MATHS

MPSI - MP2I

Jean-Marie Monier | Guillaume Haberer

MATHS MPSI · MP2I

MÉTHODES & EXERCICES

J'intègre

6e édition

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

Retrouvez nos ouvrages pour les prépas scientifiques ici

http://dunod.link/prepassc

NOUS NOUS ENGAGEONS EN FAVEUR DE L'ENVIRONNEMENT :

PAPIER CERTIFIÉ

Nos livres sont imprimés sur des papiers certifiés pour réduire notre impact sur l'environnement.

Le format de nos ouvrages est pensé afin d'optimiser l'utilisation du papier.

Depuis plus de 30 ans, nous imprimons 70% de nos livres en France et 25% en Europe et nous mettons tout en œuvre pour augmenter cet engagement auprès des imprimeurs français.

Nous limitons l'utilisation du plastique sur nos ouvrages (film sur les couvertures et les livres).

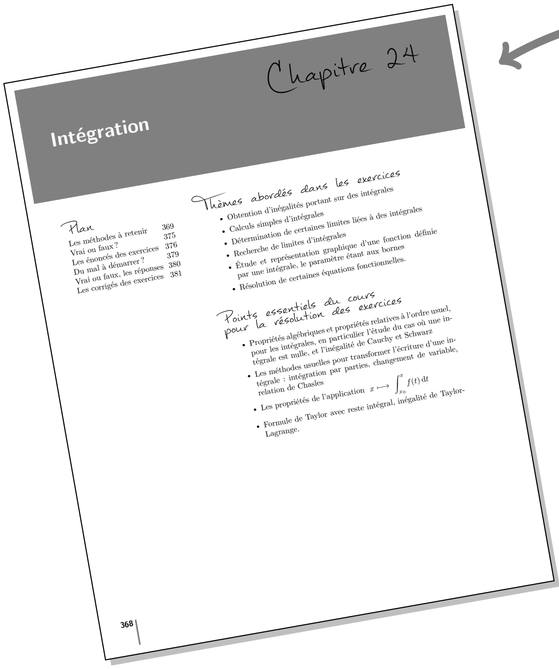
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-086462-1

Table des matières

Compléments en ligne

Des compléments en ligne, disponibles sur la page de présentation de l'ouvrage du site de Dunod (`https://dunod.com/EAN/9782100864621`), vous donnent accès à des exercices de colles entièrement corrigés.

Pour bien utiliser cet ouvrage



Chapitre 24

Intégration

Plan

Les méthodes à retenir 369
Vrai ou faux ? 375
Les énoncés des exercices 376
Du mal à démarrer ? 379
Vrai ou faux, les réponses 380
Les corrigés des exercices 381

Thèmes abordés dans les exercices

- Obtention d'inégalités portant sur des intégrales
- Calculs simples d'intégrales
- Détermination de certaines limites liées à des intégrales
- Recherche de limites d'intégrales
- Étude et représentation graphique d'une fonction définie par une intégrale, le paramètre étant aux bornes
- Résolution de certaines équations fonctionnelles.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Propriétés algébriques et propriétés relatives à l'ordre usuel, pour les intégrales, en particulier l'étude du cas où une intégrale est nulle, et l'inégalité de Cauchy et Schwarz
- Les méthodes usuelles pour transformer l'écriture d'une intégrale : intégration par parties, changement de variable, relation de Chasles
- Les propriétés de l'application $x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$
- Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange.

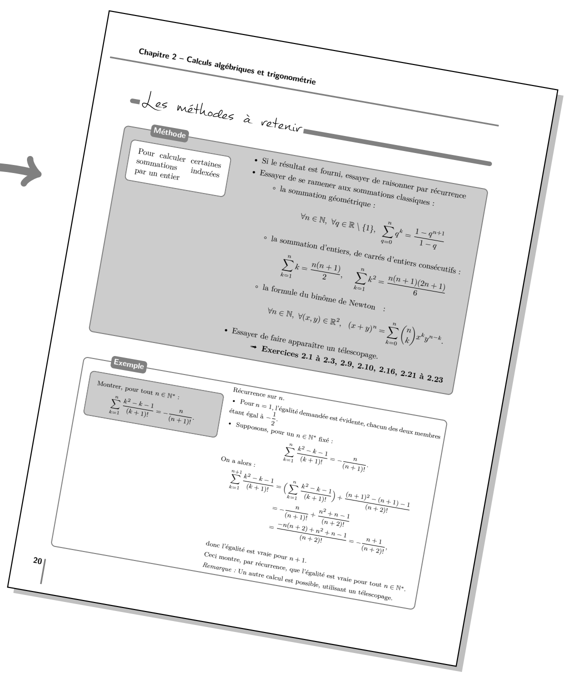
368

La page d'entrée de chapitre

Elle propose un plan du chapitre, les thèmes abordés dans les exercices, ainsi qu'un rappel des points essentiels du cours pour la résolution des exercices.

Les méthodes à retenir

Cette rubrique constitue une synthèse des principales méthodes à connaître, détaillées étape par étape, et indique les exercices auxquels elles se rapportent.
Chaque méthode est illustrée par un ou deux exemples qui la suivent.



Chapitre 2 – Calculs algébriques et trigonométrie

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour calculer certaines sommations indexées par un entier

- Si le résultat est fourni, essayer de raisonner par récurrence
- Essayer de se ramener aux sommations classiques :
  - la sommation géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\quad \sum_{q=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

  - la sommation d'entiers, de carrés d'entiers consécutifs :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

  - la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

- Essayer de faire apparaître un télescopage.

➥ **Exercices 2.1 à 2.3, 2.9, 2.10, 2.16, 2.21 à 2.23**

Exemple

Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-k-1}{(k+1)!} = -\frac{n}{(n+1)!}.$$

Récurrence sur n.

- Pour $n=1$, l'égalité demandée est évidente, chacun des deux membres étant égal à $-\frac{1}{2}$.
- Supposons, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-k-1}{(k+1)!} = -\frac{n}{(n+1)!}.$$

On a alors :

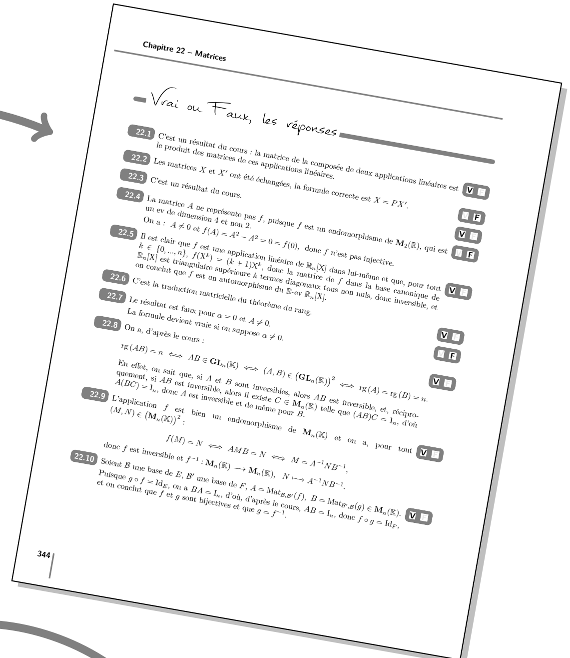
$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k^2-k-1}{(k+1)!} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-k-1}{(k+1)!}\right) + \frac{(n+1)^2-(n+1)-1}{(n+2)!}$$
$$= -\frac{n}{(n+1)!} + \frac{n^2+n-1}{(n+2)!}$$
$$= \frac{-n(n+2)+n^2+n-1}{(n+2)!} = -\frac{n+1}{(n+2)!},$$

donc l'égalité est vraie pour $n+1$.

Ceci montre, par récurrence, que l'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque : Un autre calcul est possible, utilisant un télescopage.

20



Chapitre 22 – Matrices

Vrai ou Faux, les réponses

22.1 C'est un résultat du cours : la matrice de la composée de deux applications linéaires est le produit des matrices de ces applications linéaires. V

22.2 Les matrices X et X' ont été échangées, la formule correcte est $X = PX'$. F

22.3 C'est un résultat du cours. V

22.4 La matrice A ne représente pas f, puisque f est un endomorphisme de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, qui est un ev de dimension 4 et non 2.
On a : $A \neq 0$ et $f(A) = A^2 - A^2 = 0 = f(0)$, donc f n'est pas injective. F

22.5 Il est clair que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même et que, pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, $f(X^k) = (k+1)X^k$, donc la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure à termes diagonaux tous non nuls, donc inversible, et on conclut que f est un automorphisme du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}_n[X]$. V

22.6 C'est la traduction matricielle du théorème du rang. V

22.7 Le résultat est faux pour $\alpha = 0$ et $A \neq 0$.
La formule devient vraie si on suppose $\alpha \neq 0$. F

22.8 On a, d'après le cours :

$$\mathrm{rg}\,(AB) = n \iff AB \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}) \iff (A, B) \in (\mathbf{GL}_n(\mathbb{K}))^2 \iff \mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(B) = n.$$

En effet, on sait que, si A et B sont inversibles, alors AB est inversible, et, réciproquement, si AB est inversible, alors il existe $C \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $(AB)C = \mathrm{I}_n$, d'où $A(BC) = \mathrm{I}_n$, donc A est inversible et de même pour B. V

22.9 L'application f est bien un endomorphisme de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ et on a, pour tout $(M, N) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{K}))^2$:

$$f(M) = N \iff AMB = N \iff M = A^{-1}NB^{-1},$$

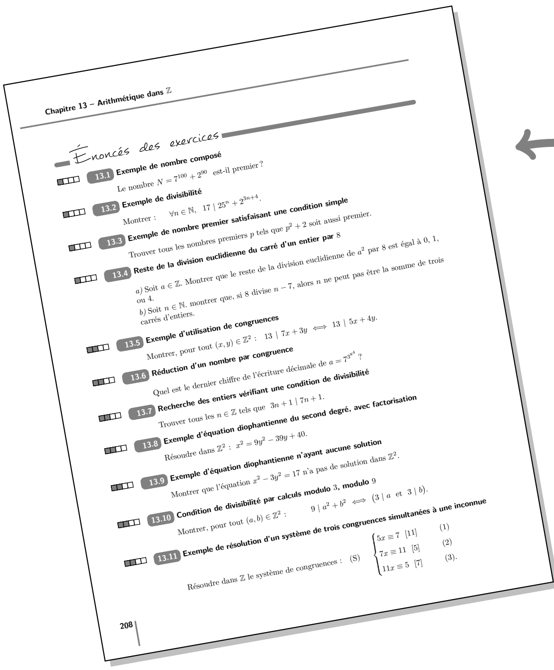
donc f est inversible et $f^{-1} : \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{K}),\ N \longmapsto A^{-1}NB^{-1}$. V

22.10 Soient $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.
Puisque $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, on a $BA = \mathrm{I}_n$, d'où, d'après le cours, $AB = \mathrm{I}_n$, donc $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, et on conclut que f et g sont bijectives et que $g = f^{-1}$. V

344

Vrai ou Faux ?

Dix questions pour vérifier la bonne compréhension du cours.



Chapitre 13 – Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Énoncés des exercices

13.1 **Exemple de nombre composé**
Le nombre $N = 7^{100} + 2^{90}$ est-il premier ?

13.2 **Exemple de divisibilité**
Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ 17 \mid 25^n + 2^{3n+4}$.

13.3 **Exemple de nombre premier satisfaisant une condition simple**
Trouver tous les nombres premiers p tels que $p^2 + 2$ soit aussi premier.

13.4 **Reste de la division euclidienne du carré d'un entier par 8**
a) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que le reste de la division euclidienne de a^2 par 8 est égal à 0, 1, ou 4.
b) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que, si 8 divise $n - 7$, alors n ne peut pas être la somme de trois carrés d'entiers.

13.5 **Exemple d'utilisation de congruences**
Montrer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$: $13 \mid 7x + 3y \iff 13 \mid 5x + 4y$.

13.6 **Réduction d'un nombre par congruence**
Quel est le dernier chiffre de l'écriture décimale de $a = 7^{7^7}$?

13.7 **Recherche des entiers vérifiant une condition de divisibilité**
Trouver tous les $n \in \mathbb{Z}$ tels que $3n + 1 \mid 7n + 1$.

13.8 **Exemple d'équation diophantienne du second degré, avec factorisation**
Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $x^2 = 9y^2 - 39y + 40$.

13.9 **Exemple d'équation diophantienne n'ayant aucune solution**
Montrer que l'équation $x^2 - 3y^2 = 17$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

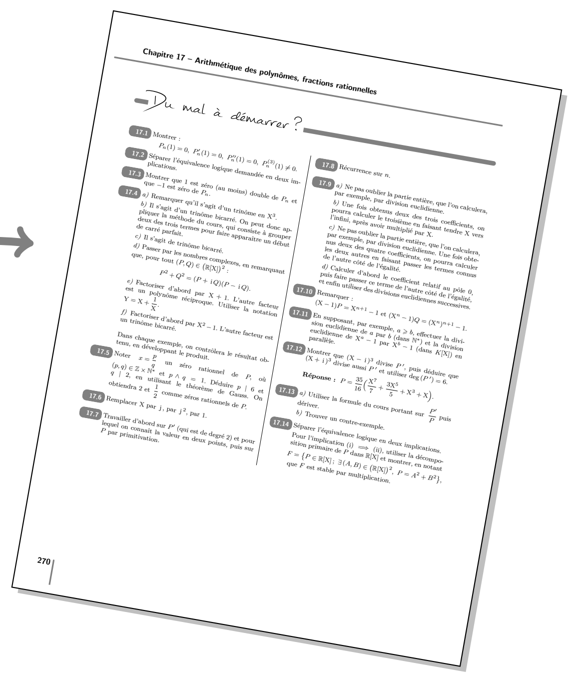
13.10 **Condition de divisibilité par calculs modulo 3, modulo 9**
Montrer, pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$: $9 \mid a^2 + b^2 \iff (3 \mid a \text{ et } 3 \mid b)$.

13.11 **Exemple de résolution d'un système de trois congruences simultanées à une inconnue**
Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système de congruences : $(\mathrm{S})\ \begin{cases} 5x \equiv 7\ [11] & (1) \\ 7x \equiv 11\ [5] & (2) \\ 11x \equiv 5\ [7] & (3). \end{cases}$

208

Énoncés des exercices

De nombreux exercices de difficulté croissante sont proposés pour s'entraîner. La difficulté de chaque exercice est indiquée sur une échelle de 1 à 4.



Chapitre 17 – Arithmétique des polynômes, fractions rationnelles

Du mal à démarrer ?

17.1 Montrer :
$P_n(1) = 0,\ P_n'(1) = 0,\ P_n''(1) = 0,\ P_n^{(3)}(1) \neq 0.$

17.2 Séparer l'équivalence logique demandée en deux implications.

17.3 Montrer que 1 est zéro (au moins) double de P_n et que -1 est zéro de P_n.

17.4 a) Remarquer qu'il s'agit d'un trinôme en X^3.
b) Il s'agit d'un trinôme bicarré. On peut donc appliquer la méthode du cours, qui consiste à grouper deux des trois termes pour faire apparaître un début de carré parfait.
c) Il s'agit de trinôme bicarré.
d) Passer par les nombres complexes, en remarquant que, pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$:
$P^2 + Q^2 = (P + iQ)(P - iQ).$
e) Factoriser d'abord par $X + 1$. L'autre facteur est un polynôme réciproque. Utiliser la notation $Y = X + \frac{1}{X}$.
f) Factoriser d'abord par $X^2 - 1$. L'autre facteur est un trinôme bicarré.
Dans chaque exemple, on contrôlera le résultat obtenu, en développant le produit.

17.5 Noter $x = \frac{p}{q}$ un zéro rationnel de P, où $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$. Déduire $p \mid 6$ et $q \mid 2$, en utilisant le théorème de Gauss. On obtiendra 2 et $\frac{1}{2}$ comme zéros rationnels de P.

17.6 Remplacer X par j, par j^2, par 1.

17.7 Travailler d'abord sur P' (qui est de degré 2) et pour lequel on connaît la valeur en deux points, puis sur P par primitivation.

17.8 Récurrence sur n.

17.9 a) Ne pas oublier la partie entière, que l'on calculera, par exemple, par division euclidienne.
b) Une fois obtenus deux des trois coefficients, on pourra calculer le troisième en faisant tendre X vers l'infini, après avoir multiplié par X.
c) Ne pas oublier la partie entière, que l'on calculera, par exemple, par division euclidienne. Une fois obtenus deux des quatre coefficients, on pourra calculer les deux autres en faisant passer les termes connus de l'autre côté de l'égalité.
d) Calculer d'abord le coefficient relatif au pôle 0, puis faire passer ce terme de l'autre côté de l'égalité, et enfin utiliser des divisions euclidiennes successives.

17.10 Remarquer :
$(X - 1)P = X^{n+1} - 1$ et $(X^n - 1)Q = (X^n)^{n+1} - 1.$

17.11 En supposant, par exemple, $a \geqslant b$, effectuer la division euclidienne de a par b (dans $\mathbb{N}^*$) et la division euclidienne de $X^a - 1$ par $X^b - 1$ (dans $K[X]$) en parallèle.

17.12 Montrer que $(X - i)^2$ divise P', puis déduire que $(X + i)^3$ divise aussi P' et utiliser $\deg(P') = 6$.
Réponse : $P = \frac{35}{16}\left(\frac{X^7}{7} + \frac{3X^5}{5} + X^3 + X\right).$

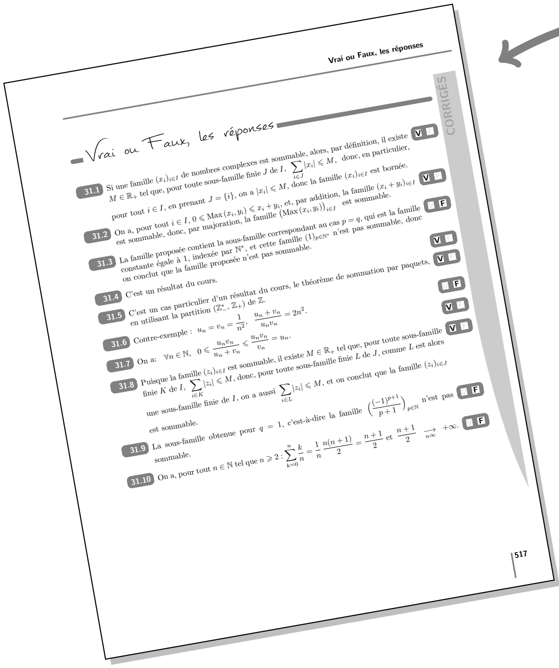
17.13 a) Utiliser la formule du cours portant sur $\frac{P'}{P}$ puis dériver.
b) Trouver un contre-exemple.

17.14 Séparer l'équivalence logique en deux implications.
Pour l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii), utiliser la décomposition primaire de P dans $\mathbb{R}[X]$ et montrer, en notant $F = \{P \in \mathbb{R}[X] ;\ \exists (A, B) \in (\mathbb{R}[X])^2,\ P = A^2 + B^2\}$, que F est stable par multiplication.

270

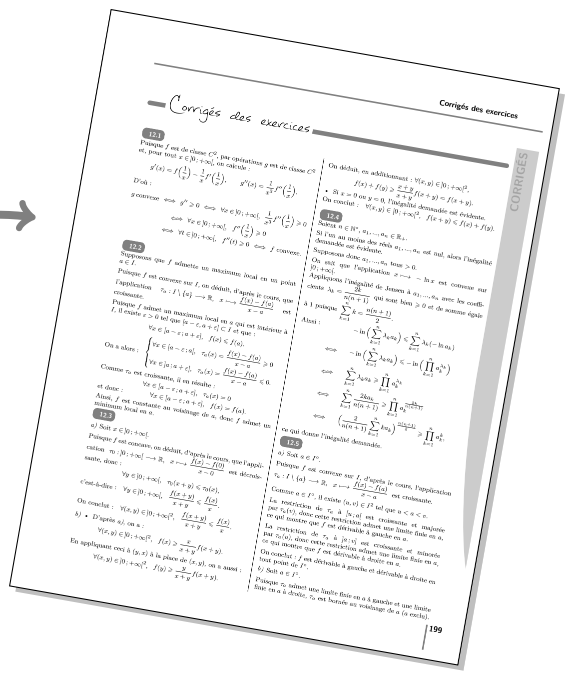
Du mal à démarrer ?

Des conseils méthodologiques sont proposés pour bien aborder la résolution des exercices.



Vrai ou Faux, les réponses

Chaque affirmation vraie est justifiée par une référence au cours ou une courte démonstration, et chaque affirmation fausse est réfutée par la production d'un contre-exemple explicite.



Corrigés des exercices

Tous les exercices sont corrigés de façon détaillée.

Remerciements

Nous tenons ici à exprimer notre gratitude aux nombreux collègues qui ont accepté de réviser des parties du manuscrit :

> Marc Albrecht, Bruno Arsac, Jean-Philippe Berne, Jacques Blanc, Gérard Bourgin, Sophie Cohéléach, Carine Courant, Sylvain Delpech, Hermin Durand, Jean Feyler, Viviane Gaggioli, Marguerite Gauthier, Daniel Genoud, André Laffont, Cécile Lardon, Hadrien Larôme, Ibrahim Rihaoui, René Roy, Philippe Saadé, Marie-Dominique Siéfert, Marie-Pascale Thon, Audrey Verdier.

Raisonnement, vocabulaire ensembliste

Chapitre 1

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Mise en œuvre, sur des exemples simples, des différents types de raisonnement
- Égalités et inclusions d'ensembles obtenus par opérations sur des parties d'un ensemble
- Injectivité, surjectivité, bijectivité
- Image directe, image réciproque d'une partie par une application.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés des opérations entre ensembles, $\cap$, $\cup$, complémentaire, $\setminus$
- Définition de la fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble
- Définition du produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles
- Définition et propriétés de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité pour les applications
- Définition de l'image directe, de l'image réciproque d'une partie par une application
- Relations d'équivalence, relations d'ordre.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour travailler de manière générale sur des ensembles

Essayer de passer par les éléments des ensembles, ou de calculer globalement sur les ensembles. La deuxième voie est en général plus courte et plus claire (si elle est praticable).

➟ **Exercices 1.1, 1.2, 1.7, 1.8, 1.16 à 1.18**

Exemple

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.
Montrer :

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C).$$

Partons du côté apparemment le plus compliqué :

$$\begin{aligned}(A \cap B) \setminus (A \cap C) &= (A \cap B) \cap \left(\overline{A \cap C}\right)\\ &= (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})\\ &= (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C})\\ &= A \cap B \cap \overline{C}\\ &= A \cap (B \cap \overline{C})\\ &= A \cap (B \setminus C).\end{aligned}$$

Remarque : On pouvait aussi partir du premier membre.

Méthode

Pour établir une égalité d'ensembles

Essayer de :

- soit montrer directement l'égalité
- soit montrer deux inclusions : $A \subset B$ et $B \subset A$
- soit utiliser les fonctions indicatrices des parties d'un ensemble.

➟ **Exercices 1.2, 1.7, 1.8, 1.12, 1.18**

Dans chacune des deux premières options, on essaie de passer par les éléments ou de calculer globalement sur les ensembles.

Exemple

Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
Montrer :

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C).$$

On a :

$$\begin{aligned}(A \setminus B) \cup (A \setminus C) &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C})\\ &= A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})\\ &= A \cap \overline{B \cap C}\\ &= A \setminus (B \cap C).\end{aligned}$$

Exemple

Montrer :

$$\{y \in \mathbb{R}\,;\ \exists x \in [-1\,;\,2],\ \ y = x^2\} = [0\,;\,4].$$

- Soit $y \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $x \in [-1\,;\,2]$ tel que $y = x^2$.

Si $x \in [-1\,;\,0]$, alors $y \in [0\,;\,1]$.
Si $x \in [0\,;\,2]$, alors $y \in [0\,;\,4]$.
On déduit $y \in [0\,;\,4]$.

Ceci montre que le premier ensemble est inclus dans le second.

- Réciproquement, soit $y \in [0\,;\,4]$.

En notant $x = \sqrt{y}$, on a $x \in [0\,;\,2] \subset [-1\,;\,2]$ et $y = x^2$.

Ceci montre que le second ensemble est inclus dans le premier.

On conclut à l'égalité demandée.

Méthode

Pour montrer, par récurrence (faible), qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geqslant n_0$

Montrer que :

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*)
- pour tout entier n fixé tel que $n \geqslant n_0$, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (*hérédité*).

➟ **Exercice 1.5**

Exemple

On considère la suite de Fibonacci $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n.$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n = (-1)^n.$$

Initialisation :
Pour $n = 0$, on a : $\phi_1^2 - \phi_2\phi_0 = 1^2 - 1 \cdot 0 = 1 = (-1)^0$,
donc la formule est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que la formule soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\phi_{n+2}^2 - \phi_{n+3}\phi_{n+1} &= \phi_{n+2}^2 - (\phi_{n+2} + \phi_{n+1})\phi_{n+1} \\
&= (\phi_{n+2}^2 - \phi_{n+2}\phi_{n+1}) - \phi_{n+1}^2 \\
&= \phi_{n+2}(\phi_{n+2} - \phi_{n+1}) - \phi_{n+1}^2 \\
&= \phi_{n+2}\phi_n - \phi_{n+1}^2 \\
&= -(\phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n) \\
&= -(-1)^n \ = \ (-1)^{n+1},
\end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n+1$.

Ceci montre, par récurrence, que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode

Pour montrer, par récurrence à deux pas, qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geqslant n_0$

Montrer que :

- $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies (*initialisation*)
- pour tout entier n fixé tel que $n \geqslant n_0$, si $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie (*hérédité*).

➟ **Exercice 1.10**

Exemple

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}.$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 0.$$

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1 > 0$, et, pour $n = 2$, on a $u_2 = \dfrac{u_1 + u_0}{2} = \dfrac{1}{2} > 0$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$ et pour $n = 2$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour n et $n + 1$, où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé. On a donc $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$, d'où $\dfrac{u_{n+1} + u_n}{2} > 0$, donc la propriété est vraie pour $n + 2$.

Ceci montre, par récurrence à deux pas, que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Méthode

Pour montrer, par récurrence forte, qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geqslant n_0$

Montrer que :

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*)
- pour tout entier n fixé tel que $n \geqslant n_0$, si $\mathcal{P}(n_0), ..., \mathcal{P}(n)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie (*hérédité*).

➟ **Exercice 1.11**

Exemple

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{u_1 + u_2^2 + \cdots + u_n^n}{n^n}.$$

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < u_n \leqslant 1.$

Initialisation : Pour $n = 1$, on a bien $0 < u_1 \leqslant 1$ car $u_1 = 1$.

Hérédité : Supposons, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, que l'on ait :

$$\forall k \in \{1, ..., n\}, \quad 0 < u_k \leqslant 1.$$

On a alors : $u_{n+1} = \dfrac{u_1 + u_2^2 + \cdots + u_n^n}{n^n} > \dfrac{0 + \cdots + 0}{n^n} = 0$

et $u_{n+1} = \dfrac{u_1 + u_2^2 + \cdots + u_n^n}{n^n} \leqslant \dfrac{1 + \cdots + 1}{n^n} = \dfrac{n}{n^n} = \dfrac{1}{n^{n-1}} \leqslant 1.$

Ceci montre, par récurrence forte : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < u_n \leqslant 1.$

Méthode

Pour résoudre une question portant sur injectivité, surjectivité, bijectivité, d'applications dans un cadre général

Essayer de :

- utiliser les définitions et les propositions du cours sur la composée de deux applications injectives (resp. surjectives)
- utiliser le résultat de l'exercice classique 1.14 (en le redémontrant).

➟ **Exercices 1.3, 1.14, 1.15**

Exemple

Soient E un ensemble, $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Montrer que f est bijective et que :

$$f^{-1} = f.$$

⋆ • *Injectivité :* Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.

On a alors :

$$x_1 = (f \circ f)(x_1) = f\big(f(x_1)\big) = f\big(f(x_2)\big) = (f \circ f)(x_2) = x_2.$$

Ceci montre que f est injective.

• *Surjectivité :* Soit $y \in E$.

On a : $y = (f \circ f)(y) = f\big(f(y)\big)$, donc il existe $x \in E$ (on peut prendre $x = f(y)$) tel que $y = f(x)$. Ceci montre que f est surjective.

On conclut que f est bijective.

⋆ Puisque f est bijective, on peut utiliser f^{-1} et on a :

$$f^{-1} = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_E = f^{-1} \circ (f \circ f) = (f^{-1} \circ f) \circ f = \mathrm{Id}_E \circ f = f.$$

Méthode

Pour manipuler, dans un cadre général, des images directes, des images réciproques de parties par des applications

Appliquer les définitions.

Pour $f : E \longrightarrow F$, $A \in \mathcal{P}(E)$, $A' \in \mathcal{P}(F)$, on a :

$$f(A) = \big\{y \in F\,;\ \exists\, a \in A,\quad y = f(x)\big\},$$
$$f^{-1}(A') = \big\{x \in E\,;\ f(x) \in A'\big\}.$$

Autrement dit :

pour tout $y \in F$: $\quad y \in f(A) \iff \big(\exists\, a \in A,\quad y = f(a)\big)$

et, pour tout $x \in E$: $\quad x \in f^{-1}(A') \iff f(x) \in A'$.

➟ **Exercices 1.16, 1.17**

Exemple

Soient E, F deux ensembles, une application $f : E \longrightarrow F$ et $A' \in \mathcal{P}(F)$.

Montrer :

$$f^{-1}\big(\overline{A'}\big) = \overline{f^{-1}(A')}.$$

On a, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\big(\overline{A'}\big) &\iff f(x) \in \overline{A'} \\ &\iff f(x) \notin A' \\ &\iff \text{Non } \big(f(x) \in A'\big) \\ &\iff \text{Non } \big(x \in f^{-1}(A')\big) \\ &\iff x \in \overline{f^{-1}(A')}, \end{aligned}$$

d'où l'égalité voulue.

Méthode

Pour montrer qu'une relation $\mathcal{R}$, dans un ensemble E, est une relation d'équivalence

Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer que :

- $\mathcal{R}$ est réflexive : $\quad \forall x \in E, \quad x\,\mathcal{R}\,x$
- $\mathcal{R}$ est symétrique : $\quad \forall (x,y) \in E^2, \quad \big(x\,\mathcal{R}\,y \implies y\,\mathcal{R}\,x\big)$
- $\mathcal{R}$ est transitive : $\quad \forall (x,y,z) \in E^3, \quad \begin{cases} x\,\mathcal{R}\,y \\ y\,\mathcal{R}\,z \end{cases} \implies x\,\mathcal{R}\,z.$

➟ **Exercice 1.6**

Exemple

On note $\mathcal{R}$ la relation définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \big(x \,\mathcal{R}\, y \iff |x| = |y|\big).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

⋆ • On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = |x|$, d'où $x \,\mathcal{R}\, x$, donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

• On a, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$x \,\mathcal{R}\, y \iff |x| = |y| \iff |y| = |x| \iff y \,\mathcal{R}\, x,$$

donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

• On a, pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x \,\mathcal{R}\, y \\ y \,\mathcal{R}\, z \end{cases} \iff \begin{cases} |x| = |y| \\ |y| = |z| \end{cases} \implies |x| = |z| \iff x \,\mathcal{R}\, z,$$

donc $\mathcal{R}$ est transitive.

On conclut que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$.

⋆ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe de x modulo $\mathcal{R}$ est :

$$\widehat{x} = \{y \in \mathbb{R}\,;\ x \,\mathcal{R}\, y\} = \{y \in \mathbb{R}\,;\ |x| = |y|\} = \begin{cases} \{x, -x\} & \text{si } x \neq 0 \\ \{0\} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Méthode

Pour montrer qu'une relation $\mathcal{R}$, dans un ensemble E, est une relation d'ordre

Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer que :

- $\mathcal{R}$ est réflexive : $\quad \forall x \in E, \quad x \,\mathcal{R}\, x$
- $\mathcal{R}$ est antisymétrique : $\quad \forall (x,y) \in E^2, \quad \left(\begin{cases} x \,\mathcal{R}\, y \\ y \,\mathcal{R}\, x \end{cases} \implies x = y\right)$
- $\mathcal{R}$ est transitive : $\quad \forall (x,y,z) \in E^3, \quad \left(\begin{cases} x \,\mathcal{R}\, y \\ y \,\mathcal{R}\, z \end{cases} \implies x \,\mathcal{R}\, z\right).$

➟ **Exercices 1.9, 1.13**

Exemple

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\leqslant$ la relation définie dans E par, pour toutes $f, g \in E$:

$$f \leqslant g \iff \big(\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant g(x)\big).$$

Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre dans E. Cet ordre est-il total ?

⋆ • On a, pour toute $f \in E$: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant f(x)$,
d'où $f \leqslant f$, donc $\leqslant$ est réflexive.

• On a, pour toutes $f, g \in E$:

$$\begin{cases} f \leqslant g \\ g \leqslant f \end{cases} \iff \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant g(x) \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \leqslant f(x) \end{cases}$$

$$\iff \big(\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x)\big) \iff f = g,$$

donc $\leqslant$ est antisymétrique.

• On a, pour toutes $f, g, h \in E$:

$$\begin{cases} f \leqslant g \\ g \leqslant h \end{cases} \iff \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant g(x) \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \leqslant h(x) \end{cases}$$

$$\implies \big(\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant h(x)\big) \iff f \leqslant h,$$

donc $\leqslant$ est transitive.

Ceci montre que $\leqslant$ est une relation d'ordre dans E.

⋆ Considérons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 0$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x$.

On a $f(1) = 0 < 1 = g(1)$, donc on n'a pas $g \leqslant f$.

On a $f(1) = 0 > -1 = g(-1)$, donc on n'a pas $f \leqslant g$.

On conclut que l'ordre $\leqslant$ sur E n'est pas total.

Vrai ou Faux ?

1.1 Pour toutes parties A, B d'un ensemble E, on a : $A \cap B = \varnothing \iff B \subset \overline{A}$. V F

1.2 Pour toutes parties A, B d'un ensemble E, on a : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. V F

1.3 $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\quad x \leqslant y$. V F

1.4 $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad x \leqslant y$. V F

1.5 Si les applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont injectives, alors l'application $g \circ f$ est injective. V F

1.6 Si l'application composée $g \circ f$ est injective, alors f et g sont injectives. V F

1.7 Si une application $f : E \longrightarrow E$ vérifie $f \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors f est bijective et $f^{-1} = f$. V F

1.8 Si une application $f : E \longrightarrow E$ vérifie $f \circ f = f$, alors $f = \mathrm{Id}_E$. V F

1.9 Soient E, F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, A, B des parties de E. On a alors :

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

V F

1.10 Soient E, F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, A, B des parties de E. On a alors :

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

V F

Énoncés des exercices

1.1 Exemple de calcul ensembliste : inclusion

Soient E un ensemble, A, B, $C \in \mathcal{P}(E)$.

a) Montrer : $(A \cup B) \cap C \subset A \cup (B \cap C)$.

b) Établir qu'il y a égalité dans l'inclusion précédente si et seulement si : $A \subset C$.

1.2 Exemple de calcul ensembliste : équivalence entre deux égalités

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer :

$$A \cup B = A \cup C \iff A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}.$$

1.3 Exemple d'une restriction bijective

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par : $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$.

a) Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté a, n'ayant pas d'image par f.

b) Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté b, n'ayant pas d'antécédent par f.

c) Montrer que la restriction g de f à $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ au départ et à $\mathbb{R}\setminus\{b\}$ à l'arrivée est bijective, et préciser l'application réciproque g^{-1} de g.

1.4 Exemple de calcul de composée de deux applications

On note $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = 1 + x, \qquad g(x) = x^2.$$

Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

1.5 Exemple de raisonnement par récurrence (faible)

On considère la suite de Lucas $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n.$$

Montrer, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $L_{n+1}^2 - L_n L_{n+2} = 5(-1)^{n+1}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_k^2 = L_n L_{n+1} + 2$

c) $L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n$ et $L_{2n+1} = L_n L_{n+1} - (-1)^n$.

1.6 Exemple de relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$

On note $\mathcal{R}$ la relation définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \big(x \,\mathcal{R}\, y \iff x^2 - 2x = y^2 - 2y\big).$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$.

b) Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$.

1.7 Réunion ou intersection de produits cartésiens

Soient E, F deux ensembles, A_1, A_2 des parties de E, B_1, B_2 des parties de F.

a) Montrer : $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

b) 1) Montrer : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1$.

2) A-t-on nécessairement : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$?

1.8 Équivalence entre trois assertions faisant intervenir des différences ensemblistes

Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

Montrer que les trois assertions suivantes sont deux à deux équivalentes :

$$(1)\ \ A \setminus B = A, \qquad (2)\ \ B \setminus A = B, \qquad (3)\ \ A \cap B = \varnothing.$$

1.9 Exemple de relation d'ordre sur les entiers

On considère la relation $\mathcal{R}$ définie dans $\mathbb{N}^*$ par : $x \,\mathcal{R}\, y \iff \big(\exists\, n \in \mathbb{N}^*, \ \ y = x^n\big)$.

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est un ordre sur $\mathbb{N}^*$.

b) Est-ce que $\mathcal{R}$ est total ?

1.10 Exemple de raisonnement par récurrence à deux pas

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2} + 1.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

1.11 Exemple de raisonnement par récurrence forte

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!(n-k)!}.$$

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_n \in \mathbb{Q}_+^*$.

1.12 Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble

Soit E un ensemble.

On rappelle que, pour toute $A \in \mathcal{P}(E)$, la fonction indicatrice de A est l'application

$$\mathbf{1}_A : E \longmapsto \{0,1\}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin A \\ 1 & \text{si} \quad x \in A. \end{cases}$$

On note 1 l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0,1\}$ constante égale à 1.

a) Montrer, pour toutes $A, B \in \mathcal{P}(E)$:

$$A = B \iff \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B, \qquad \mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A,$$

$$\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \qquad \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \qquad \mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B.$$

b) En déduire, pour toutes $A, B \in \mathcal{P}(E)$: $\quad A \cap (A \cup B) = A \quad$ et $\quad A \cup (A \cap B) = A$.

1.13 Exemple de relation d'ordre sur un ensemble de suites réelles

On note E l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 0$ et on note $\mathcal{R}$ la relation définie dans E par, pour tout $(u,v) \in E^2$, $\;u \,\mathcal{R}\, v$ si et seulement si $v - u$ est croissante.

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E.

b) L'ordre $\mathcal{R}$ est-il total ?

c) Montrer : $\quad \forall (u,v) \in E^2, \quad (u \,\mathcal{R}\, v \implies u \leqslant v)$.

d) A-t-on : $\quad \forall (u,v) \in E^2, \quad (u \leqslant v \implies u \,\mathcal{R}\, v)$?

1.14 Composée injective, composée surjective

Soient E, F, G des ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications. Montrer :

a) si $g \circ f$ est injective, alors f est injective

b) si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective

c) si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

1.15 Applications : composition, injectivité, surjectivité

Soient E, F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications.

a) Montrer que, si $f \circ g \circ f = f$ et si f est injective, alors g est surjective.

b) Montrer que, si $g \circ f \circ g = g$ et si g est surjective, alors f est injective.

1.16 Images directes de parties par une application

Soient E, E' deux ensembles, $f : E \longrightarrow E'$ une application. Montrer, pour toutes parties A, B de E :

a) $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$

b) $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$

c) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

d) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

1.17 Images réciproques de parties par une application

Soient E, E' deux ensembles, $f : E \longrightarrow E'$ une application. Montrer, pour toutes parties A', B' de E :

a) $A' \subset B' \implies f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$

b) $f\big(f^{-1}(A')\big) \subset A'$

c) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$

d) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.

1.18 Différence symétrique, associativité

Soit E un ensemble. On note, pour toutes parties A, B de E :

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)},$$

appelée *différence symétrique* de A et B.

a) Deux exemples : Déterminer $A \vartriangle B$ dans les deux exemples suivants :

1) $E = \{1, 2, 3, 4\}, \quad A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 3\}$

2) $E = \mathbb{R}, \quad A =]-\infty\,;\,2], \quad B = [1\,;\,+\infty[$.

b) Établir : $\forall (A, B) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2, \quad A \vartriangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

c) Montrer, pour tout $(A, B) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2$: $\mathbf{1}_{A \vartriangle B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

d) En déduire que la loi $\vartriangle$ est associative dans $\mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire :

$$\forall (A, B, C) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^3, \quad (A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C).$$

Du mal à démarrer ?

1.1 *a)* Utiliser la distributivité de $\cap$ sur $\cup$.

b) Séparer l'équivalence logique en deux implications.

1.2 *Première méthode :*

Raisonner par équivalences logiques en passant aux complémentaires.

Deuxième méthode :

Supposer $A \cup B = A \cup C$.

$\star$ Partir d'un élément quelconque x de $A \cup \overline{B}$ et raisonner par l'absurde, pour déduire $x \in A \cup \overline{C}$.

$\star$ L'autre inclusion s'en déduit en échangeant B et C.

1.3 *a)* $a = 2$. *b)* $b = 3$.

c) À partir de $y = f(x)$, calculer x en fonction de y.

1.4 Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$, et trouver un $x \in \mathbb{R}$ tel que ces deux résultats soient différents.

1.5 Récurrence (faible) sur n, pour chacune des trois questions.

Pour *c)*, utiliser *a)*.

1.6 *a)* Revenir à la définition d'une relation d'équivalence.

Noter $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2 - 2x$, pour la commodité.

b) Revenir à la définition de la classe d'équivalence $\widehat{x}$ de x modulo $\mathcal{R}$: $\forall y \in \mathbb{R}, \quad \big(y \in \widehat{x} \iff x\,\mathcal{R}\,y\big)$.

1.7 *a)* Raisonner par équivalences logiques successives, en partant de $(a,b) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$.

b) 1) Même méthode qu'en *a)*.

2) Envisager un élément de $A_1 \times B_2$.

1.8 Raisonner par équivalences logiques successives en utilisant, entre autres : $A \subset \overline{B} \iff A \cap B = \varnothing$.

1.9 *a)* Revenir à la définition d'une relation d'ordre.

b) Envisager les éléments 1 et 2 de $\mathbb{N}^*$, par exemple.

1.10 Récurrence à deux pas sur n.

1.11 Récurrence forte sur n.

1.12 *a)* • Un sens est évident.

Réciproquement, supposer $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$ et partir d'un élément quelconque a de A, pour montrer $A \subset B$.

• Pour $x \in E$, séparer en cas : $x \in A$, $x \notin A$.

• Pour $x \in E$, séparer encore en cas : $x \in A \cap B$, $x \notin A \cap B$.

• Passer aux complémentaires à partir du résultat précédent.

• Utiliser les résultats précédents.

b) Calculer $\mathbf{1}_{A \cap (A \cup B)}$ et $\mathbf{1}_{A \cup (A \cap B)}$.

1.13 *a)* Revenir à la définition d'une relation d'ordre.

b) Envisager u et v de façon que $v - u$ ne soit pas monotone.

c) Remarquer que, si $u\,\mathcal{R}\,v$, alors $v - u$ est croissante et $u_0 = v_0$.

d) Envisager u, v de façon que $v \geqslant u$ et que $v - u$ ne soit pas croissante.

1.14 *a)* Revenir aux définitions.

b) Revenir aux définitions.

c) Se déduit directement de *a)* et *b)*.

1.15 *a)* Partir d'un élément x de E, considérer $f(x)$ et déduire $x = g\big(f(x)\big)$.

b) Partir de $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$, utiliser la surjectivité de g, puis $g = g \circ f \circ g$, et déduire $x_1 = x_2$.

1.16 *a)* Supposer $A \subset B$.

Partir d'un élément quelconque y de $f(A)$ et utiliser la définition de l'image directe d'une partie de E par f.

b) Partir de $a \in A$ et utiliser les définitions.

c) • Montrer, en utilisant *a)* :

$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B).$$

• Réciproquement, partir de $y \in f(A \cup B)$ et utiliser la définition de l'image directe d'une partie de E par f.

d) Utiliser *a)*.

1.17 *a)* Supposer $A' \subset B'$.

Partir d'un éléments quelconque x de $f^{-1}(A')$ et utiliser la définition de l'image réciproque d'une partie de F par f.

b) Partir de $y \in f\big(f^{-1}(A')\big)$ et utiliser les définitions.

c) Raisonner par équivalences logiques successives en partant de $x \in f^{-1}(A' \cup B')$ et en appliquant les définitions.

d) Raisonner par équivalences logiques successives en partant de $x \in f^{-1}(A' \cap B')$ et en appliquant les définitions.

1.18 *a)* **Réponses** :

1) $A \,\triangle\, B = \{2, 3\}$,

2) $A \,\triangle\, B =]-\infty\,;\,1[\cup]2\,;\,+\infty[$.

b) Calculer $A \,\triangle\, B$ d'après sa définition, en utilisant les formules sur le calcul sur les ensembles.

c) Utiliser *b)* et les formules sur les fonctions caractéristiques (cf. Exercice 1.12).

En particulier, pour tous ensembles X, Y :

$$\mathbf{1}_{\overline{X}} = 1 - \mathbf{1}_X, \quad \mathbf{1}_{X \cap Y} = \mathbf{1}_X \mathbf{1}_Y,$$

$$\mathbf{1}_{X \cup Y} = \mathbf{1}_X + \mathbf{1}_Y - \mathbf{1}_X \mathbf{1}_Y.$$

d) Calculer les fonctions caractéristiques des deux membres.

Vrai ou Faux, les réponses

1.1 $B \subset \overline{A} \iff \big(\forall x \in B,\ \ x \notin A\big) \iff \big(\text{Non}\ (\exists\, x \in B,\ \ x \in A)\big)$
$\iff \big(\text{Non}\,(A \cap B \neq \varnothing)\big) \iff A \cap B = \varnothing.$ **V** F

1.2 Contre-exemple : $E = \{1,2\},\ A = \{1\},\ B = \{2\}$.
La formule correcte est : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. V **F**

1.3 Par exemple, $y = x + 1$. **V** F

1.4 Il n'existe pas de réel y fixé plus grand que tout réel x. V **F**

1.5 C'est un résultat du cours. **V** F

1.6 Contre-exemple : $E = F = G = \mathbb{R},\ f : x \longmapsto \mathrm{e}^{\,x},\ g : y \longmapsto |y|$.
On a alors $g \circ f : x \longmapsto |\,\mathrm{e}^{\,x}| = \mathrm{e}^{\,x}$, $g \circ f$ est injective, mais g ne l'est pas. V **F**

1.7 L'application f est injective, car, pour tout $(x_1, x_2) \in E^2$, si $f(x_1) = f(x_2)$, alors $f\big(f(x_1)\big) = f\big(f(x_2)\big)$, donc $x_1 = x_2$. **V** F

L'application f est surjective car, pour tout $y \in E$, on a $y = f\big(f(y)\big)$.

Il en résulte que f est bijective, puis, en composant à gauche par f^{-1}, on obtient $f = f^{-1}$.

1.8 Contre-exemple : $E = \mathbb{R},\ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto 0$. V **F**

1.9 Soit $y \in f(A \cup B)$. Il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. On a alors $x \in A$ d'où $f(x) \in A$, ou $x \in B$ d'où $f(x) \in f(B)$, et donc : $f(x) \in f(A) \cup f(B)$. On obtient $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. **V** F

Réciproquement, soit $y \in f(A) \cup f(B)$. On a $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$. Si $y \in f(A)$, alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$, d'où $x \in A \cup B$ et $y = f(x)$, donc $y \in f(A \cup B)$. De même, si $y \in f(B)$, on déduit $y \in f(A \cup B)$. On obtient $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

Par double inclusion, on conclut : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

1.10 Contre-exemple : $E = F = \mathbb{R},\ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto x^2,\ A = \mathbb{R}_-,\ B = \mathbb{R}_+$. V **F**

On a alors : $A \cap B = \{0\},\ f(A \cap B) = \{0\},\ f(A) = \mathbb{R}_+,\ f(B) = \mathbb{R}_+,\ f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_+$.

Corrigés des exercices

1.1

a) On a, par distributivité de $\cap$ sur $\cup$:

$$(A \cup B) \cap C = (\underbrace{A \cap C}_{\subset A}) \cup (B \cap C) \subset A \cup (B \cap C).$$

b) • Supposons $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.

Soit $x \in A$.

Alors, $x \in A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, donc $x \in C$.

Ceci montre : $A \subset C$.

• Réciproquement, supposons $A \subset C$.

On a alors, par distributivité de $\cap$ sur $\cup$:

$$(A \cup B) \cap C = (\underbrace{A \cap C}_{=A}) \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C).$$

On conclut qu'il y a égalité dans l'inclusion obtenue en *a)* si et seulement si $A \subset C$.

1.2

En appliquant la première implication avec $(\overline{B}, \overline{C})$ à la place de (B, C), on obtient la seconde implication.

Il suffit donc de montrer la première implication.

• *Première méthode : par les ensembles, globalement*

On a :

$$\begin{aligned} & A \cup B = A \cup C \\ \Longrightarrow\ & \overline{A \cup B} = \overline{A \cup C} \\ \Longrightarrow\ & \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A} \cap \overline{C} \\ \Longrightarrow\ & A \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = A \cup (\overline{A} \cap \overline{C}) \\ \Longrightarrow\ & (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B}) = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{C}) \\ \Longrightarrow\ & A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}. \end{aligned}$$

• *Deuxième méthode, par les éléments*

On suppose $A \cup B = A \cup C$.

⋆ Soit $x \in A \cup \overline{B}$. Alors $x \in A$ ou $x \in \overline{B}$.

Si $x \in A$, alors $x \in A \cup \overline{C}$.

Supposons $x \notin A$, donc $x \in \overline{B}$.

Raisonnons par l'absurde : supposons $x \notin A \cup \overline{C}$.

Alors, $x \in \overline{A \cup \overline{C}} = \overline{A} \cap C$, donc $x \in C$,
puis $x \in A \cup C$, donc $x \in A \cup B$, contradiction avec $x \notin A$ et $x \notin B$.

Ce raisonnement par l'absurde montre : $x \in A \cup \overline{C}$,
et on a donc établi l'inclusion $A \cup \overline{B} \subset A \cup \overline{C}$.

⋆ Par rôles symétriques de B et C dans l'égalité d'hypothèse $A \cup B = A \cup C$, on a alors aussi l'autre inclusion, d'où l'égalité.

1.3

a) Il est clair que : $a = 2$.

b) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{2\}) \times \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} y = f(x) \iff y = \frac{3x-1}{x-2} & \iff xy - 2y = 3x - 1 \\ & \iff xy - 3x = 2y - 1 \iff (y-3)x = 2y - 1. \end{aligned}$$

Si $y \neq 3$, on a : $y = f(x) \iff x = \dfrac{2y-1}{y-3}$

donc y admet un antécédent et un seul par f, qui est $\dfrac{2y-1}{y-3}$.

Si $y = 3$, alors : $y = f(x) \iff 0x = 5$,

donc y n'a pas d'antécédent par f.

Il existe donc un réel et un seul, $b = 3$, n'ayant pas d'antécédent par f.

c) L'application $g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $x \longmapsto \dfrac{3x-1}{x-2}$

est la restriction de f à $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ au départ et à $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ à l'arrivée.

On a, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{2\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{3\})$:

$$y = g(x) \iff y = \frac{3x-1}{x-2} \iff x = \frac{2y-1}{y-3}.$$

Ainsi, tout élément y de l'arrivée admet un antécédent et un seul par g, donc g est bijective, et l'application réciproque de g est : $g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $y \longmapsto \dfrac{2y-1}{y-3}$.

1.4

• On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2) = 1 + x^2 \\ (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(1+x) = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2. \end{cases}$$

• Par exemple : $(f \circ g)(1) = 2$ et $(g \circ f)(1) = 4$,
donc : $f \circ g \neq g \circ f$.

1.5

a) • *Initialisation :*

Pour $n = 0$, on a :

$$L_{n+1}^2 - L_n L_{n+2} = L_1^2 - L_0 L_2 = 1^2 - 2 \cdot 3 = -5$$

et $$5(-1)^{n+1} = -5,$$

donc la formule est vraie pour $n = 0$.

• *Hérédité :*

Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On a alors
$$\begin{aligned} & L_{n+2}^2 - L_{n+1} L_{n+3} \\ = \ & L_{n+2}^2 - L_{n+1}(L_{n+2} + L_{n+1}) \\ = \ & (L_{n+2}^2 - L_{n+1} L_{n+2}) - L_{n+1}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= L_{n+2}(L_{n+2}-L_{n+1})-L_{n+1}^2 \\ &= L_{n+2}L_n - L_{n+1}^2 \\ &= -(L_{n+1}^2 - L_nL_{n+2}) \\ &= -\big(5(-1)^{n+1}\big) \ = \ 5(-1)^{n+2}, \end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n+1$.

Ceci montre, par récurrence sur n, que la formule proposée est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) • *Initialisation :*

Pour $n=0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_k^2 = L_0^2 = 2^2 = 4,$

et : $L_nL_{n+1}+2 = L_0L_1+2 = 2\cdot 1 + 2 = 4,$

donc la formule est vraie pour $n=0$.

• *Hérédité :*

Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} L_k^2 &= \Big(\sum_{k=0}^{n} L_k^2\Big) + L_{n+1}^2 \\ &= (L_nL_{n+1}+2) + L_{n+1}^2 \\ &= (L_nL_{n+1}+L_{n+1}^2)+2 \\ &= L_{n+1}(L_n+L_{n+1})+2 \ = \ L_{n+1}L_{n+2}+2, \end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n+1$.

Ceci montre, par récurrence sur n, que la formule proposée est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) • *Initialisation :*

Pour $n=0$: $\begin{cases} L_{2n} = L_0 = 2 \\ L_n^2 - 2(-1)^n = 2^2 - 2 = 2 \end{cases}$

et $\begin{cases} L_{2n+1} = L_1 = 1 \\ L_nL_{n+1} - (-1)^n = 2\cdot 1 - 1 = 1, \end{cases}$

donc la formule (système de deux formules) est vraie pour $n=0$.

• *Hérédité :*

Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned} L_{2n+2} &= L_{2n+1}+L_{2n} \\ &= \big(L_nL_{n+1}-(-1)^n\big)+\big(L_n^2-2(-1)^n\big) \\ &= (L_nL_{n+1}+L_n^2)-3(-1)^n \\ &= L_n(L_{n+1}+L_n)-3(-1)^n \\ &= L_nL_{n+2}-3(-1)^n \\ &= \big(L_{n+1}^2-5(-1)^{n+1}\big)-3(-1)^n \\ &= L_{n+1}^2+2(-1)^n \\ &= L_{n+1}^2-2(-1)^{n+1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & L_{2n+3} = L_{2n+2}+L_{2n+1} \\ &= \big(L_{n+1}^2-2(-1)^{n+1}\big)+\big(L_nL_{n+1}-(-1)^n\big) \\ &= L_{n+1}\big(L_{n+1}+L_n\big)-(-1)^{n+1} \\ &= L_{n+1}L_{n+2}-(-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n+1$.

Ceci montre, par récurrence sur n, que la formule proposée est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.6

a) Notons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2-2x.$

1) Réflexivité :

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)=f(x)$, donc $x\,\mathcal{R}\,x$.

2) Symétrie :

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x\,\mathcal{R}\,y$.
On a alors $f(x)=f(y)$, donc $f(y)=f(x)$, d'où $y\,\mathcal{R}\,x$.

3) Transitivité :

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x\,\mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{R}\,z$.
On a alors $f(x)=f(y)$ et $f(y)=f(z)$, donc $f(x)=f(z)$, d'où $x\,\mathcal{R}\,z$.

On conclut : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.
Notons $\widehat{x}$ la classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$.

On a, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & y \in \widehat{x} \\ \Longleftrightarrow\ & x\,\mathcal{R}\,y \\ \Longleftrightarrow\ & x^2-2x = y^2-2y \\ \Longleftrightarrow\ & x^2-y^2-2x+2y=0 \\ \Longleftrightarrow\ & (x-y)(x+y-2)=0 \\ \Longleftrightarrow\ & \big(y=x \quad \text{ou} \quad y=2-x\big). \end{aligned}$$

On conclut : $\widehat{x} = \begin{cases} \{1\} & \text{si} \quad x=1 \\ \{x,\ 2-x\} & \text{si} \quad x \neq 1. \end{cases}$

Il en résulte que $\widehat{x}$ est de cardinal 1 si $x=1$, de cardinal 2 si $x \neq 1$.

1.7

a) On a, pour tout $(a,b) \in E \times F$:

$$\begin{aligned} & (a,b) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \\ \Longleftrightarrow\ & \big((a,b) \in A_1 \times B_1 \ \text{ et } \ (a,b) \in A_2 \times B_2\big) \\ \Longleftrightarrow\ & \big(a \in A_1 \ \text{ et } \ b \in B_1\big) \ \text{ et } \ \big(a \in A_2 \ \text{ et } \ b \in B_2\big) \\ \Longleftrightarrow\ & \big(a \in A_1 \ \text{ et } \ a \in A_2\big) \ \text{ et } \ \big(b \in B_1 \ \text{ et } \ b \in B_2\big) \\ \Longleftrightarrow\ & \big(a \in A_1 \cap A_2 \ \text{ et } \ b \in B_1 \cap B_2\big) \\ \Longleftrightarrow\ & (a,b) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2), \end{aligned}$$

donc : $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

b) 1) On a, pour tout $(a,b) \in E \times F$:

$$\begin{aligned} & (a,b) \in (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) \\ \Longleftrightarrow\ & \big((a,b) \in A_1 \times B_1 \ \text{ ou } \ (a,b) \in A_2 \times B_1\big) \\ \Longleftrightarrow\ & \big((a \in A_1 \ \text{ ou } \ a \in A_2) \ \text{ et } \ b \in B_1\big) \\ \Longleftrightarrow\ & \big(a \in A_1 \cup A_2 \ \text{ et } \ b \in B_1\big) \\ \Longleftrightarrow\ & (a,b) \in (A_1 \cup A_2) \times B_1, \end{aligned}$$

donc : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1$.

2) L'ensemble $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$ contient, entre autres, les couples (a, b) où $a \in A_1$ et $b \in B_2$, et ces couples ne sont pas nécessairement dans $A_1 \times B_1$ ou $A_2 \times B_2$.

Donnons un contre-exemple.

Notons $E = F = \{0,1\}$, $A_1 = B_1 = \{0\}$, $A_2 = B_2 = \{0,1\}$.

On a alors : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = \{(0,0)\} \cup \{(1,1)\}$

et $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = \{0,1\} \times \{0,1\}$
$= \big\{(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1)\big\}$.

Ainsi, $(0,1)$ est dans le premier ensemble et non dans le second.

On conclut qu'en général il n'y a pas égalité entre les deux ensembles envisagés.

1.8

On a :

$$A \backslash B = A \iff A \cap \overline{B} = A \iff A \subset \overline{B} \iff A \cap B = \varnothing,$$

et, de même :

$$B \backslash A = B \iff B \cap \overline{A} = B \iff B \subset \overline{A} \iff B \cap A = \varnothing,$$

d'où les équivalences logiques entre les trois assertions.

1.9

a) 1) Réflexivité :

On a, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, $x \,\mathcal{R}\, x$, car $x = x^1$.

2) Antisymétrie :

Soient $x, y \in \mathbb{N}^*$ tels que $x \,\mathcal{R}\, y$ et $y \,\mathcal{R}\, x$.
Il existe $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $y = x^n$ et $x = y^p$.
On a $x \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, donc $x \geqslant 1$ et $n \geqslant 0$, d'où $x^n \geqslant x$, donc $y = x^n \geqslant x$.
De même, $x \geqslant y$, et on déduit $x = y$.

3) Transitivité :

Soient $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ tels que $x \,\mathcal{R}\, y$ et $y \,\mathcal{R}\, z$.
Il existe $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $y = x^n$ et $z = y^p$.
On a alors : $z = y^p = (x^n)^p = x^{np}$ et $np \in \mathbb{N}^*$, donc $x \,\mathcal{R}\, z$.

On conclut : $\mathcal{R}$ est un ordre sur $\mathbb{N}^*$.

b) On n'a ni $1 \,\mathcal{R}\, 2$, car il n'existe pas $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2 = 1^n$, ni $2 \,\mathcal{R}\, 1$, car il n'existe pas $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 = 2^n$.

On conclut : $\mathcal{R}$ n'est pas total.

1.10

Puisque u_{n+2} est donné en fonction de u_{n+1} et de u_n, on va effectuer une récurrence à deux pas.

• *Initialisation :*

Pour $n = 0$, on a $u_1 > u_0$, car $u_1 = 1$ et $u_0 = 0$.

Pour $n = 1$, on a $u_2 > u_1$,

car $u_1 = 1$ et $u_2 = \dfrac{u_1 + u_0}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$.

• *Hérédité :*

Supposons que, pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait $u_{n+1} > u_n$ et $u_{n+2} > u_{n+1}$. On a alors :

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2} + u_{n+1}}{2} + 1 > \frac{u_{n+1} + u_n}{2} + 1 = u_{n+2}.$$

Ceci montre, par récurrence à deux pas sur n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n.$$

On conclut que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

1.11

Puisque u_{n+1} est donné (entre autres) en fonction de $u_0, \ldots, u_n$, on va effectuer un raisonnement par récurrence forte.

• *Initialisation :*

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \in \mathbb{Q}_+^*$.

• *Hérédité :*

Supposons, pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé : $u_0, \ldots, u_n \in \mathbb{Q}_+^*$.

Comme $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!(n-k)!}$, que $u_0, \ldots, u_n$ sont dans $\mathbb{Q}_+^*$ et que $0!, 1!, \ldots, n!$ sont dans $\mathbb{N}^*$, par opérations, on déduit : $u_{n+1} \in \mathbb{Q}_+^*$.

On conclut, par récurrence forte sur n : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{Q}_+^*$.

1.12

a) • Il est clair que, si $A = B$, alors $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.

Réciproquement, supposons $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.

Pour tout $a \in A$, on a $\mathbf{1}_B(a) = \mathbf{1}_A(a) = 1$, donc $a \in B$, ce qui montre $A \subset B$, puis, de même, $B \subset A$, donc $A = B$.

On conclut : $A = B \iff \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.

Autrement dit, la connaissance de $\mathbf{1}_A$ détermine entièrement A.

• On a, pour tout $x \in E$:
si $x \in A$, alors $x \notin \overline{A}$, donc $\mathbf{1}_A(x) = 1$ et $\mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 0$, d'où $\mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$
si $x \notin A$, alors $x \in \overline{A}$, donc $\mathbf{1}_A(x) = 0$ et $\mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 1$, d'où $\mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$.

Ceci montre : $\forall x \in E, \quad \mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$.

On conclut : $\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$.

• On a, pour tout $x \in E$:

si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$, donc $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = 1$, $\mathbf{1}_A(x) = 1$, $\mathbf{1}_B(x) = 1$, d'où $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$

si $x \notin A \cap B$, alors $x \notin A$ ou $x \notin B$, donc $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = 0$ et $\big(\mathbf{1}_A(x) = 0 \;\text{ ou }\; \mathbf{1}_B(x) = 0\big)$, d'où $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$.

Ceci montre : $\forall x \in E, \quad \mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$.

On conclut : $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

• On a, en passant par des complémentaires et en utilisant des résultats précédents :

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{A \cup B} &= 1 - \mathbf{1}_{\overline{A \cup B}} \\
&= 1 - \mathbf{1}_{\overline{A} \cap \overline{B}} \\
&= 1 - \mathbf{1}_{\overline{A}} \mathbf{1}_{\overline{B}} \\
&= 1 - (1 - \mathbf{1}_A)(1 - \mathbf{1}_B) \\
&= 1 - (1 - \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) \\
&= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B.
\end{aligned}$$

• On a :

$$\mathbf{1}_{A\setminus B} = \mathbf{1}_{A\cap\overline{B}} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_{\overline{B}} = \mathbf{1}_A(1-\mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B.$$

b) On a, pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

$$\mathbf{1}_{A\,\cap\,(A\,\cup\,B)} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_{A\,\cup\,B} = \mathbf{1}_A(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A,$$

donc, d'après *a)* : $A \cap (A \cup B) = A$.

De même :

$$\mathbf{1}_{A\,\cup\,(A\,\cap\,B)} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{A\,\cap\,B} - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_{A\,\cap\,B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A,$$

donc, d'après *a)* : $A \cup (A \cap B) = A$.

On peut aussi remarquer que, puisque $A \subset A \cup B$, on a $A \cap (A \cup B) = A$, et que, puisque $A \cap B \subset A$, on a $A \cup (A \cap B) = A$.

1.13

a) 1) Réflexivité :
Soit $u \in E$. On a $u - u = 0$ croissante, donc $u\,\mathcal{R}\,u$.
2) Antisymétrie :
Soit $(u, v) \in E^2$ tel que $u\,\mathcal{R}\,v$ et $v\,\mathcal{R}\,u$.
Alors, $v - u$ est croissante et $u - v$ est croissante, donc $v - u$ est constante, et puisque $u_0 = 0 = v_0$, on déduit $v - u = 0$, $u = v$.
3) Transitivité :
Soit $(u, v, w) \in E^3$ tel que $u\,\mathcal{R}\,v$ et $v\,\mathcal{R}\,w$.
Alors, $v - u$ est croissante et $w - v$ est croissante, donc, par addition, $w - u = (w - v) + (v - u)$ est croissante, donc $u\,\mathcal{R}\,w$.
On conclut que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E.

b) Pour montrer que l'ordre $\mathcal{R}$ n'est pas total, il suffit de trouver $u, v \in E$ telles que $v - u$ et $u - v$ ne soient pas croissantes, c'est-à-dire telles que $v - u$ ne soit pas monotone.
Il est clair que les suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 0$ et $v_n = 1 - (-1)^n$ conviennent.
On conclut que l'ordre $\mathcal{R}$ n'est pas total.

c) Soit $(u, v) \in E^2$ tel que $u\,\mathcal{R}\,v$.

Alors, $v - u$ est croissante et $v_0 - u_0 = 0 - 0 = 0$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \geqslant 0$, c'est-à-dire $u \leqslant v$.

d) Donnons un contrexemple, dans lequel $u \leqslant v$ et non $u\,\mathcal{R}\,v$.
Il suffit de trouver $u, v \in E$ telles que $v - u \geqslant 0$ et que $v - u$ ne soit pas croissante.
L'exemple donné dans la solution de la question *b)*, $u_n = 0$, $v_n = 1 - (-1)^n$, convient.

1.14

a) Supposons $g \circ f$ injective.

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. On a alors :

$$g \circ f(x_1) = g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) = g \circ f(x_2).$$

Puisque $g \circ f$ est injective, il s'ensuit : $x_1 = x_2$.

On conclut que f est injective.

b) Supposons $g \circ f$ surjective.

Soit $z \in G$. Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que : $z = g \circ f(x)$.

On a alors : $\quad z = g\big(f(x)\big)$ et $f(x) \in F$.

Ceci montre : $\forall z \in G,\ \exists\, y \in F,\ \ z = g(y)$.

On conclut que g est surjective.
c) Si $g \circ f$ est bijective, alors $g \circ f$ est injective et surjective, donc, d'après *a)* et *b)*, f est injective et g est surjective.

1.15

a) On suppose $f \circ g \circ f = f$ et f injective.

Soit $x \in E$.

On a : $f(x) = (f \circ g \circ f)(x) = f\big(g \circ f(x)\big)$.

Comme f est injective, on déduit :

$$x = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

Cela montre que g est surjective.
b) On suppose $g \circ f \circ g = g$ et g surjective.

Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

Puisque g est surjective, il existe $y_1, y_2 \in F$ tels que :

$$x_1 = g(y_1) \quad \text{et} \quad x_2 = g(y_2).$$

On a alors :

$$x_1 = g(y_1) = (g \circ f \circ g)(y_1) = g\Big(f\big(g(y_1)\big)\Big) = g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) = (g \circ f \circ g)(y_2) = g(y_2) = x_2,$$

et on conclut que f est injective.

1.16

a) Supposons $A \subset B$.

Soit $y \in f(A)$. Il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$.
Comme $a \in A \subset B$, on a $a \in B$, puis $y = f(a) \in f(B)$.

On obtient : $f(A) \subset f(B)$.
b) Soit $a \in A$. On a : $f(a) \in f(A)$, donc par définition d'une image réciproque, $a \in f^{-1}\big(f(A)\big)$.

On conclut : $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.
c) • En utilisant *a)* :

$$\begin{cases} A \subset A \cup B \\ B \subset A \cup B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(A) \subset f(A) \cup f(B) \\ f(B) \subset f(A) \cup f(B) \end{cases} \Longrightarrow f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B).$$

• Soit $y \in f(A \cup B)$.
Il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.
On a : $x \in A$ ou $x \in B$.
Si $x \in A$, alors $f(x) \in f(A) \subset f(A) \cup f(B)$.
Si $x \in B$, alors $f(x) \in f(B) \subset f(A) \cup f(B)$.

On a donc : $f(x) \in f(A) \cup f(B)$.

Ceci montre : $\forall (A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

On conclut : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
d) En utilisant *a)* :

$$\begin{cases} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(A \cap B) \subset f(A) \\ f(A \cap B) \subset f(B) \end{cases} \Longrightarrow f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

1.17

a) Supposons $A' \subset B'$.

Soit $x \in f^{-1}(A')$.
On a $f(x) \in A'$, donc $f(x) \in B'$, puis $x \in f^{-1}(B')$.

On conclut : $\quad f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$.

b) Soit $y \in f\big(f^{-1}(A')\big)$.
Il existe $x \in f^{-1}(A')$ tel que $y = f(x)$.
Puis, comme $x \in f^{-1}(A')$, on a $f(x) \in A'$, donc $y \in A'$.

On conclut : $\quad f\big(f^{-1}(A')\big) \subset A'$.

c) On a, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned}
& x \in f^{-1}(A' \cup B') \\
\iff \quad & f(x) \in A' \cup B' \\
\iff \quad & \big(f(x) \in A' \quad \text{ou} \quad f(x) \in B'\big) \\
\iff \quad & \big(x \in f^{-1}(A') \quad \text{ou} \quad x \in f^{-1}(B')\big) \\
\iff \quad & x \in f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B').
\end{aligned}$$

On conclut : $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$.

d) On a, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned}
& x \in f^{-1}(A' \cap B') \\
\iff \quad & f(x) \in A' \cap B' \\
\iff \quad & \big(f(x) \in A' \quad \text{et} \quad f(x) \in B'\big) \\
\iff \quad & \big(x \in f^{-1}(A') \quad \text{et} \quad x \in f^{-1}(B')\big) \\
\iff \quad & x \in f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B').
\end{aligned}$$

On conclut : $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.

1.18

a) 1) Pour $E = \{1,2,3,4\}$, $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$, on a :

$$A \cup B = \{1,2,3\}, \quad A \cap B = \{1\},$$
$$\overline{A \cap B} = \{2,3,4\}, \quad A \vartriangle B = \{2,3\}.$$

2) Pour $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty\,;2]$, $B = [1\,;+\infty[$, on a :

$$A \cup B = \mathbb{R}, \quad A \cap B = [1\,;2],$$

$$\overline{A \cap B} =]-\infty\,;1[\cup]2\,;+\infty[, \quad A \vartriangle B =]-\infty\,;1[\cup]2\,;+\infty[.$$

b) On a, pour tout $(A,B) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2$:

$$\begin{aligned}
A \vartriangle B &= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\
&= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}).
\end{aligned}$$

c) On a, pour tout $(A,B) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{A \vartriangle B} &= \mathbf{1}_{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\overline{B}} + \mathbf{1}_B \mathbf{1}_{\overline{A}} - \underbrace{\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\overline{B}} \mathbf{1}_B \mathbf{1}_{\overline{A}}}_{=0} \\
&= \mathbf{1}_A(1 - \mathbf{1}_B) + \mathbf{1}_B(1 - \mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B.
\end{aligned}$$

d) Soit $(A,B,C) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^3$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{(A \vartriangle B) \vartriangle C} &= \mathbf{1}_{A \vartriangle B} + \mathbf{1}_C - 2 \cdot \mathbf{1}_{A \vartriangle B} \mathbf{1}_C \\
&= (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) + \mathbf{1}_C - 2 \cdot (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B)\mathbf{1}_C \\
&= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A \mathbf{1}_C + \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C) + 4 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C.
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{A \vartriangle (B \vartriangle C)} &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{B \vartriangle C} - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{B \vartriangle C} \\
&= \mathbf{1}_A + (\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2 \cdot \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C) - 2 \cdot \mathbf{1}_A(\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2 \cdot \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C) \\
&= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A \mathbf{1}_C + \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C) + 4 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C.
\end{aligned}$$

Ceci montre : $\quad \mathbf{1}_{(A \vartriangle B) \vartriangle C} = \mathbf{1}_{A \vartriangle (B \vartriangle C)}$.

On déduit : $\quad (A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C)$,
et on conclut que la loi $\vartriangle$ est associative dans $\mathcal{P}(E)$.

Calculs algébriques et trigonométrie

Chapitre 2

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Calculs de sommations simples ou doubles, de produits simples ou doubles
- Manipulation des coefficients binomiaux, obtention d'égalités et calculs de sommes les faisant intervenir
- Résolution de systèmes linéaires
- Résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés du symbole $\sum$ pour une sommation d'un nombre fini de termes, et du symbole $\prod$ pour un produit d'un nombre fini de facteurs
- Règles de calcul élémentaire sur les nombres entiers, sur les nombres réels
- Sommations usuelles : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k,\ \sum_{k=1}^{n} k^2,\ \sum_{k=0}^{n} q^k$
- Factorisation de $a^n - b^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- Définition et propriétés des coefficients binomiaux $\dbinom{n}{p}$, en particulier :
  - l'expression à l'aide de factorielles $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$,
  - la formule fondamentale $\dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1} = \dbinom{n+1}{p+1}$,
  - la formule du binôme de Newton
- Opérations élémentaires, méthode du pivot
- Définition et propriétés de $\sin, \cos, \tan$, formules de trigonométrie.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour calculer certaines sommations indexées par un entier

- Si le résultat est fourni, essayer de raisonner par récurrence
- Essayer de se ramener aux sommations classiques :
  - la sommation géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\quad \sum_{q=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

  - la sommation d'entiers, de carrés d'entiers consécutifs :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

  - la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

- Essayer de faire apparaître un télescopage.

➟ **Exercices 2.1 à 2.3, 2.9, 2.10, 2.16, 2.21 à 2.23**

Exemple

Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-k-1}{(k+1)!} = -\frac{n}{(n+1)!}.$$

Récurrence sur n.

- Pour $n = 1$, l'égalité demandée est évidente, chacun des deux membres étant égal à $-\dfrac{1}{2}$.
- Supposons, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-k-1}{(k+1)!} = -\frac{n}{(n+1)!}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k^2-k-1}{(k+1)!} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-k-1}{(k+1)!}\right) + \frac{(n+1)^2-(n+1)-1}{(n+2)!} \\
&= -\frac{n}{(n+1)!} + \frac{n^2+n-1}{(n+2)!} \\
&= \frac{-n(n+2)+n^2+n-1}{(n+2)!} = -\frac{n+1}{(n+2)!},
\end{aligned}$$

donc l'égalité est vraie pour $n+1$.

Ceci montre, par récurrence, que l'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque : Un autre calcul est possible, utilisant un télescopage.