Sylvain Gugger
Christophe Chalons
Anatole Khelif
Vojislav Petrov
Gérard Rozsavolgyi

PARCOURS PRÉPAS

# MATHS PCSI

EDISCIENCE

Création de couverture : Studio Dunod


Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

DANGER

LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

© Dunod, 2021



11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-082830-2



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

## Partie 4 Algèbre linéaire (semestre 2)



## Partie 5 Analyse réelle (semestre 2)



## Partie 6 Probabilités (semestre 2)

# Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux élèves de première année de classe préparatoire PCSI. Il s'agit d'un complément à leur cours de mathématiques, mettant l'accent sur les notions essentielles du cours à connaître et les méthodes à maîtriser, permettant de les mettre en œuvre par le biais d'exercices. Le livre est divisé en six parties et vingt-six chapitres. Les trois premières parties correspondent à l'enseignement du premier semestre, les trois suivantes à celui du second semestre. Il commence par une introduction, qui présente quelques règles utiles pour l'écriture de raisonnements mathématiques.

Chaque chapitre commence par une partie nommée *L'essentiel du cours*. On y présente tous les points les plus importants du cours (définitions, propositions, théorèmes, remarques) à la manière d'une fiche. Les preuves ne sont volontairement pas incluses pour se concentrer sur les résultats à connaître.
On trouve ensuite une partie nommée *Les méthodes à maîtriser*. Elle présente des méthodes en rapport avec le chapitre en cours qu'il faut savoir mettre en pratique.
Ces méthodes sont illustrées par un exemple corrigé, et comportent parfois un renvoi vers les exercices qui les utilisent. Il est très utile de refaire par soi-même les exemples présents dans les champs méthodes sans regarder les corrections lors des révisions du chapitre.

Si la méthode présentée est facilement programmable sur ordinateur, on trouvera un programme illustratif en langage Python.

Pour tester la connaissance du cours et des méthodes, chaque chapitre comporte ensuite une *Interro de cours*. Elle comporte généralement des questions de cours, des QCM et des exemples d'application directe des méthodes.

La suite du chapitre est consacrée aux *Exercices*. On les a séparés en deux parties : dans la rubrique *S'entraîner*, on trouve un ensemble d'exercices couvrant tous les points du chapitre. Ce sont les plus faciles, en général, mais certaines méthodes étant plus difficiles à mettre en œuvre que d'autres, ils ne sont pas nécessairement de difficulté égale.
La rubrique *Approfondir* contient d'autres exercices pour continuer de s'exercer, a priori un peu plus difficiles. Lorsque cela était possible, on a choisi des exercices proposés récemment à l'oral de concours d'entrée aux grandes écoles ou des « classiques ».
Enfin, la partie *Corrections* comporte les corrigés détaillés de l'interrogation de cours et des exercices.
De façon générale, il est important de comprendre que la correction n'est pas une panacée et si on n'a pas suffisamment réfléchi à la question posée, elle constituera essentiellement un **soulagement**, et donc un anesthésiant faisant suite à la « galère » de la recherche.

C'est pourquoi, nous vous recommandons de ne jamais aller voir les corrections en première intention, même quand elles sont présentes. D'une part, la place oblige parfois à passer certaines étapes [1], et d'autre part, si la phase de recherche a été suffisante et n'a pas abouti, le plaisir d'être

1. En les mettant toutes, le livre ferait au moins $fibonacci(1000)$ pages !

soulagé(e), puis de dire *mais c'est bien sûr, on pouvait faire comme ci ou comme ça*, ne doit pas être confondu avec un apprentissage en profondeur.

En outre, une correction ne doit pas être prise comme un modèle absolu à mémoriser et à reproduire de manière automatique. L'intelligence mathématique ne se résume pas à la mémoire : elle fait aussi intervenir l'imaginaire, la visualisation, l'intuition et surtout l'envie de comprendre et découvrir des choses par soi-même.

Le sens de **l'effort** et la **conquête de l'autonomie** seront ainsi des qualités précieuses à acquérir ou consolider durant ces deux années.

Un peu paradoxalement, le côté ludique et passionnant des mathématiques devrait s'en trouver renforcé chez vous !
Un émerveillement certain pourrait même vous gagner au fil du temps, produit par la fréquentation des objets mathématiques, de leur beauté intrinsèque, et du sentiment d'unité et d'infaillibilité qui s'en dégage.

Lors des concours, vous serez en compétition avec les autres, et les sujets d'épreuve ne vous proposeront pas de reproduire des corrections, ce qui serait une perte d'énergie dans l'objectif de comparer des qualités réelles et durables développées chez les candidats.

Tout au long de l'ouvrage, on a utilisé un certain nombre de pictogrammes :

pour attirer l'attention du lecteur sur un ou plusieurs points spécifiques.

pour signaler un piège ou une erreur à éviter.

pour mettre l'accent sur une bonne manière de rédiger.

# Des vidéos pour vous aider à réussir en prépa

Pour réussir vos concours, vous devrez mettre en œuvre des compétences disciplinaires ***(hard skills)***, mais aussi des ***soft skills***, ces compétences transversales qui vous permettront de tenir le bon rythme. La collection ***Parcours Prépas*** vous offre six vidéos pour vous préparer à réussir dès la première année et faire la différence le jour J par la maîtrise de votre énergie (physique, émotionnelle, mentale), par l'entretien de votre motivation et par vos méthodes de travail.

*Tout d'abord deux vidéos méthodologiques d'**Alexis Brès**. Professeur agrégé de physique-chimie en MP2I (lycée Hoche, Versailles), il est aussi correcteur et concepteur de sujets pour la banque du concours e3a-Polytech ; ancien correcteur du concours d'entrée aux ENS. Auteur de L'Oral de physique aux concours des ENS et de Polytechnique (Dunod).*

http://dunod.link/jvy7mqd

## Vidéo 1 : Apprendre à apprendre Comment mobiliser efficacement son cours ?

Comment apprendre un cours ? Comment savoir si on l'a vraiment compris ? Comment le mobiliser dans les TD et dans les épreuves ? Comment créer du lien entre les connaissances pour se forger une intuition de la solution et gagner un temps précieux ? Autant de questions-réponses abordées dans cette vidéo. Une méthodologie particulièrement adaptée à l'apprentissage des cours de physique, de mathématiques ou de sciences industrielles.

http://dunod.link/z0psk69

## Vidéo 2 : Écrit, oral : aborder sereinement la résolution d'un problème

Si les exigences d'un sujet d'écrit et d'un oral peuvent sembler assez différentes, il existe des techniques communes pour aborder ces épreuves sans stress. Cette vidéo fournit :

- des techniques pour apprivoiser la résolution d'un problème de physique : modalités de décryptage du sujet et de mobilisation du cours ;
- des recommandations sur le fond et la forme pour gagner la confiance des correcteurs ;
- des tactiques cohérentes pour gagner des points ;
- des points de vigilance concernant la préparation des khôlles et des oraux.

*Ensuite quatre vidéos « soft skills » pour aborder la prépa comme le ferait un sportif de haut niveau. Ces vidéos ont été conçues par **Stéphane Fassetta**, fondateur de Syprium, coach professionnel, préparateur mental de sportifs de haut niveau, professeur d'aïkido. Auteur de Nos 8 profils énergétiques (InterÉditions).*

http://dunod.link/80x2gwu

## Vidéo 3 : Les cinq piliers de l'énergie, ou comment réussir le marathon de la prépa ?

La prépa, c'est un peu comme le sport de haut niveau : plus le temps passe, plus le niveau ou les contraintes augmentent. Maîtriser son énergie, c'est donc faire un usage optimum de ses ressources pour tenir le rythme des deux années, s'adapter à la diversité des situations et réussir ses épreuves. Cette vidéo présente les dimensions de notre énergie et les cinq piliers pour l'entretenir. La capacité à se ressourcer sur ces cinq piliers est une compétence à développer dès votre arrivée en prépa.

http://dunod.link/sicy8u3

### *Vidéo 4 : Gérer efficacement son temps en prépa*

En prépa, on manque toujours de temps. L'enjeu est donc de gérer efficacement cette ressource pour atteindre les objectifs de vos différentes échéances.

Cette vidéo fournit des repères pour :

- trouver sa propre organisation personnelle : techniques de planification, objectifs SMART... ;
- développer sa capacité d'attention, essentielle à la compréhension, à la mémorisation, à la gestion de la charge mentale et à votre avancement ;
- connaître ses propres biorythmes pour un apprentissage efficient, en capitalisant sur les acquis de la chronobiologie.

http://dunod.link/p5maym6

### *Vidéo 5 : Gérer son stress et développer la confiance en soi pour les concours*

Comme dans le sport de haut niveau, la préparation d'un concours soumet votre énergie à rude épreuve. Si une certaine pression est stimulante pour doper ses performances, l'installation dans un stress chronique compromet à la fois votre santé et vos chances de réussite.

Cette vidéo permet :

- d'identifier les sources externes et internes de son propre stress ;
- de comprendre le rôle du stress comme mécanisme naturel d'adaptation de l'organisme face à une situation déstabilisante et/ou à fort enjeu ;
- d'apprendre à reconnaître certains symptômes physiques, émotionnels ou cognitifs du stress pour prévenir l'épuisement ;
- de connaître les possibilités de régulation physique et mentale du stress ;
- d'entretenir passionnément sa motivation pour préserver durablement la confiance en soi, quelles que soient vos contre-performances.

http://dunod.link/vncd3c5

### *Vidéo 6 : Techniques respiratoires et de préparation mentale pour préparer les concours*

La capacité à se relaxer ou à récupérer quand il le faut est essentielle pour tenir le rythme de préparation d'un concours.

Grâce à cette vidéo :

- vous saurez mettre en œuvre différentes techniques respiratoires adaptées à la récupération et à la dynamisation ;
- vous disposerez de deux techniques de préparation mentale pour conserver un état d'esprit positif, limiter votre niveau de stress et améliorer vos capacités d'attention.

# Pour bien commencer

Le but de cette introduction est de donner un certain nombre de conseils de rédaction pour bien commencer l'année de classe préparatoire.

**Méthode 0.1 :**

Se rappeler la définition du mot *mathématique*.
Les mathématiques sont la recherche de certitudes formelles absolues. On accède à ces certitudes uniquement à l'aide de preuves formelles. Seule la **forme** valide la preuve, indépendamment du sens des mots (hors mots logiques) qui s'y trouvent.
Un texte que vous auriez besoin de défendre en invoquant le sens des mots qui s'y trouvent est automatiquement en dehors des preuves mathématiques.
Les parties implicites ou explicites, absolument **toutes**, admises dans une preuve sont automatiquement des hypothèses que la preuve fait. Parfois ce sont des axiomes (c'est-à-dire des hypothèses pérennes admises pour toujours), d'autres fois des hypothèses provenant du contexte, d'autres fois encore des égalités provenant de définitions antérieures.
Les définitions sont des **abréviations** avant tout, en termes de statut. Elles peuvent prendre des paramètres. Par exemple, vous pouvez écrire *j'appelle $f(q)$ le nombre $10q^9$, et ce pour tout nombre rationnel $q$*. L'égalité $f(q) = 10q^9$ est alors utilisée comme un *n*ouvel axiome. On peut parfois gagner du temps en écrivant $a := b$ à la place de *je désigne par $a$ l'objet $b$* et les mathématiciens se permettent même souvent d'écrire $a = b$ dans un abus certain de notation !
L'intérêt des définitions est de raccourcir les textes, mais elles peuvent être éliminées par un processus de remplacement itéré. Par exemple, $2 + 2 = 4$ ne fait qu'exprimer que

$$((1 + 1) + 1) + 1 = (1 + 1) + (1 + 1)$$

du fait des définitions suivantes : $2 := 1 + 1$ ; $3 := 2 + 1$ ; $4 := 3 + 1$

**Méthode 0.2 : Prendre garde aux hypothèses d'un théorème**

On ne peut appliquer la conclusion d'un théorème que lorsque toutes ses hypothèses sont vérifiées, avant d'utiliser sa conclusion.
Par exemple, les théorèmes faisant le lien entre monotonie d'une fonction et signe de sa dérivée ne sont applicables que sur un intervalle !

**Exemple d'application**

**Les énoncés suivants sont-ils toujours vrais, toujours faux ou dépendent-ils des paramètres (on justifiera) ?**

**(a)** Une fonction de dérivée strictement négative sur $I$ est strictement décroissante sur $I$.

**(b)** Une fonction dont la dérivée est nulle sur $I$ est constante sur $I$.

**Correction :**
**(a) est parfois faux :** Comme on l'a expliqué dans la méthode, il faut que $I$ soit un intervalle pour que le théorème soit applicable. La fonction inverse a une dérivée strictement négative sur

$I = \mathbb{R}^*$, mais n'est pas strictement décroissante sur $I$ : on a $-1 < 1$, et $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$. $f$ est en revanche strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
**(b) est parfois faux :** Là encore, il faut que $I$ soit un intervalle pour que le théorème soit applicable. Si $I$ n'est pas un intervalle, $f$ est constante sur chacun des intervalles composant $I$, mais pas constante globalement. Par exemple, $f : [-1, 1] \cup [3, 5] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \left| \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in [-1, 1] \\ 5 \text{ si } x \in [3, 5] \end{array} \right.$ est dérivable, de dérivée nulle sur $[-1, 1] \cup [3, 5]$, mais non constante.

**Méthode 0.3 : Statuter ses variables**

Lorsqu'on doit montrer un énoncé dépendant d'une (ou plusieurs) variable(s), il est préférable d'introduire cette variable. Sans cela, une personne qui lit votre raisonnement peut ne pas l'accepter. Le mot *« soit $x \in A$ »* est une abréviation pour dire que vous nommez $x$ un objet dans $A$ qui a été choisi par un démon qui a fait tout son possible pour rendre la chose que vous voulez prouver fausse. Pour cette raison, la convention est que si vous parvenez quand même à prouver la chose, on considère que vous l'avez prouvée pour n'importe quelle valeur de $x$.

Vous aurez l'occasion, comme tout mathématicien, de gamberger sur des expressions non définies comme il peut arriver parfois :

$$\forall \in \mathbb{R} : \frac{a}{b} = c \iff [b \neq 0 \ et \ a = bc]$$

qui ne sont pas toujours faciles à déclarer fausses. On vous laisse le plaisir de la méditation, importante, sur ces petites aventures consécutives à l'utilisation de l'argot mathématique.

**Méthode 0.4 : Prendre garde au type des objets manipulés**

En mathématiques, on manipule divers types d'objets : des ensembles, des nombres (entiers, réels, complexes ...), des fonctions, des vecteurs etc. Il ne faut pas les confondre.
On peut par exemple, additionner deux nombres, mais on ne peut pas additionner deux ensembles, on peut seulement en prendre la réunion. On peut comparer deux nombres réels (avec $\leqslant$), pas deux nombres complexes. Une fonction peut être continue, croissante, dérivable, pas un nombre réel.

Attention aussi : $x$ n'est pas forcément un nombre réel, $n$ un nombre entier ou $f$ une fonction (même si ce sont des noms très courants pour chacun de ces objets).

**Exemple d'application**

**Proposer des statuts pour les variables utilisées dans les formules ou les phrases suivantes**

**(a)** $\ln'(h) = \dfrac{1}{h}$. **(b)** $x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

**(c)** $\dfrac{1}{f} = \dfrac{\overline{f}}{|f|^2}$. **(d)** $n(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

**Correction :**
**(a)** On regarde la dérivée de ln en $h$, ce n'est acceptable qu'avec $h$ un réel strictement positif.
**(b)** On parle du terme dérivable pour $x$, ce n'est acceptable qu'avec $x$ une fonction. Pour pouvoir être dérivable sur $\mathbb{R}$, elle doit être définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**(c)** On parle du conjugué de $f$ (notation $\overline{f}$) et de son module $|f|$, si $f$ est un nombre complexe, non nul pour qu'on puisse en prendre l'inverse. C'est acceptable.
**(d)** On parle d'une limite pour $n$, ce qui est possible quand $n$ est une fonction. Pour regarder sa limite en $+\infty$, elle sera supposée définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ (avec $a \in \mathbb{R}$), à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Dans le dernier point, il est inutile de définir $x$ (on dit que $x$ est une variable muette). En effet, on précise que $x$ est un réel qui tend vers $+\infty$ dans la notation $x \to +\infty$.

**Exemple d'application**
**Les énoncés suivants sont-ils grammaticalement corrects ?**

**(a)** La fonction $x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

**(b)** exp, cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

**(c)** Pour $z \in \mathbb{C}$, $z^2 \geqslant 0$.

**(d)** si $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, on a, pour $x \in ]-1, 1[$,

$$f'(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' \ln'\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} \times \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{-2}{(1+x)(1-x)}.$$

**Correction :**
**(a)** n'a pas de sens car $x^2$ n'est pas a priori une fonction (encore qu'on ne le sache pas de manière sûre puisque la variable $x$ n'a pas été proprement introduite). Un énoncé correct est : la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
**(b)** est correct.
**(c)** Il n'y a pas de relation d'ordre usuellement implicite dans $\mathbb{C}$. On ne peut donc pas affirmer qu'un nombre complexe est positif, sauf à exiger qu'il soit réel.
**(d)** est incorrect grammaticalement : l'écriture $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'$ prétend dériver le nombre réel $\frac{1-x}{1+x}$ et non une fonction. Cette écriture est en revanche tolérée dans la plupart des calculs, car elle permet d'éviter de faire des erreurs, mais cette tolérance n'est pas de droit opposable.

**Méthode 0.5 : Rajouter de la lisibilité en raisonnant en français**

Lorsqu'on écrit une première formule, cela peut être par exemple une hypothèse ou la conclusion désirée. Dans le premier cas, on l'introduit par « On a », dans le second, par « On veut montrer que ».
Lorsqu'on passe d'une formule à une autre, il peut y avoir un rapport d'équivalence (que l'on traduira par une expression comme *c'est-à-dire, i.e., si, et seulement si, ...*) ou d'implication (que l'on traduira par une expression comme *d*onc, alors, ainsi, par suite ...).
Sans ces indications, le raisonnement effectué peut être rejeté par le lecteur ou le correcteur !

**Exemple d'application**
**Un élève a produit le raisonnement suivant pour montrer que si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y} \in ]-1, 1[$, $\boldsymbol{\frac{x+y}{1+xy}} \in ]-1, 1[$. Complétez-le avec les phrases manquantes en français.**

$$\frac{x+y}{1+xy} < 1 \qquad x+y < 1+xy \qquad 1+xy-x-y > 0 \qquad (1-x)(1-y) > 0 \quad \text{OK}$$

$$\frac{x+y}{1+xy} > -1 \qquad x+y > -1-xy \qquad 1+xy+x+y > 0 \qquad (1+x)(1+y) > 0 \quad \text{OK}$$

**Correction :**
On souhaite montrer que $\dfrac{x+y}{1+xy} \in ]-1,1[$, il y a deux inégalités à montrer. La première inégalité souhaitée est $\dfrac{x+y}{1+xy} < 1$. Comme $1+xy > 0$, elle est équivalente à :

$$x+y < 1+xy \quad \text{i.e.} \quad 1+xy-x-y > 0 \quad \text{i.e.} \quad (1-x)(1-y) > 0.$$

Cette dernière inégalité est vraie puisque $x$ et $y$ sont dans $]-1,1[$, donc $1-x>0$ et $1-y>0$.
En remontant les équivalences, l'inégalité de départ $\dfrac{x+y}{1+xy} < 1$ est donc vraie.
La seconde inégalité souhaitée est $\dfrac{x+y}{1+xy} > -1$. Comme $1+xy > 0$, elle est équivalente à :

$$x+y > -1-xy \quad \text{i.e.} \quad 1+xy+x+y > 0 \quad \text{i.e.} \quad (1+x)(1+y) > 0.$$

Cette dernière inégalité est vraie puisque $x$ et $y$ sont dans $]-1,1[$, donc $1+x>0$ et $1+y>0$.
En remontant les équivalences, l'inégalité de départ $\dfrac{x+y}{1+xy} > -1$ est donc vraie.

En conclusion, on a bien $\dfrac{x+y}{1+xy} \in ]-1,1[$.

- Le terme *i.e.* est l'abréviation de la locution latine *id est* (« ce qui est », littéralement). On l'utilise souvent en mathématiques.
- Le symbole $\Leftrightarrow$ n'est pas correct lorsqu'on écrit un raisonnement. C'est un connecteur logique, non un connecteur d'inférence. Le mot *"donc"* lui est préférable.

**Méthode 0.6 : Attention en rédigeant une récurrence**

Pour montrer par récurrence $\forall n \in \mathbb{N} : \mathscr{P}(n)$ (qu'il convient de définir proprement), on commence par montrer $\mathscr{P}(0)$ (phase d'initialisation).
Ensuite, **le démon** (et non pas vous !) choisit un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, et **vous** devez montrer $\mathscr{P}(n+1)$ (phase d'hérédité).

**Exemple d'application**

**Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = 1+2+\cdots+n$ (avec $u_0 = 0$). Montrer que $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.**

**Correction :**
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$ : « $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ »
On a $u_0 = 0 = \dfrac{0 \times 1}{2}$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
« Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que »(pour abréger *"j'appelle n un entier que le démon m'impose maintenant tel que"*) $\mathscr{P}(n)$. Alors $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ par hypothèse de récurrence. Par suite,

$$u_{n+1} = u_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

donc $\mathscr{P}(n+1)$ est bien vérifiée, ce qui conclut la récurrence.

# Partie 1

# Techniques de calcul (semestre 1)

CHAPITRE

1

# Nombres complexes et trigonométrie

## L'essentiel du cours

### 1 Forme algébrique d'un nombre complexe

**Définition**

- On introduit un nombre dit imaginaire $i$ qui vérifie $i^2 = 1$.
- Un **nombre complexe** est un nombre de la forme $z = a + i\,b$, avec $a$ et $b \in \mathbb{R}$.
- $a$ est appelé la **partie réelle** de $z$ et est noté $\mathrm{Re}(z)$, $b$ est appelé la **partie imaginaire** de $z$ et est noté $\mathrm{Im}(z)$.

Cette définition a historiquement été posée pour donner des solutions à toutes les équations du second degré. En effet l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions complexes lorsque $\Delta < 0$ : $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

**Définition**

- Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + i\,b_2$, on pose :

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad \text{et} \quad z_1 \times z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).$$

- $z^n$ est défini par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ en posant $z^0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $z^{n+1} = z^n \times z$.
- Si $z = a + ib \neq 0$, on a $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$

• La définition de la multiplication se retrouve simplement en développant le produit et en utilisant la relation $i^2 = -1$.
• La définition de l'inverse se retrouve en multipliant le numérateur et le dénominateur de la fraction par $a - ib$, appelée quantité conjuguée de $z$.
• Tout nombre réel $a$ peut être vu sous la forme d'un nombre complexe avec $a = a + i\,0$.
• Les nombres de la forme $ia$, $a \in \mathbb{R}$, sont appelés **imaginaires purs**. L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.
• Si $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{Re}(az) = a\,\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(az) = a\,\mathrm{Im}(z)$.

Les formules $\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(zz') = \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z')$ sont fausses !

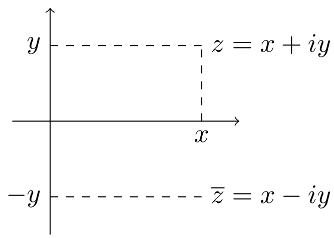
**Définition**

On considère le plan $\mathscr{P}$ usuel, muni d'un repère orthonormé direct. Si $M$ est un point (resp. $\overrightarrow{u}$ un vecteur) du plan de coordonnées $(x, y)$, on appelle **affixe** de $M$ (resp. de $\overrightarrow{u}$) le nombre complexe $x + i\,y$. On la note $z_M$ (resp. $z_{\overrightarrow{u}}$). On appelle image du nombre complexe $z = x + iy$ le point $M(x, y)$ du plan.

Ceci permet d'identifier l'ensemble des nombres complexes au plan usuel.

**Définition**

Le **conjugué** de $z$, noté $\overline{z}$ est le nombre $a - i\,b$.



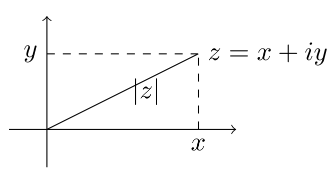

**Propriétés de la conjugaison**

- Si $z \in \mathbb{C}$, on a $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.
- Si $z \in \mathbb{C}$, on a $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$.
- Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (si $z_2 \neq 0$)
- $\overline{z_1^n} = (\overline{z_1})^n$

**Définition**

On appelle **module** du nombre complexe $z = a + i\,b$, et on note $|z|$ le réel $\sqrt{a^2 + b^2}$.



**Propriétés du module**

Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

- $z_1\overline{z_1} = |z_1|^2$
- $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ (si $z_2 \neq 0$)
- $|z_1^n| = |z_1|^n$

Si $z \in \mathbb{C}^*$, on calcule la forme algébrique de $\dfrac{1}{z}$ en multipliant en haut et en bas par $\overline{z}$, et en utilisant $z\overline{z} = |z|^2$.

**Inégalité triangulaire**

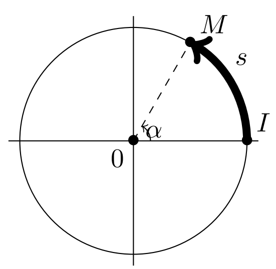
- Si $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ avec égalité si et seulement si $z_1 = 0$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_2 = \lambda z_1$.
- On a également $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$.

On ne peut pas comparer $|z_1 - z_2|$ et $|z_1| - |z_2|$ ! La seule chose qu'on puisse dire est que $|z_1 - z_2| \leqslant |z_1| + |-z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

## 2 Trigonométrie

**Définition**

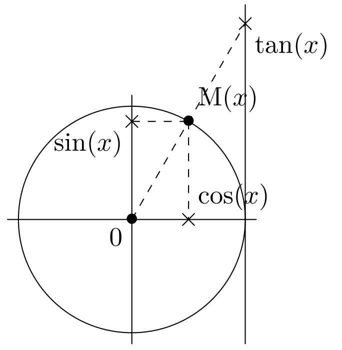
- On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre $O$ et de rayon 1. On munit ce cercle d'une orientation définissant le sens direct (par convention ce sens est inverse de celui des aiguilles d'une montre).
- Soit $M$ un point du cercle trigonométrique. On note $I$ le point de coordonnées $(1, 0)$, qui appartient au cercle trigonométrique. On considère un parcours entre $I$ et $M$ sur le cercle trigonométrique. La longueur de ce parcours est appelée une abscisse curviligne de $M$.
- Il existe une infinité de parcours allant de $I$ à $M$, et donc une infinité d'abscisses curvilignes de $M$. Tous les parcours diffèrent d'un nombre de tours entier du cercle trigonométrique, et un tour a pour longueur $2\pi$.
  Soit $s_1$ et $s_2$ deux abscisses curvilignes de $M$. On a : $\exists k \in \mathbb{Z},\ s_2 = s_1 + 2k\pi$. On dit que $s_1$ et $s_2$ sont congrus modulo $2\pi$ et on note $s_1 \equiv s_2\ [2\pi]$.
- Il est d'usage de choisir une représentation dite principale de $M$ dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.



**Définition**

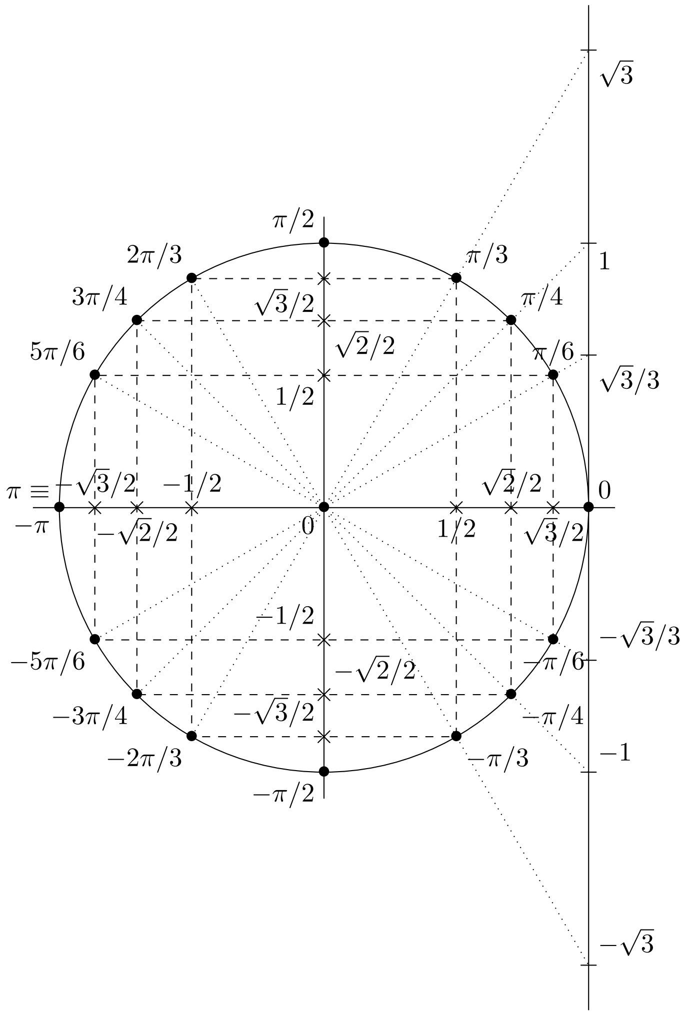
Soit $M(x)$ un point du cercle trigonométrique :

- le cosinus de x : $\cos x$ est l'abscisse de $M$ ;
- le sinus de x : $\sin x$ est l'ordonnée de $M$ ;
- la tangente de x : $\tan x$, lorsque cette définition a du sens (lorsque $x$ n'est pas congru à $\pi/2$ modulo $\pi$), est le rapport du sinus sur le cosinus. La tangente peut se lire comme l'ordonnée de l'intersection de la droite $(OM)$ avec la droite d'équation $x = 1$.




Le tableau et la figure qui suivent récapitulent les valeurs des angles usuels de cos , sin et tan :

| | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| cos | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |
| sin | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| tan | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | ND | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $0$ |




**Formules liées au théorème de Pythagore**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Le théorème de Pythagore permet d'affirmer que :

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $|\sin x| \leqslant |x|$.

## Formules liées aux symétries dans le cercle trigonométrique

| Transformée | cos | sin | tan |
|---|---|---|---|
| Symétrie d'axe $(Ox)$ | $\cos(-x) = \cos(x)$ | $\sin(-x) = -\sin(x)$ | $\tan(-x) = -\tan(x)$ |
| Symétrie d'axe $(Oy)$ | $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ | $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ | $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$ |
| Symétrie centrale | $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ | $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ | $\tan(\pi + x) = \tan(x)$ |
| Symétrie d'axe $y = x$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ | $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$ |

## Formules d'addition et soustraction de cos, sin et tan

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
- Lorsque $a + b$ n'est pas congru à $\pi/2$ modulo $\pi$, $\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.
- Lorsque $a - b$ n'est pas congru à $\pi/2$ modulo $\pi$, $\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

## Formules de duplication

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.
- Si $2x$ n'est pas congru à $\pi/2$ modulo $\pi$, $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2(x)}$.
- $\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$.
- $\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$ .

## 3 Forme exponentielle d'un nombre complexe

**Définition**

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\boldsymbol{e^{it}}$ le nombre complexe $\cos t + i \sin t$.

**Formules d'Euler**

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \cos t = \frac{\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}}{2} \quad \text{et} \quad \sin t = \frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2i}$$

**Formule de Moivre**

Pour $(t, u) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a

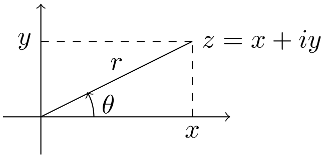
- $\overline{\mathrm{e}^{it}} = \mathrm{e}^{-it}$
- $\mathrm{e}^{i(t+u)} = \mathrm{e}^{it}\mathrm{e}^{iu}$
- $\mathrm{e}^{i(t-u)} = \dfrac{\mathrm{e}^{it}}{\mathrm{e}^{iu}}$
- $(\mathrm{e}^{it})^n = \mathrm{e}^{int}$

**Proposition**

- L'ensemble des $\mathrm{e}^{it}$, $t \in \mathbb{R}$ est l'ensemble noté $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.
- Si $z \in \mathbb{C}^*$, on peut écrire $z$ sous la forme $r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

**Définition**

- L'écriture de $z \in \mathbb{C}^*$ sous la forme $z = r\,(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, est appelée **forme trigonométrique** de $z$.
- L'écriture de $z \in \mathbb{C}^*$ sous la forme $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, est appelée **forme exponentielle** de $z$.
- $\theta$ est appelé un **argument** de $z$.




**Argument d'un nombre complexe**

Soit $z = a + i\,b \in \mathbb{C}^*$.

- Si $a = 0$, un argument de $z$ est $\dfrac{\pi}{2}$ si $z \in i\mathbb{R}_+^*$ $(b > 0)$, $-\dfrac{\pi}{2}$ si $z \in i\mathbb{R}_-^*$ $(b < 0)$.
- Sinon, un argument[1] de $z$ est $\arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)$ si $a > 0$, $\arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) + \pi$ si $a < 0$.

1. La fonction arctan sera définie au chapitre 3.

Un argument de $z$ n'est pas unique : si $\theta$ est un argument de $z$, les arguments de $z$ sont tous les $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, en d'autres termes tous les nombres congrus à $\theta$ modulo $2\pi$. La forme exponentielle en revanche est unique, au sens où si l'on change $\theta$ en un autre argument de $z$, $\mathrm{e}^{i\theta}$ est inchangé.

**Opérations sur les arguments**

Si $\theta_1$ est un argument de $z_1 \in \mathbb{C}^*$, $\theta_2$ un argument de $z_2 \in \mathbb{C}^*$, alors :

- un argument de $\overline{z_1}$ est $-\theta_1$,
- un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$ est $\theta_1 - \theta_2$,
- un argument de $z_1 \times z_2$ est $\theta_1 + \theta_2$,
- pour $n \in \mathbb{Z}$, un argument de $z_1^n$ est $n\theta_1$.

La forme exponentielle d'un nombre complexe est donc très pratique pour le calcul d'inverse ou de puissances.

**Proposition**

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, et si $A\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ est la forme trigonométrique de $a + ib$, alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ a\,\cos t + b\,\sin t = A\,\cos(t - \varphi).$$

En physique, si $a\,\cos t + b\,\sin t$ représente un signal sinusoïdal, $A$ est appelé son **amplitude** et $\varphi$ sa **phase**.

**Définition**

Si $z \in \mathbb{C}$, on note $\mathbf{e}^{\boldsymbol{z}}$ (ou $\mathbf{exp}(\boldsymbol{z})$) le nombre complexe

$$\mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}\,\mathrm{e}^{i\operatorname{Im} z} = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}(\cos(\operatorname{Im} z) + i\sin(\operatorname{Im} z)).$$

Le nombre complexe $\mathrm{e}^z$ est donné sous forme exponentielle : son module est $\mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}$ et $\operatorname{Im} z$ en est un argument.

**Propriétés de l'exponentielle complexe**

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ :

- $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1} \times \mathrm{e}^{z_2}$.
- $\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2}$ si et seulement si $z_1 - z_2 \in 2i\pi\mathbb{Z} = \{2ik\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

**Proposition**

- Si $a \in \mathbb{C}^*$, l'équation $\mathrm{e}^z = a$ a pour solutions les $\ln|a| + i(\theta + 2k\pi)$, où $\theta$ est un argument de $a$ et $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $a = 0$, l'équation $\mathrm{e}^z = a$ n'a pas de solution.

## 4 Équations algébriques

**Racines carrées**

Si $z \in \mathbb{C}^*$, $z$ admet deux racines carrées dans $\mathbb{C}$, qui sont $\pm\sqrt{|z|}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$, où $\theta$ est un argument de $z$.

La notation $\sqrt{x}$ est réservée à un réel $x$ positif !

**Définition**

Si $a\,z^2 + b\,z + c = 0$ est une équation du second degré à coefficients $a$, $b$, $c \in \mathbb{C}$ (et $a \neq 0$), on appelle **discriminant** de l'équation le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

**Résolution de l'équation du second degré**

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$, on considère l'équation $a\,z^2 + bz + c = 0$ de discriminant $\Delta$.

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution $z = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux solutions qui sont $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$, avec $\delta$ une racine carrée de $\Delta$.

**Relations coefficients/racines**

On considère l'équation $a\,z^2 + bz + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$. $r_1$ et $r_2$ sont les solutions de l'équation (avec la convention $r_1 = r_2$ si le discriminant est nul) si et seulement si

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad r_1 r_2 = \frac{c}{a}.$$

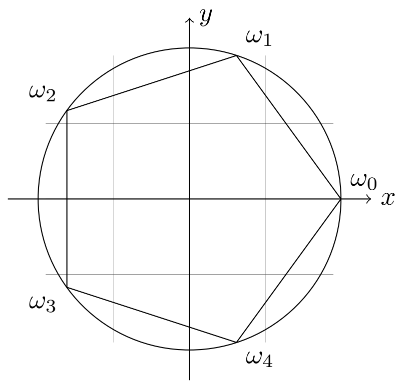
**Définition**

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **racine n-ième de l'unité** un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n$-ièmes de l'unité.

**Énumération de $\mathbb{U}_n$**

Il existe précisément $n$ racines $n$-ièmes de l'unité qui sont les $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$.

- En particulier, les $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ sont deux à deux distincts, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.
- On peut prendre $[\![1, n]\!]$ ou tout autre ensemble de $n$ entiers consécutifs à la place de $[\![0, n-1]\!]$.
- La somme des racines $n$-ièmes de l'unité vaut 0 pour $n \geqslant 2$.
- Les affixes des racines $n$-ièmes de l'unité forment un polygone régulier à $n$ côtés.




Représentation graphique des racines 5-ièmes de l'unité : $\omega_i = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}$.

**Équation $z_1^n = z_2^n$.**

Si $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, on a $z_1^n = z_2^n$ si et seulement si $z_1 = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} z_2$, $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Ceci est la généralisation de $z_1^2 = z_2^2$ si et seulement si $z_1 = \pm z_2$.

**Racine $n$-ième d'un nombre complexe**

Si $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ est un nombre complexe (avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$), une racine $n$-ième de $z$ est $z_1 = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}}$. Les racines $n$-ièmes de $z$ sont alors les $z_1\,\mathrm{e}^{2ik\pi/n}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$.

## ■ 5 Nombres complexes et géométrie

| Propriété géométrique | Interprétation en complexes |
|---|---|
| Distance $AB$ | $\lvert z_B - z_A \rvert$ |
| Cercle de centre $O$ et de rayon $r$ | Ensemble des nombres complexes $z$ tels que $\lvert z - z_O \rvert = r$ |
| Disque de centre $O$ et de rayon $r$ | Ensemble des nombres complexes $z$ tels que $\lvert z - z_O \rvert \leqslant r$ |
| Angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ | Argument de $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ |
| $A$, $B$ et $C$ alignés | $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$ |
| $ABC$ rectangle en $A$ | $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$ |
| Translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ | $z \mapsto z + z_{\overrightarrow{u}}$ |
| Homothétie de centre $A$ et de rapport $k$ | $z \mapsto z_A + k(z - z_A)$ |
| Rotation de centre $A$ et d'angle $\theta$ | $z \mapsto z_A + \mathrm{e}^{i\theta}(z - z_A)$ |
| Symétrie par rapport à l'axe des abscisses | $z \mapsto \overline{z}$ |

# Les méthodes à maîtriser

**Méthode 1.1 : Savoir mettre un nombre complexe sous forme trigonométrique**

- Dans les cas simples, on divise $z = a + i\,b$ par son module, en espérant reconnaître des valeurs usuelles de cos et sin.
- Sinon on utilise les formules $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ (si $a > 0$) ou $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\pi$ (si $a < 0$).

**Exemple d'application**

**Mettre sous forme trigonométrique $1 - i$ et $3 + 4i$.**

(1) On note $z = 1 - i$. On calcule $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ donc

$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

(2) On note $z = 3 + 4i$. On calcule $|z| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$. En divisant par le module, on trouve $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$, qui ne sont pas des valeurs usuelles de cos et sin. On applique donc la formule générale, et un argument de $z$ est $\arctan\left(\frac{4}{3}\right)$.

Voir exercices **1.1** et **1.3**.

**Méthode 1.2 : Transformer une expression du type $A\cos t + B\sin t$ en $\rho\cos(t-\varphi)$**

On cherche à factoriser l'expression $a\cos\theta + b\sin\theta$ avec $(a, b, \theta)$ trois réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.
Le principe consiste à factoriser l'expression par $\sqrt{a^2+b^2}$. On a alors :

$$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(\theta) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(\theta)$$

On pose $c = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $s = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. On a alors $c^2 + s^2 = 1$ donc $c \in [-1, 1]$ et $s \in [-1, 1]$.
En reconnaissant $c$ comme un angle remarquable (ou en posant $c = \arccos(\varphi)$ au chapitre 3), on a $\sin^2(\varphi) = 1 - \cos^2(\varphi) = 1 - c^2 = s^2$, donc $\sin(\varphi)$ vaut $s$ ou $-s$.
L'expression peut donc s'écrire sous la forme $\cos(\varphi)\cos(\theta) + \sin(\varphi)\sin(\theta)$ ou $\cos(\varphi)\cos(\theta) - \sin(\varphi)\sin(\theta)$ et, grâce aux formules de somme de cosinus, peut se mettre sous la forme $\cos(\theta - \varphi)$ ou $\cos(\theta + \varphi)$.

**Exemple d'application**

**Mettre sous forme $\rho\cos(t-\varphi)$ l'expression $2\cos x + 2\sin x$.**

On factorise l'expression par $\rho = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. On a alors ($x$ étant un réel quelconque) :

$2\cos x\ +\ 2\sin x\ =\ 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)\ =\ 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x\right)\ =$ $2\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

**Méthode 1.3 : Savoir calculer les puissances d'un nombre complexe**

Pour calculer les puissances élevées d'un nombre complexe, on utilise sa forme exponentielle. La formule de Moivre permet alors de simplifier le calcul.

**Exemple d'application**

**Calculer le nombre $(1-i)^{2023}$.**

On a vu dans l'exemple précédent que $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, ainsi

$$\begin{aligned}(1-i)^{2023} &= (\sqrt{2})^{2023}\mathrm{e}^{-i\frac{2023\pi}{4}} = 2^{1011}\sqrt{2}\mathrm{e}^{-505i\pi-\frac{3i\pi}{4}} = -2^{1011}\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{3i\pi}{4}}\\ &= -2^{1011}\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2^{1011}(1+i)\end{aligned}$$

Pour simplifier le résultat, on a effectué la division euclidienne de 2023 par 4 : $2023=4\times505+3$.

Voir exercice **1.5**.

**Méthode 1.4 : Savoir factoriser une expression du type $\mathrm{e}^{ip}\pm\mathrm{e}^{iq}$**

Lorsqu'on a une expression du type $\mathrm{e}^{ip}\pm\mathrm{e}^{iq}$, on met en facteur $\mathrm{e}^{\frac{i(p+q)}{2}}$ pour faire apparaître une formule d'Euler. La cas le plus souvent rencontré est lorsque $p=0$ (expressions $1+\mathrm{e}^{ix}$ ou $1-\mathrm{e}^{ix}$). Cela permet de factoriser des expressions du type $\cos p+\cos q$ ou $\sin p+\sin q$, en prenant la partie réelle ou la partie imaginaire.

**Exemple d'application**

**Factoriser $1+\mathrm{e}^{ix}$ et $\sin p+\sin q$.**

(1) Pour $x\in\mathbb{R}$, on a $1+\mathrm{e}^{ix}=\mathrm{e}^{\frac{ix}{2}}(\mathrm{e}^{-\frac{ix}{2}}+\mathrm{e}^{\frac{ix}{2}})=2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{ix}{2}}$.

(2) Pour $p$ et $q\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\sin p+\sin q &= \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{ip}+\mathrm{e}^{iq}) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\frac{i(p+q)}{2}}(\mathrm{e}^{\frac{i(p-q)}{2}}+\mathrm{e}^{\frac{i(q-p)}{2}})\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\frac{i(p+q)}{2}}2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\right) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\end{aligned}$$

Voir exercices **1.5**, **1.7** et **1.13**.

**Méthode 1.5 : Savoir calculer les racines carrées d'un nombre complexe**

• Dans les cas où l'on connaît la formule trigonométrique de $z$ (par exemple si $z$ est réel ou imaginaire pur), on part de cette forme, on prend la racine carrée du module et on divise un argument par 2.

• Dans tous les autres cas, on cherche une racine carrée de $z = a + i\,b$ sous la forme $\delta = x + i\,y$.

**1.** On développe $\delta^2 = z$ et on identifie parties réelle et imaginaire.
**2.** On ajoute l'équation $x^2 + y^2 = |\delta|^2 = |z|$ et on trouve les valeurs de $x^2$ et $y^2$.
**3.** On obtient alors quatre solutions. On en élimine deux en gardant celles dont les signes respectent l'équation $2xy = b$.

**Exemple d'application**

**Calculer les racines carrées de $-7i$ et $2 + i$.**

- $z = -7i$ est un imaginaire pur, sa forme trigonométrique est $z = 7\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$. Ses racines carrées sont donc
$$\pm\sqrt{7}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} = \pm\left(\frac{\sqrt{14}}{2} - \frac{\sqrt{14}}{2}i\right).$$
- D'après la méthode, on cherche les racines carrées de $z = 2 + i$ sous la forme $\delta = x + i\,y$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
**1.** On veut $\delta^2 = z$ i.e.
$$2 + i = (x + i\,y)^2 = x^2 + 2xy\,i - y^2 \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ 2xy = 1 \end{cases}$$
**2.** On ajoute l'équation $x^2 + y^2 = |\delta|^2 = |z| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{5} \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{2+\sqrt{5}}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{5}-2}{2} \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-2}{2}} \end{cases}$$
**3.** Enfin, l'équation $2xy = 1 > 0$ nous dit que $x$ et $y$ doivent être de même signe. Il vient donc
$$\delta = \pm\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\,i\right).$$

➔ Voir exercices **1.6** et **1.11**.

**Méthode 1.6 : Savoir résoudre une équation du second degré**

Pour résoudre une équation du second degré à coefficients complexes, on calcule le discriminant de l'équation, puis, s'il est non nul, une racine carrée de ce discriminant (en suivant la méthode précédente). On utilise ensuite les formules du cours.

**Exemple d'application**

**Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (1 - i)\,z - \dfrac{2+3i}{4} = 0$.**

Le discriminant $\Delta$ de cette équation vaut
$$\Delta = (1-i)^2 - 4\left(-\frac{2+3i}{4}\right) = -2i + 2 + 3i = 2 + i.$$

On a calculé dans l'exemple précédent les racines carrées de $2+i$. Les solutions de l'équation sont donc

$$\frac{-1+i}{2} \pm \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\,i\right).$$

Voir exercices **1.6**, **1.8** et **1.11**.

**Méthode 1.7 : Savoir exploiter les relations coefficients/racines**

Si l'on cherche deux nombres $x$ et $y$ dont on connaît le produit $p$ et la somme $s$, il faut résoudre l'équation $z^2 - s\,z + p = 0$. Si ses solutions sont $r_1$ et $r_2$, alors $(x,y) = (r_1, r_2)$ ou $(x,y) = (r_2, r_1)$.

**Exemple d'application**

**Résoudre le système** $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x+y=3} \\ \boldsymbol{xy=2} \end{array}\right.$ **.**

D'après les relations coefficients-racines, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ce système équivaut à $x$ et $y$ solutions de $z^2 - 3z + 2 = 0$. Cette équation a pour discriminant $9-8=1$ et pour solutions $\dfrac{3+1}{2} = 2$ et $\dfrac{3-1}{2} = 1$. Ainsi le système a pour solutions $(2,1)$ et $(1,2)$.

Voir exercices **1.8** et **1.12**.

**Méthode 1.8 : Savoir extraire les racines $n$-ièmes d'un nombre complexe**

Pour extraire les racines $n$-ièmes ($n \geqslant 3$) d'un nombre complexe $z$, il faut impérativement passer par la forme trigonométrique de $z$ : $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$.

1. Une racine $n$-ième de $z$ est $z_1 = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\frac{i\theta}{n}}$.
2. Les racines $n$-ièmes de $z$ s'obtiennent ensuite en multipliant $z_1$ par les racines $n$-ièmes de l'unité.

**Exemple d'application**

**Calculer les racines cubiques de $8i$.**

On a $8i = 8\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$ donc une racine cubique de $8i$ est $2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$. Les racines cubiques de $8i$ sont donc

$$2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} = 1 + i\sqrt{3}, \qquad 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} \times \mathrm{e}^{2i\pi/3} = 2\mathrm{e}^{5i\frac{\pi}{6}} = -1 + i\sqrt{3}$$
$$\text{et} \quad 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} \times \mathrm{e}^{4i\pi/3} = 2\mathrm{e}^{9i\frac{\pi}{6}} = 2e^{3i\frac{\pi}{2}} = -2i.$$

Voir exercice **1.6**.

**Méthode 1.9 : Savoir résoudre une équation simple de degré $n$**

Pour résoudre une équation de degré $n$, sans indication particulière, on essaie de se ramener à une équation du type $z_1^n = z_2^n$, que l'on résout en $z_1 = z_2\,\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$.

**Exemple d'application**

**Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$.**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Cette équation équivaut à $(z+1)^n = (z-1)^n$, i.e. $z+1 = (z-1)\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$. Cette dernière équation équivaut ensuite à $z(1-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}) = -1-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Si $k=0$, on obtient $0=-2$, ce qui est impossible. Si $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq 1$ et on obtient

$$z = -\frac{1+\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}(\mathrm{e}^{-\frac{ik\pi}{n}} + \mathrm{e}^{-\frac{ik\pi}{n}})}{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}(\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}} - \mathrm{e}^{-\frac{ik\pi}{n}})} = \frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}.$$

On obtient ainsi $n-1$ solutions, les $\dfrac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Voir exercice **1.7**.

**Méthode 1.10 : Savoir montrer un fait géométrique avec les nombres complexes**

Les nombres complexes sont un outil très puissant pour la géométrie. En utilisant le tableau de la section 5 du cours, on interprète les hypothèses et le résultat à montrer en termes d'affixes, et on tente d'arriver à une preuve par un calcul.
Pour simplifier les calculs, choisir un repère orthonormé adapté au problème considéré !

**Exemple d'application**

**Montrer le théorème de Pythagore : le triangle $ABC$ est rectangle en $A$ si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$.**

On se place dans un repère orthonormé centré en $A$. L'affixe de $A$ dans ce repère est donc 0, on note $b$ celle de $B$ et $c$ celle de $C$. L'hypothèse $ABC$ rectangle en $A$ se traduit par $\dfrac{c}{b}$ imaginaire pur. L'hypothèse $BC^2 = AB^2 + AC^2$ se traduit par $|c-b|^2 = |c|^2 + |b|^2$. On calcule :

$$|c-b|^2 = (c-b)(\overline{c-b}) = c\bar{c} - b\bar{c} - c\bar{b} + b\bar{b} = |c|^2 + |b|^2 - 2\,\mathrm{Re}(c\bar{b})$$

puisque $b\bar{c}$ est le conjugué de $c\bar{b}$. Ainsi $BC^2 = AB^2 + AC^2$ si et seulement si $\mathrm{Re}(c\bar{b}) = 0$, si et seulement si $c\bar{b}$ est imaginaire pur. Or $\dfrac{c}{b} = \dfrac{1}{|b|^2} c\bar{b}$, donc $c\bar{b}$ est imaginaire pur si et seulement si $c\bar{b}$ l'est.
Ainsi, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ si et seulement si $\dfrac{c}{b}$ est imaginaire pur, si et seulement si $ABC$ est rectangle en $A$.

Voir exercices **1.4**, **1.9**, **1.13** et **1.14**.