou heureusement ?) les nombres réels ne sont pas tous des nombres décimaux, ni même des nombres rationnels<sup>2</sup>. Il faut donc adapter ce mode de représentation si l'on veut être capable d'équiper chaque nombre réel d'un développement décimal.

1. Dans les dessins la flèche va souvent de la gauche vers la droite, ce qui permet de parler de la *gauche* ou de la *droite* d'un point.

2. Un nombre *rationnel* est un nombre réel qui peut s'obtenir comme quotient de deux nombres entiers (voir exercice 1.3).

**1.2.2** Pour cela on remarque qu'une mesure physique, aussi soigneuse soit-elle, n'est jamais d'une précision absolue, et que le résultat n'est jamais parfaitement connu. Il n'est donc pas nécessaire de représenter *exactement* les nombres réels, il suffit de les connaître de façon approchée, avec une précision qui dépend des besoins.

Le prochain théorème va dans ce sens puisqu'il montre qu'on peut approcher tous les nombres réels par des nombres décimaux avec n'importe quelle précision.

**Attention :** Jusqu'à la fin de cette section tous les nombres considérés sont positifs.

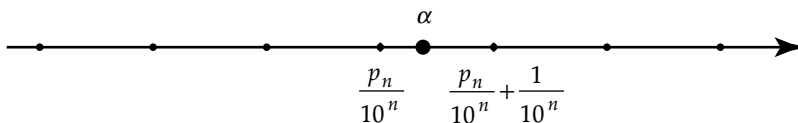
**Théorème 1.2.2.1** Soit  $\alpha$  un nombre réel positif fixé. A tout entier  $n$  est associé un unique nombre décimal ayant pour dénominateur  $10^n$ , qu'on notera  $\frac{p_n}{10^n}$ , tel que :

$$\frac{p_n}{10^n} \leq \alpha < \left( \frac{p_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} \right) \quad (1.1)$$

Le nombre  $\frac{p_n}{10^n}$  est l'*approximation décimale par défaut* à  $10^{-n}$  près de  $\alpha$ , et  $\frac{p_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$  est son *approximation décimale par excès* à  $10^{-n}$  près.

**Démonstration :** Les inégalités (1.1) équivalent à  $p_n \leq 10^n \alpha < p_n + 1$ . Donc  $p_n$  est la partie entière de  $10^n \alpha$ , ce qui prouve son existence et son unicité.

En marquant sur la droite graduée tous les points dont les abscisses sont les nombres décimaux de dénominateur  $10^n$  on obtient des points régulièrement espacés, séparés par la distance  $\frac{1}{10^n}$  (*figure 1.2*). Parmi eux les points d'abscisses  $\frac{p_n}{10^n}$  et  $\frac{p_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$  sont ceux qui encadrent  $\alpha$  ; le premier est à sa gauche (il peut coïncider avec  $\alpha$  quand  $\alpha$  est un nombre décimal), et le second est à sa droite et ne coïncide jamais avec  $\alpha$ .



**Figure 1.2** Encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-n}$  près

**Exemple 1.2.2.2** Les premières approximations décimales par défaut et par excès à  $10^{-n}$  près de  $\pi$  donnent les encadrements suivants :

$n$	$\frac{p_n}{10^n}$	$\leq \pi <$	$\frac{p_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$
0	3	$\leq \pi <$	4
1	3,1	$\leq \pi <$	3,2
2	3,14	$\leq \pi <$	3,15
3	3,141	$\leq \pi <$	3,142
4	3,1415	$\leq \pi <$	3,1416
5	3,14159	$\leq \pi <$	3,14160
6	3,141592	$\leq \pi <$	3,141593

**1.2.3** Dans l'exemple 1.2.2.2 on passe d'une approximation décimale *par défaut* à la suivante, en ajoutant seulement un chiffre ; c'est un phénomène qui peut être observé pour tous les nombres réels.

**Théorème 1.2.3.1** Soit  $\alpha$  un nombre réel positif quelconque.

- Quand  $n$  augmente les approximations décimales par défaut à  $10^{-n}$  près de  $\alpha$  croissent, ses approximations décimales par excès décroissent, et toutes deux s'approchent de plus en plus de  $\alpha$ .
- À chaque étape le développement décimal de l'approximation décimale par défaut s'allonge d'un chiffre nouveau (éventuellement un 0) qui vient se placer à droite des chiffres du développement décimal de l'approximation décimale par défaut précédente.

**Remarque :** Pour les approximations décimales par excès la règle serait plus difficile à énoncer, mais nous n'en aurons pas besoin.

**1.2.4** Les chiffres qui apparaissent l'un après l'autre quand on calcule les approximations décimales *par défaut* du nombre  $\alpha$  s'appellent les **décimales** de  $\alpha$ .

Le théorème suivant montre qu'à partir d'une approximation décimale par défaut donnée on obtient immédiatement toutes les approximations décimales par défaut précédentes par une opération simple qui consiste à **tronquer** le développement décimal.

**Théorème 1.2.4.1** Quand  $m < n$  l'approximation décimale par défaut à  $10^{-m}$  près se déduit de l'approximation décimale par défaut à  $10^{-n}$  près en effaçant ses  $n - m$  derniers chiffres.

**Exemple 1.2.4.2** On passe de :

3,141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944

qui est l'approximation décimale par défaut à  $10^{-60}$  près de  $\pi$ , à :

3,14159265358979323846 qui est son approximation décimale par défaut à  $10^{-20}$  près en effaçant les 40 derniers chiffres.



les nombres les plus utilisés, comme  $\sqrt{2}$  ou  $\pi$ , on ne connaît que les premières décimales d'un nombre réel<sup>1</sup>. Le développement décimal infini est donc un modèle théorique, rarement accessible.

Quand on connaît des nombres réels de façon imprécise, leurs sommes, produits, etc. sont encore plus mal connus. L'*Analyse numérique* rassemble les techniques qui permettent de faire des calculs avec une précision donnée à l'avance.

## 1.3 VALEUR ABSOLUE

**1.3.1** Sur la droite graduée les nombres réels *positifs* sont représentés par les points placés après l'origine, et les nombres réels *négatifs* par ceux qui sont placés avant.

Les points d'abscisses  $x$  et  $-x$  étant symétriques par rapport à l'origine (*figure 1.3*), l'un est positif, l'autre est négatif. Celui qui est positif s'appelle la *valeur absolue* de  $x$ , et on le note  $|x|$ ; on a donc :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La valeur absolue de  $x$  mesure la distance entre l'origine et le point d'abscisse  $x$  (*figure 1.3*) ; plus  $|x|$  est grand, plus ce point est éloigné de l'origine, plus  $|x|$  est petit, plus il en est proche.

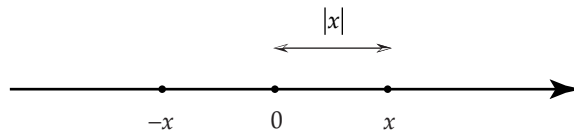


Figure 1.3 La valeur absolue d'un nombre réel

**1.3.2** Plus généralement si  $x$  et  $y$  sont deux nombres réels quelconques, le nombre  $|x - y|$  est celui qui est positif parmi les deux nombres  $x - y$  et  $y - x$ , autrement dit :

$$|x - y| = \begin{cases} x - y & \text{si } x \geq y \\ y - x & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

On peut aussi dire que  $|x - y|$  est le plus grand des deux nombres  $x - y$  et  $y - x$ . Ce nombre positif mesure la distance qui sépare les points d'abscisses  $x$  et  $y$  (*figure 1.4*). Plus  $|x - y|$  est grand, plus ces points sont éloignés, plus  $|x - y|$  est petit, plus ils sont proches. On dira que  $|x - y|$  est la *distance* entre  $x$  et  $y$ .

Pour indiquer que deux nombres réels  $x$  et  $y$  sont proches, on écrit que  $|x - y|$  ne dépasse pas une certaine valeur positive  $\varepsilon$ , qu'on s'est fixé à l'avance. Il est facile de

1. Il existe une sorte de compétition consistant à calculer le plus possible de décimales de  $\pi$ . Régulièrement les records sont battus et actuellement on en est à plusieurs milliards.



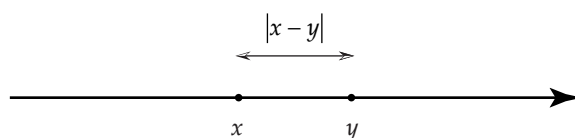


Figure 1.4 La distance séparant deux nombres réels

voir que la condition  $|x - y| < \varepsilon$  équivaut à  $x - \varepsilon \leq y \leq x + \varepsilon$ , ou bien encore à  $y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon$ .

**1.3.3** Les prochains théorèmes regroupent les propriétés fondamentales liées à la notion de valeur absolue.

**Théorème 1.3.3.1** (inégalité triangulaire) Quels que soient les nombres réels  $x_1, x_2, \dots, x_n$  on a :

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \quad (1.2)$$

L'*inégalité triangulaire*<sup>1</sup> peut se comprendre de deux façons différentes :

- *de la droite vers la gauche* : si les nombres  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont tous proches de 0, alors leur somme est proche de 0 ;
- *de la gauche vers la droite* : si la somme  $x_1 + x_2 + \dots + x_n$  n'est pas proche de 0, alors au moins un des nombres  $x_1, x_2, \dots, x_n$  n'est pas proche de 0.

**Théorème 1.3.3.2** Quels que soient les nombres réels  $x_1, x_2, \dots, x_n$  on a :

$$|x_1 x_2 \dots x_n| = |x_1| |x_2| \dots |x_n| \quad (1.3)$$

**Théorème 1.3.3.3** Si  $x$  n'est pas nul :

$$\left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|} \quad (1.4)$$

En *Analyse* on passe son temps à encadrer, majorer, ou minorer, des nombres représenté par des expressions compliquées, en se servant des trois théorèmes précédents.

1. Au chapitre 10, nous verrons pourquoi on lui donne ce nom.

**Exemple 1.3.3.4** Cherchons s'il existe des nombres réels  $x$  et  $y$  tels que :

$$3 \sin(x) - 7 \cos(\sqrt{x+2y}) + \sin(xy^2) = 12$$

La complication de cette équation pourrait donner à penser qu'il s'agit d'un problème difficile. Cependant l'inégalité triangulaire dit que :

$$\begin{aligned} |3 \sin(x) - 7 \cos(\sqrt{x+2y}) + \sin(xy^2)| \\ &\leq |3 \sin(x)| + |7 \cos(\sqrt{x+2y})| + |\sin(xy^2)| \\ &\leq 3 |\sin(x)| + 7 |\cos(\sqrt{x+2y})| + |\sin(xy^2)| \\ &\leq 3 + 7 + 1 \\ &\leq 11 \end{aligned}$$

et l'on voit ainsi que l'équation n'a pas de solution.

## 1.4 INTERVALLES

**1.4.1** Les ensembles de nombres réels les plus simples sont les intervalles. Pour mettre un peu d'ordre dans les définitions il est commode d'adjoindre à l'ensemble  $\mathbb{R}$  deux nouveaux éléments, *plus l'infini* noté  $+\infty$ , et *moins l'infini* noté  $-\infty$ . L'ensemble obtenu ainsi, qui s'appelle la *droite achevée*, est noté  $\overline{\mathbb{R}}$ . Par convention  $+\infty$  est strictement supérieur à tout nombre réel, et  $-\infty$  est strictement inférieur à tout nombre réel.

On appelle *intervalle* l'ensemble des nombres réels compris au sens large ou au sens strict, cela dépend de la nature de l'intervalle, entre deux éléments de  $\overline{\mathbb{R}}$  qu'on appelle les *bornes* de l'intervalle (*figure 1.5*).

Pour désigner un intervalle on écrit ses bornes, et on les entoure de deux crochets. Les bornes n'étant pas forcément dans l'intervalle, le sens dans lequel on dessine les crochets sert à indiquer si elles y sont, ou si elles n'y sont pas, autrement dit si les inégalités qui définissent l'intervalle sont larges ou strictes.

**Remarque :** Par convention un intervalle est exclusivement constitué de nombres réels. Quand une borne est égale à  $+\infty$  ou à  $-\infty$ , elle ne fait donc pas partie de l'intervalle, c'est pourquoi le crochet correspondant doit toujours être tourné vers l'extérieur.

Les intervalles sont les ensembles de nombres réels où l'on peut passer d'un point quelconque à un autre point quelconque sans sortir de l'ensemble. La figure 1.6 montre un ensemble qui n'est pas un intervalle car il ne possède pas cette propriété. Nous admettrons le théorème suivant qui dit que les intervalles sont les ensembles de nombres réels dépourvus de *trous*.

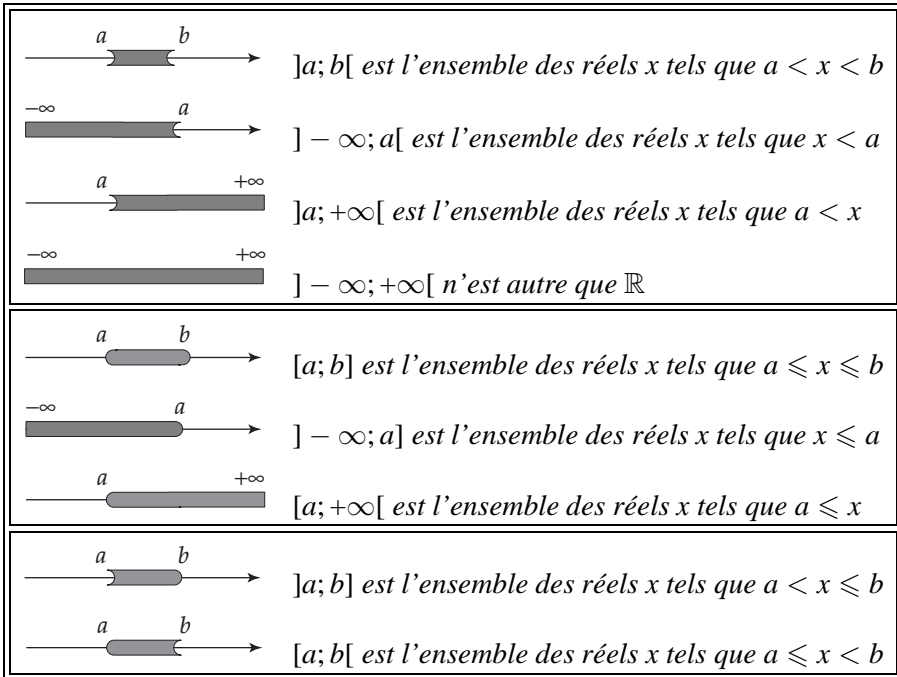


Figure 1.5 Les 9 sortes différentes d'intervalles

**Théorème 1.4.1.1** Les intervalles sont les ensembles,  $E$ , de nombres réels qui possèdent la propriété suivante : quels que soient  $x$  et  $y$  dans  $E$  tout nombre réel compris entre  $x$  et  $y$  est aussi dans  $E$ .

Les intervalles les plus utiles sont les cinq premiers de la figure 1.5. Un intervalle du type  $[a; b]$  avec  $a$  et  $b$  deux nombres réels s'appelle un **segment**. Un intervalle du type  $]a; b[$ ,  $]a; +\infty[$ ,  $] - \infty; a[$  ou  $] - \infty; +\infty[$ , autrement dit un intervalle qui ne contient pas ses bornes, s'appelle un **intervalle ouvert**.

L'idée attachée au mot *ouvert* est qu'une partie  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{R}$  est **ouverte** si, partant d'un point quelconque de  $\mathcal{A}$ , on a la possibilité de se déplacer de part et d'autre de ce point sans sortir de  $\mathcal{A}$ . Un intervalle du type  $[a; +\infty[$  n'est pas ouvert car on ne peut pas se déplacer à gauche de  $a$  sans sortir de l'intervalle ; dans une partie ouverte il n'y a pas de point en position particulière, sur le bord par exemple.

De façon plus précise, un ensemble de nombres réels,  $\mathcal{A}$ , est **ouvert** si, quel que soit le point  $a$  de  $\mathcal{A}$ , il existe un intervalle du type  $]a - \eta; a + \eta[$  avec  $\eta > 0$  contenu dans  $\mathcal{A}$  ; en outre on dit qu'un ensemble est **fermé** quand son complémentaire (l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas dedans) est ouvert ; les segments et les intervalles du type  $[a; +\infty[$  ou  $] - \infty; a]$  sont des intervalles fermés.

Enfin les intervalles du type  $]a; b]$  ou  $[a; b[$ , qui ne sont ni ouverts ni fermés, sont parfois qualifiés de **semi-ouverts**.

**1.4.2** Soit  $\mathcal{A}$  un sous-ensemble non vide quelconque de  $\mathbb{R}$ .

- On dit qu'un nombre réel  $M$  de  $\mathbb{R}$  est un **majorant** de  $\mathcal{A}$  (ou que  $\mathcal{A}$  est **majorée** par  $M$ ) si  $a \leq M$  quel que soit  $a$  dans  $\mathcal{A}$  (figure 1.6).
- On dit qu'un nombre réel  $m$  est un **minorant** de  $\mathcal{A}$  (ou que  $\mathcal{A}$  est **minorée** par  $m$ ) si  $m \leq a$  quel que soit  $a$  dans  $\mathcal{A}$  (figure 1.6).
- On dit que la partie  $\mathcal{A}$  est **bornée** si elle possède à la fois un majorant et un minorant, ce qui revient à dire qu'on peut l'enfermer dans un segment.



**Figure 1.6** En gris un ensemble  $\mathcal{A}$  borné qui n'est pas un intervalle

**Exemple 1.4.2.1** L'ensemble des entiers naturels n'est pas borné car, quel que soit  $M$ , il existe des entiers strictement supérieurs à  $M$ .

Si l'ensemble  $\mathcal{A}$  est vide on convient que tous les nombres réels sont des majorants et des minorants de  $\mathcal{A}$ . Nous allons voir quel est l'ensemble des majorants et des minorants d'un ensemble *non vide*.

Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble majoré. Il est clair qu'un majorant d'un majorant de  $\mathcal{A}$  est aussi un majorant de  $\mathcal{A}$ . Par conséquent si  $M_1$  et  $M_2$  sont des majorants de  $\mathcal{A}$ , tout nombre réel compris entre  $M_1$  et  $M_2$  est aussi un majorant de  $\mathcal{A}$ , et il en résulte, d'après le théorème 1.4.1.1, que l'ensemble des majorants de  $\mathcal{A}$  est un intervalle.

En outre, parce qu'il y a des majorants arbitrairement grands (puisque tout majorant d'un majorant est un majorant), la borne supérieure de cet intervalle est forcément  $+\infty$ . En revanche sa borne inférieure ne peut pas être  $-\infty$ , car  $\mathcal{A}$  possède au moins un élément, et tous ses majorants sont supérieurs à cet élément.

Il en résulte que l'ensemble des majorants de  $\mathcal{A}$  est un intervalle qui ne peut être que de la forme  $[a; \infty[$  ou  $]a; \infty[$ , avec  $a$  un nombre réel. On démontre le théorème suivant qui est d'une importance fondamentale en *analyse*.

**Théorème 1.4.2.2** L'ensemble des majorants d'un ensemble  $\mathcal{A}$ , majoré, non vide, est un intervalle de la forme  $[S; \infty[$ .

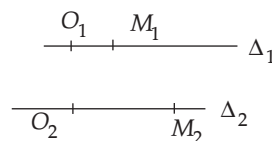
Ce théorème nous dit que  $\mathcal{A}$  possède un majorant particulier,  $S$ , qui est plus petit que tous les autres majorants. On l'appelle la **borne supérieure** de  $\mathcal{A}$ , et on le note  $\sup(\mathcal{A})$ . Par convention, lorsque  $\mathcal{A}$  n'est pas majoré, on pose  $\sup(\mathcal{A}) = +\infty$ . On a un résultat analogue en retournant le sens des inégalités :

**Théorème 1.4.2.3** L'ensemble des minorants d'un ensemble  $\mathcal{A}$ , minoré, non vide, est un intervalle de la forme  $] - \infty; s]$ .

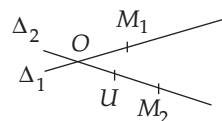
Le nombre  $s$  s'appelle la **borne inférieure** de  $\mathcal{A}$ , on le note  $\inf(\mathcal{A})$ , et lorsque  $\mathcal{A}$  n'est pas minoré on pose  $\inf(\mathcal{A}) = -\infty$ .

## EXERCICES

**1.1.** Sur la figure ci-contre les droites parallèles  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont graduées avec la même unité de longueur ;  $O_1$  et  $O_2$  sont leurs origines, le point  $M_1$  a pour abscisse  $x_1$  et le point  $M_2$  a pour abscisse  $x_2$ . Quelles droites faut-il tracer pour obtenir le nombre réel  $x_1 + x_2$  ?



**1.2.** Sur la figure ci-contre les droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont graduées avec la même unité de longueur ; elles ont  $O$  pour origine commune, le point  $M_1$  a pour abscisse  $x_1$ , le point  $M_2$  a pour abscisse  $x_2$ , le point  $U$  a pour abscisse 1. Quelles droites faut-il tracer pour obtenir le nombre réel  $x_1 x_2$  ?



**1.3.** Démontrer qu'il n'existe pas deux nombres entiers  $p$  et  $q$ , de parité différente, tels que  $2q^2 = p^2$ . En déduire que le nombre réel  $\sqrt{2}$  n'est pas un nombre rationnel.

**1.4.** On se donne deux nombres réels  $x$  et  $y$  tels que  $x < y$ . Quel est le nombre,  $n$ , d'entiers relatifs  $k$  vérifiant  $x \leq k \leq y$  ?

**1.5.** Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels tels que  $\alpha < \beta$ .

- 1) Démontrer qu'il existe une infinité de nombres décimaux  $d$  tels que  $\alpha < d < \beta$ .
- 2) Démontrer qu'il existe une infinité de nombres irrationnels  $i$  tels que  $\alpha < i < \beta$ .

**1.6.** Quand on connaît le développement décimal d'un nombre réel  $\alpha$  tel que  $0 < \alpha < 1$  comment obtient-on le développement décimal du nombre  $1 - \alpha$  ?

**1.7.** On note  $a_n$  le  $n^{\text{ième}}$  chiffre après la virgule du développement décimal infini du nombre réel  $\alpha$ . On dit que le développement de  $\alpha$  est **périodique**, s'il existe deux entiers,  $r$  et  $N$ , tels que  $a_{n+r} = a_n$  quel que soit  $n \leq N$ . Le nombre  $p = a_N a_{N+1} \dots a_{N+r-1}$  s'appelle la **période**, et  $r$  la **longueur de la période**. Par exemple  $241,572\ 352\ 352\ 35\dots$  admet un développement périodique, la période est 235 et elle a pour longueur 3.

1) Démontrer que le nombre  $\alpha$  est de la forme  $d + \frac{1}{10^s} \left( \frac{p}{10^r - 1} \right)$  avec  $d$  un nombre décimal et  $s$  un entier relatif.

2) Démontrer que tout nombre rationnel admet un développement décimal infini périodique.

3) Déduire, des questions précédentes, le développement décimal infini de  $a + b$  avec :  $a = 1,257\ 245\ 724\ 572\ 457\ 245\dots$  et  $b = 3\ 562,142\ 241\ 562\ 415\ 624\ 156\dots$

