Jean-Marie Monier | Guillaume Haberer

MATHS PCSI - PTSI

MÉTHODES & EXERCICES

7e édition

DUNOD

Les auteurs tiennent à exprimer leur gratitude à leurs nombreux collègues qui ont accepté de réviser des parties du manuscrit :

Marc Albrecht, Bruno Arsac, Jean-Philippe Berne, Jacques Blanc, Gérard Bourgin, Sophie Cohéléach, Carine Courant, Sylvain Delpech, Hermin Durand, Jean Feyler, Viviane Gaggioli, Marguerite Gauthier, Daniel Genoud, André Laffont, Cécile Lardon, Hadrien Larôme, Ibrahim Rihaoui, René Roy, Philippe Saadé, Marie-Dominique Siéfert, Marie-Pascale Thon, Audrey Verdier.

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

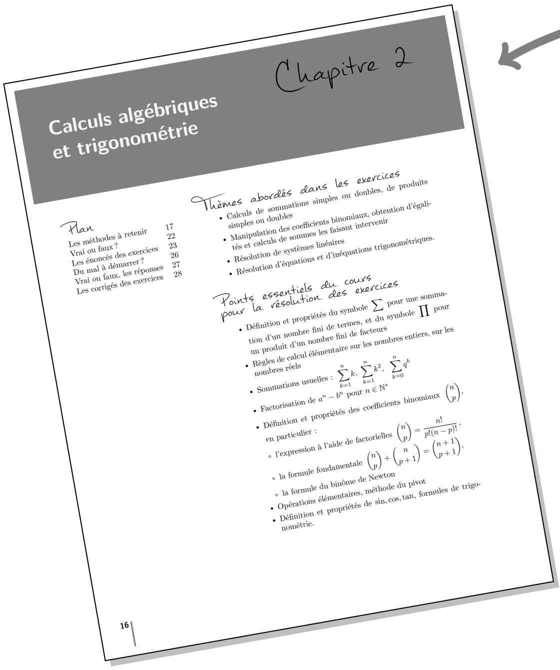
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-086242-9

Table des matières

Compléments en ligne

Des compléments en ligne, disponibles sur la page de présentation de l'ouvrage du site de Dunod, `https://dunod.com/EAN/9782100862429`, vous donnent accès à des exercices de colles entièrement corrigés.

Pour bien utiliser cet ouvrage


Chapitre 2

Calculs algébriques et trigonométrie

Plan

Les méthodes à retenir	17
Vrai ou faux ?	22
Les énoncés des exercices	23
Du mal à démarrer ?	26
Vrai ou faux, les réponses	27
Les corrigés des exercices	28

Thèmes abordés dans les exercices

- Calculs de sommations simples ou doubles, de produits simples ou doubles
- Manipulation des coefficients binomiaux, obtention d'égalités et calculs de sommes les faisant intervenir
- Résolution de systèmes linéaires
- Résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques.

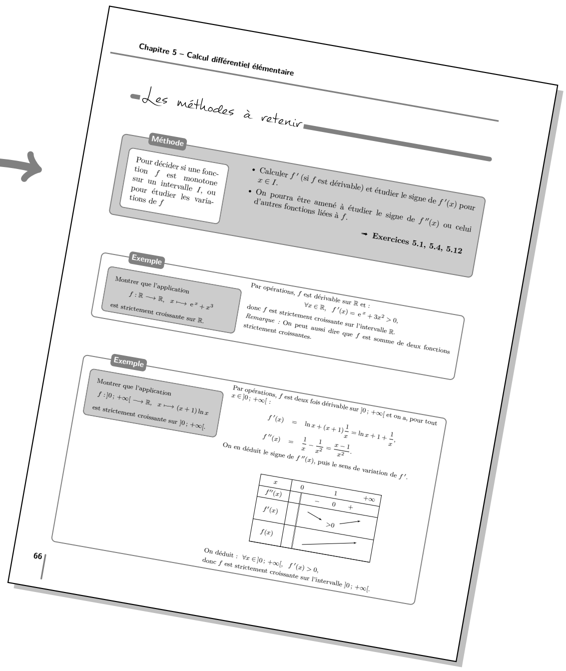
Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés du symbole $\sum$ pour une sommation d'un nombre fini de termes, et du symbole $\prod$ pour un produit d'un nombre fini de facteurs
- Règles de calcul élémentaire sur les nombres entiers, sur les nombres réels
- Sommations usuelles : $\sum_{k=1}^{n} k,\ \sum_{k=1}^{n} k^2,\ \sum_{k=0}^{n} q^k$
- Factorisation de $a^n - b^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- Définition et propriétés des coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$, en particulier :
  - l'expression à l'aide de factorielles $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$,
  - la formule fondamentale $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$,
  - la formule du binôme de Newton
- Opérations élémentaires, méthode du pivot
- Définition et propriétés de sin, cos, tan, formules de trigonométrie.

16

La page d'entrée de chapitre

Elle propose un plan du chapitre, les thèmes abordés dans les exercices, ainsi qu'un rappel des points essentiels du cours pour la résolution des exercices.


Chapitre 5 – Calcul différentiel élémentaire

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour décider si une fonction f est monotone sur un intervalle I, ou pour étudier les variations de f

- Calculer f' (si f est dérivable) et étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in I$.
- On pourra être amené à étudier le signe de $f''(x)$ ou celui d'autres fonctions liées à f.

➥ Exercices 5.1, 5.4, 5.12

Exemple

Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto e^x + x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par opérations, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x + 3x^2 > 0$, donc f est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

Remarque : On peut aussi dire que f est somme de deux fonctions strictement croissantes.

Exemple

Montrer que l'application $f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto (x+1)\ln x$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Par opérations, f est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \ln x + (x+1)\frac{1}{x} = \ln x + 1 + \frac{1}{x},$$
$$f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}.$$

On en déduit le signe de $f''(x)$, puis le sens de variation de f'.

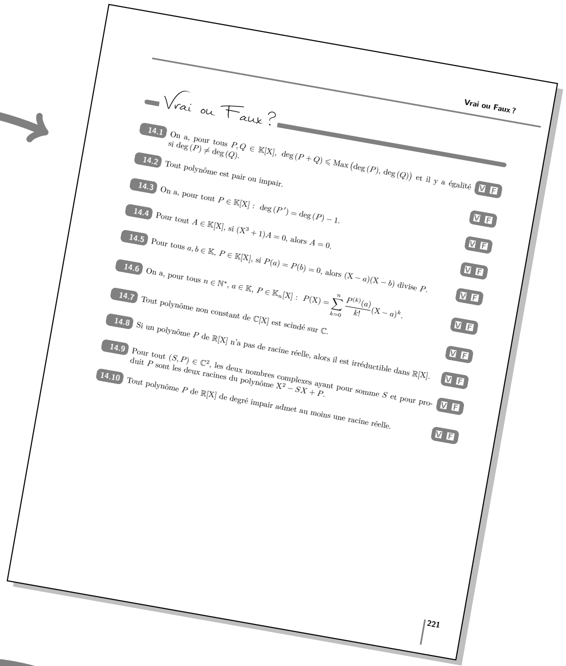
x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		↘	>0	↗	
$f(x)$			↗		

On déduit : $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

66

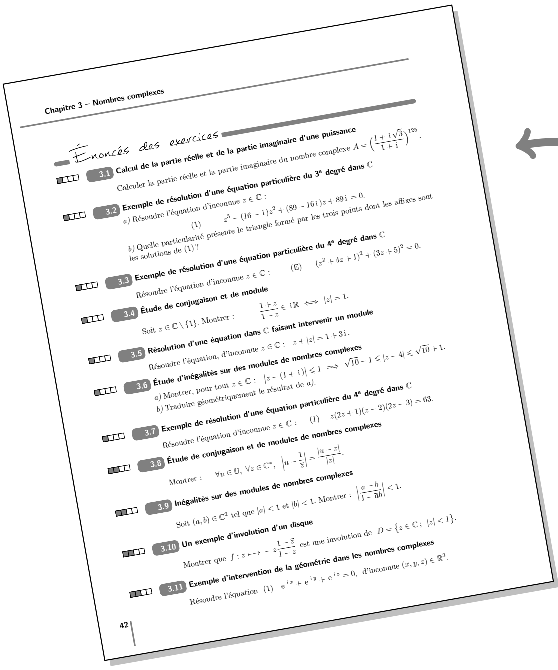
Les méthodes à retenir

Cette rubrique constitue une synthèse des principales méthodes à connaître, détaillées étape par étape, et indique les exercices auxquels elles se rapportent.
Chaque méthode est illustrée par un ou deux exemples qui la suivent.



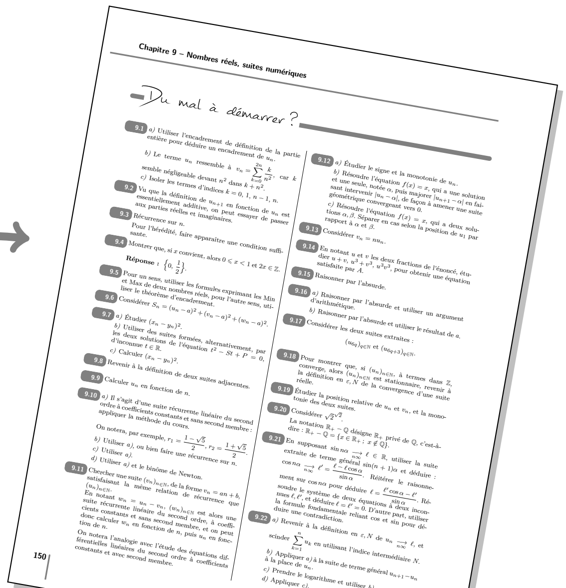
Vrai ou Faux ?

Dix questions pour vérifier la bonne compréhension du cours.



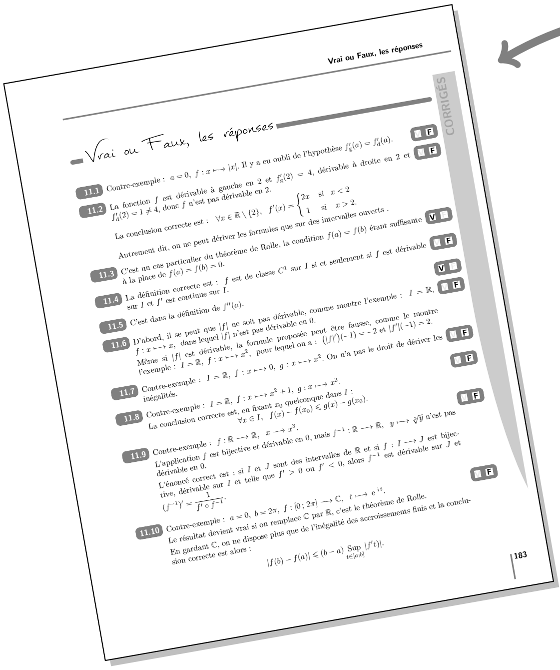
Énoncés des exercices

De nombreux exercices de difficulté croissante sont proposés pour s'entraîner. La difficulté de chaque exercice est indiquée sur une échelle de 1 à 4.



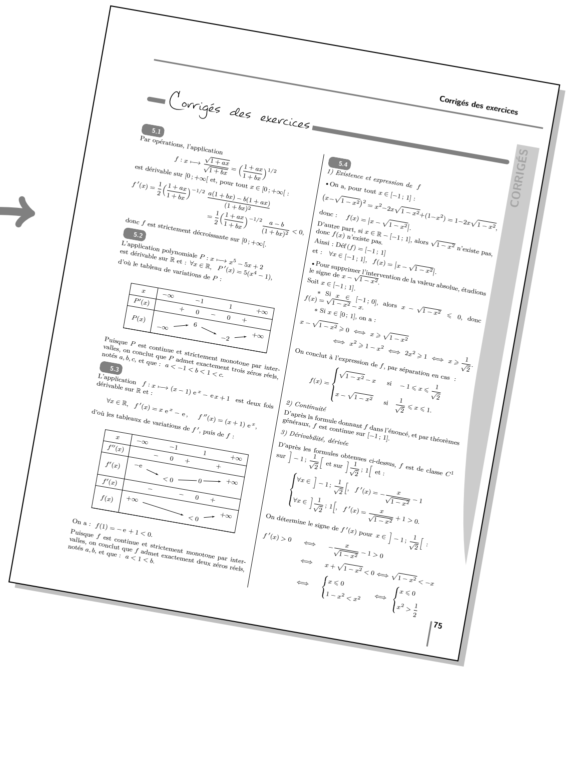
Du mal à démarrer ?

Des conseils méthodologiques sont proposés pour bien aborder la résolution des exercices.



Vrai ou Faux, les réponses

Chaque affirmation vraie est justifiée par une référence au cours ou une courte démonstration, et chaque affirmation fausse est réfutée par la production d'un contre-exemple explicite.



Corrigés des exercices

Tous les exercices sont corrigés de façon détaillée.

Chapitre 1

Raisonnement, vocabulaire ensembliste

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Mise en œuvre, sur des exemples simples, des différents types de raisonnement
- Égalités et inclusions d'ensembles obtenus par opérations sur des parties d'un ensemble
- Injectivité, surjectivité, bijectivité
- Image directe, image réciproque d'une partie par une application.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés des opérations entre ensembles, $\cap$, $\cup$, complémentaire, $\setminus$
- Définition de la fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble
- Définition du produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles
- Définition et propriétés de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité pour les applications
- Définition de l'image directe, de l'image réciproque d'une partie par une application.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour travailler de manière générale sur des ensembles

Essayer de passer par les éléments des ensembles, ou de calculer globalement sur les ensembles. La deuxième voie est en général plus courte et plus claire (si elle est praticable).

➟ **Exercices 1.1, 1.2, 1.6, 1.7, 1.13 à 1.15**

Exemple

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer :

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C).$$

Partons du côté apparemment le plus compliqué :

$$\begin{aligned}(A \cap B) \setminus (A \cap C) &= (A \cap B) \cap \left(\overline{A \cap C}\right)\\ &= (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})\\ &= (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C})\\ &= A \cap B \cap \overline{C}\\ &= A \cap (B \cap \overline{C})\\ &= A \cap (B \setminus C).\end{aligned}$$

Remarque : On pouvait aussi partir du premier membre.

Méthode

Pour établir une égalité d'ensembles

Essayer de :

- soit montrer directement l'égalité
- soit montrer deux inclusions : $A \subset B$ et $B \subset A$
- soit utiliser les fonctions indicatrices des parties d'un ensemble.

➟ **Exercices 1.2, 1.6, 1.7, 1.10, 1.15**

Dans chacune des deux premières options, on essaie de passer par les éléments ou de calculer globalement sur les ensembles.

Exemple

Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer :

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C).$$

On a :

$$\begin{aligned}(A \setminus B) \cup (A \setminus C) &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C})\\ &= A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})\\ &= A \cap \overline{B \cap C}\\ &= A \setminus (B \cap C).\end{aligned}$$

Exemple

Montrer :

$$\{y \in \mathbb{R}\,;\ \exists x \in [-1\,;\,2],\ \ y = x^2\} = [0\,;\,4].$$

- Soit $y \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $x \in [-1\,;\,2]$ tel que $y = x^2$.

Si $x \in [-1\,;\,0]$, alors $y \in [0\,;\,1]$.
Si $x \in [0\,;\,2]$, alors $y \in [0\,;\,4]$.
On déduit $y \in [0\,;\,4]$.

Ceci montre que le premier ensemble est inclus dans le second.

- Réciproquement, soit $y \in [0\,;\,4]$.

En notant $x = \sqrt{y}$, on a $x \in [0\,;\,2] \subset [-1\,;\,2]$ et $y = x^2$.

Ceci montre que le second ensemble est inclus dans le premier.

On conclut à l'égalité demandée.

Méthode

Pour montrer, par récurrence (faible), qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geqslant n_0$

Montrer que :

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*)
- pour tout entier n fixé tel que $n \geqslant n_0$, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (*hérédité*).

➟ **Exercice 1.5**

Exemple

On considère la suite de Fibonacci $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\phi_0 = 0,\ \phi_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n.$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n = (-1)^n.$$

Initialisation :
Pour $n = 0$, on a : $\phi_1^2 - \phi_2\phi_0 = 1^2 - 1 \cdot 0 = 1 = (-1)^0$,
donc la formule est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que la formule soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\phi_{n+2}^2 - \phi_{n+3}\phi_{n+1} &= \phi_{n+2}^2 - (\phi_{n+2} + \phi_{n+1})\phi_{n+1} \\
&= (\phi_{n+2}^2 - \phi_{n+2}\phi_{n+1}) - \phi_{n+1}^2 \\
&= \phi_{n+2}(\phi_{n+2} - \phi_{n+1}) - \phi_{n+1}^2 \\
&= \phi_{n+2}\phi_n - \phi_{n+1}^2 \\
&= -(\phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n) \\
&= -(-1)^n \ = \ (-1)^{n+1},
\end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n + 1$.

Ceci montre, par récurrence, que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode

Pour montrer, par récurrence à deux pas, qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geqslant n_0$

Montrer que :

- $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0 + 1)$ sont vraies (*initialisation*)
- pour tout entier n fixé tel que $n \geqslant n_0$, si $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie (*hérédité*).

Exemple

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}.$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 0.$$

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1 > 0$, et, pour $n = 2$, on a $u_2 = \dfrac{u_1 + u_0}{2} = \dfrac{1}{2} > 0$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$ et pour $n = 2$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour n et $n+1$, où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé. On a donc $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$, d'où $\dfrac{u_{n+1} + u_n}{2} > 0$, donc la propriété est vraie pour $n+2$.

Ceci montre, par récurrence à deux pas, que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Méthode

Pour montrer, par récurrence forte, qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geqslant n_0$

Montrer que :

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*)
- pour tout entier n fixé tel que $n \geqslant n_0$, si $\mathcal{P}(n_0), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (*hérédité*).

➟ **Exercice 1.9**

Exemple

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{u_1 + u_2^2 + \cdots + u_n^n}{n^n}.$$

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < u_n \leqslant 1$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a bien $0 < u_1 \leqslant 1$ car $u_1 = 1$.

Hérédité : Supposons, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, que l'on ait :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad 0 < u_k \leqslant 1.$$

On a alors : $u_{n+1} = \dfrac{u_1 + u_2^2 + \cdots + u_n^n}{n^n} > \dfrac{0 + \cdots + 0}{n^n} = 0$

et $u_{n+1} = \dfrac{u_1 + u_2^2 + \cdots + u_n^n}{n^n} \leqslant \dfrac{1 + \cdots + 1}{n^n} = \dfrac{n}{n^n} = \dfrac{1}{n^{n-1}} \leqslant 1$.

Ceci montre, par récurrence forte : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < u_n \leqslant 1$.

Méthode

Pour résoudre une question portant sur injectivité, surjectivité, bijectivité, d'applications dans un cadre général

Essayer de :

- utiliser les définitions et les propositions du cours sur la composée de deux applications injectives (resp. surjectives)
- utiliser le résultat de l'exercice classique 1.11 (en le redémontrant).

➟ **Exercices 1.3, 1.11, 1.12**

Exemple

Soient E un ensemble, $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Montrer que f est bijective et que :

$$f^{-1} = f.$$

⋆ • *Injectivité :* Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.

On a alors :

$$x_1 = (f \circ f)(x_1) = f\big(f(x_1)\big) = f\big(f(x_2)\big) = (f \circ f)(x_2) = x_2.$$

Ceci montre que f est injective.

• *Surjectivité :* Soit $y \in E$.

On a : $y = (f \circ f)(y) = f\big(f(y)\big)$, donc il existe $x \in E$ (on peut prendre $x = f(y)$) tel que $y = f(x)$. Ceci montre que f est surjective.

On conclut que f est bijective.

⋆ Puisque f est bijective, on peut utiliser f^{-1} et on a :

$$f^{-1} = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_E = f^{-1} \circ (f \circ f) = (f^{-1} \circ f) \circ f = \mathrm{Id}_E \circ f = f.$$

Méthode

Pour manipuler, dans un cadre général, des images directes, des images réciproques de parties par des applications

Appliquer les définitions.

Pour $f : E \longrightarrow F,\ A \in \mathcal{P}(E),\ A' \in \mathcal{P}(F)$, on a :

$$f(A) = \big\{y \in F\,;\, \exists\, a \in A,\quad y = f(x)\big\},$$

$$f^{-1}(A') = \big\{x \in E\,;\ f(x) \in A'\big\}.$$

Autrement dit :

pour tout $y \in F$: $\quad y \in f(A) \iff \big(\exists\, a \in A,\quad y = f(a)\big)$

et, pour tout $x \in E$: $\quad x \in f^{-1}(A') \iff f(x) \in A'$.

➟ **Exercices 1.13, 1.14**

Exemple

Soient E, F deux ensembles, une application $f : E \longrightarrow F$ et $A' \in \mathcal{P}(F)$.

Montrer :

$$f^{-1}\Big(\overline{A'}\Big) = \overline{f^{-1}(A')}.$$

On a, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Big(\overline{A'}\Big) &\iff f(x) \in \overline{A'} \\ &\iff f(x) \notin A' \\ &\iff \text{Non } \big(f(x) \in A'\big) \\ &\iff \text{Non } \big(x \in f^{-1}(A')\big) \\ &\iff x \in \overline{f^{-1}(A')}, \end{aligned}$$

d'où l'égalité voulue.

Vrai ou Faux ?

1.1 Pour toutes parties A, B d'un ensemble E, on a : $A \cap B = \varnothing \iff B \subset \overline{A}$. V F

1.2 Pour toutes parties A, B d'un ensemble E, on a : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. V F

1.3 $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\quad x \leqslant y$. V F

1.4 $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad x \leqslant y$. V F

1.5 Si les applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont injectives, alors l'application $g \circ f$ est injective. V F

1.6 Si l'application composée $g \circ f$ est injective, alors f et g sont injectives. V F

1.7 Si une application $f : E \longrightarrow E$ vérifie $f \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors f est bijective et $f^{-1} = f$. V F

1.8 Si une application $f : E \longrightarrow E$ vérifie $f \circ f = f$, alors $f = \mathrm{Id}_E$. V F

1.9 Soient E, F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, A, B des parties de E. On a alors : V F

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

1.10 Soient E, F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, A, B des parties de E. On a alors : V F

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Énoncés des exercices

1.1 Exemple de calcul ensembliste : inclusion

Soient E un ensemble, A, B, $C \in \mathcal{P}(E)$.

a) Montrer : $(A \cup B) \cap C \subset A \cup (B \cap C)$.

b) Établir qu'il y a égalité dans l'inclusion précédente si et seulement si : $A \subset C$.

1.2 Exemple de calcul ensembliste : équivalence entre deux égalités

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer :

$$A \cup B = A \cup C \iff A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}.$$

1.3 Exemple d'une restriction bijective

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par : $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$.

a) Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté a, n'ayant pas d'image par f.

b) Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté b, n'ayant pas d'antécédent par f.

c) Montrer que la restriction g de f à $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ au départ et à $\mathbb{R} \setminus \{b\}$ à l'arrivée est bijective, et préciser l'application réciproque g^{-1} de g.

1.4 Exemple de calcul de composée de deux applications

On note $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = 1 + x, \qquad g(x) = x^2.$$

Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

1.5 Exemple de raisonnement par récurrence (faible)

On considère la suite de Lucas $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n.$$

Montrer, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $L_{n+1}^2 - L_n L_{n+2} = 5(-1)^{n+1}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_k^2 = L_n L_{n+1} + 2$

c) $L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n$ et $L_{2n+1} = L_n L_{n+1} - (-1)^n$.

1.6 Réunion ou intersection de produits cartésiens

Soient E, F deux ensembles, A_1, A_2 des parties de E, B_1, B_2 des parties de F.

a) Montrer : $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

b) 1) Montrer : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1$.

2) A-t-on nécessairement : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$?

1.7 Équivalence entre trois assertions faisant intervenir des différences ensemblistes

Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

Montrer que les trois assertions suivantes sont deux à deux équivalentes :

$$(1)\ \ A \setminus B = A, \qquad (2)\ \ B \setminus A = B, \qquad (3)\ \ A \cap B = \varnothing.$$

1.8 Applications : composition, injectivité, surjectivité

Soient E, F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications.

a) Montrer que, si $f \circ g \circ f = f$ et si f est injective, alors g est surjective.

b) Montrer que, si $g \circ f \circ g = g$ et si g est surjective, alors f est injective.

1.9 Exemple de raisonnement par récurrence forte

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!(n-k)!}.$$

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{Q}_+^*$.

1.10 Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble

Soit E un ensemble.

On rappelle que, pour toute $A \in \mathcal{P}(E)$, la fonction indicatrice de A est l'application

$$\mathbf{1}_A : E \longmapsto \{0,1\}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin A \\ 1 & \text{si} \quad x \in A. \end{cases}$$

On note 1 l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0,1\}$ constante égale à 1.

a) Montrer, pour toutes $A, B \in \mathcal{P}(E)$:

$$A = B \iff \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B, \qquad \mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A,$$
$$\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \qquad \mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B, \qquad \mathbf{1}_{A\setminus B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B.$$

b) En déduire, pour toutes $A, B \in \mathcal{P}(E)$: $A \cap (A \cup B) = A$ et $A \cup (A \cap B) = A$.

1.11 Composée injective, composée surjective

Soient E, F, G des ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications. Montrer :

a) si $g \circ f$ est injective, alors f est injective

b) si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective

c) si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

1.12 Conséquences de la bijectivité d'une certaine composée

Soient E, F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow E$ des applications.

On suppose que $g \circ f \circ g$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

On pourra utiliser le résultat de l'exercice 1.11.

1.13 Images directes de parties par une application

Soient E, E' deux ensembles, $f : E \longrightarrow E'$ une application. Montrer, pour toutes parties A, B de E :

a) $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$

b) $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$

c) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

d) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

1.14 Images réciproques de parties par une application

Soient E, E' deux ensembles, $f : E \longrightarrow E'$ une application. Montrer, pour toutes parties A', B' de E :

a) $A' \subset B' \implies f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$

b) $f\big(f^{-1}(A')\big) \subset A'$

c) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$

d) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.

1.15 Différence symétrique, associativité

Soit E un ensemble. On note, pour toutes parties A, B de E :

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)},$$

appelée *différence symétrique* de A et B.

a) Deux exemples : Déterminer $A \vartriangle B$ dans les deux exemples suivants :

1) $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$

2) $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty\,; 2]$, $B = [1\,; +\infty[$.

b) Établir : $\forall (A, B) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2, \ A \vartriangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

c) Montrer, pour tout $(A, B) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2$: $\mathbf{1}_{A \vartriangle B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

d) En déduire que la loi $\vartriangle$ est associative dans $\mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire :

$$\forall (A, B, C) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^3, \ (A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C).$$

Du mal à démarrer ?

1.1 *a)* Utiliser la distributivité de $\cap$ sur $\cup$.

b) Séparer l'équivalence logique en deux implications.

1.2 *Première méthode :*

Raisonner par équivalences logiques en passant aux complémentaires.

Deuxième méthode :

Supposer $A \cup B = A \cup C$.

$\star$ Partir d'un élément quelconque x de $A \cup \overline{B}$ et raisonner par l'absurde, pour déduire $x \in A \cup \overline{C}$.

$\star$ L'autre inclusion s'en déduit en échangeant B et C.

1.3 *a)* $a = 2$. *b)* $b = 3$.

c) À partir de $y = f(x)$, calculer x en fonction de y.

1.4 Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$, et trouver un $x \in \mathbb{R}$ tel que ces deux résultats soient différents.

1.5 Récurrence (faible) sur n, pour chacune des trois questions.

Pour *c)*, utiliser *a)*.

1.6 *a)* Raisonner par équivalences logiques successives, en partant de $(a, b) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$.

b) 1) Même méthode qu'en *a)*.

2) Envisager un élément de $A_1 \times B_2$.

1.7 Raisonner par équivalences logiques successives en utilisant, entre autres : $A \subset \overline{B} \iff A \cap B = \varnothing$.

1.8 *a)* Partir d'un élément x de E, considérer $f(x)$ et déduire $x = (g\big(f(x)\big)$.

b) Partir de $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$, utiliser la surjectivité de g, puis $g = g \circ f \circ g$, et déduire $x_1 = x_2$.

1.9 Récurrence forte sur n.

1.10 *a)* • Un sens est évident.

Réciproquement, supposer $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$ et partir d'un élément quelconque a de A, pour montrer $A \subset B$.

• Pour $x \in E$, séparer en cas : $x \in A$, $x \notin A$.

• Pour $x \in E$, séparer encore en cas : $x \in A \cap B$, $x \notin A \cap B$.

• Passer aux complémentaires à partir du résultat précédent.

• Utiliser les résultats précédents.

b) Calculer $\mathbf{1}_{A \cap (A \cup B)}$ et $\mathbf{1}_{A \cup (A \cap B)}$.

1.11 *a)* Revenir aux définitions.

b) Revenir aux définitions.

c) Se déduit directement de *a)* et *b)*.

1.12 Appliquer le résultat de l'exercice 1.11, en groupant en $(g \circ f) \circ g$ ou en $g \circ (f \circ g)$.

1.13 *a)* Supposer $A \subset B$.

Partir d'un élément quelconque y de $f(A)$ et utiliser la définition de l'image directe d'une partie de E par f.

b) Partir de $a \in A$ et utiliser les définitions.

c) • Montrer, en utilisant *a)* :

$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B).$$

• Réciproquement, partir de $y \in f(A \cup B)$ et utiliser la définition de l'image directe d'une partie de E par f.

d) Utiliser *a)*.

1.14 *a)* Supposer $A' \subset B'$.

Partir d'un éléments quelconque x de $f^{-1}(A')$ et utiliser la définition de l'image réciproque d'une partie de F par f.

b) Partir de $y \in f\big(f^{-1}(A')\big)$ et utiliser les définitions.

c) Raisonner par équivalences logiques successives en partant de $x \in f^{-1}(A' \cup B')$ et en appliquant les définitions.

d) Raisonner par équivalences logiques successives en partant de $x \in f^{-1}(A' \cap B')$ et en appliquant les définitions.

1.15 *a)* **Réponses** :

1) $A \vartriangle B = \{2, 3\}$,

2) $A \vartriangle B =]-\infty\,; 1[\cup]2\,; +\infty[$.

b) Calculer $A \vartriangle B$ d'après sa définition, en utilisant les formules sur le calcul sur les ensembles.

c) Utiliser *b)* et les formules sur les fonctions caractéristiques (cf. Exercice 1.10).

En particulier, pour tous ensembles X, Y :

$$\mathbf{1}_{\overline{X}} = 1 - \mathbf{1}_X, \quad \mathbf{1}_{X \cap Y} = \mathbf{1}_X \mathbf{1}_Y,$$
$$\mathbf{1}_{X \cup Y} = \mathbf{1}_X + \mathbf{1}_Y - \mathbf{1}_X \mathbf{1}_Y.$$

d) Calculer les fonctions caractéristiques des deux membres.

Vrai ou Faux, les réponses

1.1 $B \subset \overline{A} \iff (\forall x \in B,\ \ x \notin A) \iff \big(\text{Non } (\exists\, x \in B,\ \ x \in A)\big)$
$\iff \big(\text{Non}\,(A \cap B \neq \varnothing)\big) \iff A \cap B = \varnothing.$ **V**

1.2 Contre-exemple : $E = \{1, 2\},\ A = \{1\},\ B = \{2\}$.
La formule correcte est : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. **F**

1.3 Par exemple, $y = x + 1$. **V**

1.4 Il n'existe pas de réel y fixé plus grand que tout réel x. **F**

1.5 C'est un résultat du cours. **V**

1.6 Contre-exemple : $E = F = G = \mathbb{R},\ f : x \longmapsto \mathrm{e}^{x},\ g : y \longmapsto |y|$.
On a alors $g \circ f : x \longmapsto |\,\mathrm{e}^{x}| = \mathrm{e}^{x},\ \ g \circ f$ est injective, mais g ne l'est pas. **F**

1.7 L'application f est injective, car, pour tout $(x_1, x_2) \in E^2$, si $f(x_1) = f(x_2)$, alors $f\big(f(x_1)\big) = f\big(f(x_2)\big)$, donc $x_1 = x_2$. **V**

L'application f est surjective car, pour tout $y \in E$, on a $y = f\big(f(y)\big)$.

Il en résulte que f est bijective, puis, en composant à gauche par f^{-1}, on obtient $f = f^{-1}$.

1.8 Contre-exemple : $E = \mathbb{R},\ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto 0$. **F**

1.9 Soit $y \in f(A \cup B)$. Il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. On a alors $x \in A$ d'où $f(x) \in A$, ou $x \in B$ d'où $f(x) \in f(B)$, et donc : $f(x) \in f(A) \cup f(B)$. On obtient $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. **V**

Réciproquement, soit $y \in f(A) \cup f(B)$. On a $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$. Si $y \in f(A)$, alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$, d'où $x \in A \cup B$ et $y = f(x)$, donc $y \in f(A \cup B)$. De même, si $y \in f(B)$, on déduit $y \in f(A \cup B)$. On obtient $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

Par double inclusion, on conclut : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

1.10 Contre-exemple : $E = F = \mathbb{R},\ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto x^2,\ A = \mathbb{R}_-,\ B = \mathbb{R}_+$. **F**
On a alors : $A \cap B = \{0\},\ f(A \cap B) = \{0\},\ f(A) = \mathbb{R}_+,\ f(B) = \mathbb{R}_+,\ f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_+$.

Corrigés des exercices

1.1

a) On a, par distributivité de $\cap$ sur $\cup$:

$$(A \cup B) \cap C = (\underbrace{A \cap C}_{\subset A}) \cup (B \cap C) \subset A \cup (B \cap C).$$

b) • Supposons $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.

Soit $x \in A$.

Alors, $x \in A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, donc $x \in C$.

Ceci montre : $A \subset C$.

• Réciproquement, supposons $A \subset C$.

On a alors, par distributivité de $\cap$ sur $\cup$:

$$(A \cup B) \cap C = (\underbrace{A \cap C}_{=A}) \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C).$$

On conclut qu'il y a égalité dans l'inclusion obtenue en *a)* si et seulement si $A \subset C$.

1.2

En appliquant la première implication avec $(\overline{B}, \overline{C})$ à la place de (B, C), on obtient la seconde implication.

Il suffit donc de montrer la première implication.

• *Première méthode : par les ensembles, globalement*

On a :
$$\begin{aligned}
& A \cup B = A \cup C \\
\Longrightarrow\ & \overline{A \cup B} = \overline{A \cup C} \\
\Longrightarrow\ & \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A} \cap \overline{C} \\
\Longrightarrow\ & A \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = A \cup (\overline{A} \cap \overline{C}) \\
\Longrightarrow\ & (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B}) = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{C}) \\
\Longrightarrow\ & A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}.
\end{aligned}$$

• *Deuxième méthode, par les éléments*

On suppose $A \cup B = A \cup C$.

⋆ Soit $x \in A \cup \overline{B}$. Alors $x \in A$ ou $x \in \overline{B}$.

Si $x \in A$, alors $x \in A \cup \overline{C}$.

Supposons $x \notin A$, donc $x \in \overline{B}$.

Raisonnons par l'absurde : supposons $x \notin A \cup \overline{C}$.

Alors, $x \in \overline{A \cup \overline{C}} = \overline{A} \cap C$, donc $x \in C$,

puis $x \in A \cup C$, donc $x \in A \cup B$, contradiction avec $x \notin A$ et $x \notin B$.

Ce raisonnement par l'absurde montre : $x \in A \cup \overline{C}$,
et on a donc établi l'inclusion $A \cup \overline{B} \subset A \cup \overline{C}$.

⋆ Par rôles symétriques de B et C dans l'égalité d'hypothèse $A \cup B = A \cup C$, on a alors aussi l'autre inclusion, d'où l'égalité.

1.3

a) Il est clair que : $a = 2$.

b) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{2\}) \times \mathbb{R}$. On a :

$$y = f(x) \iff y = \frac{3x-1}{x-2} \iff xy - 2y = 3x - 1$$
$$\iff xy - 3x = 2y - 1 \iff (y-3)x = 2y - 1.$$

Si $y \neq 3$, on a : $y = f(x) \iff x = \dfrac{2y-1}{y-3}$

donc y admet un antécédent et un seul par f, qui est $\dfrac{2y-1}{y-3}$.

Si $y = 3$, alors : $y = f(x) \iff 0x = 5$,

donc y n'a pas d'antécédent par f.

Il existe donc un réel et un seul, $b = 3$, n'ayant pas d'antécédent par f.

c) L'application $g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}, \quad x \longmapsto \dfrac{3x-1}{x-2}$

est la restriction de f à $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ au départ et à $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ à l'arrivée.

On a, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{2\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{3\})$:

$$y = g(x) \iff y = \frac{3x-1}{x-2} \iff x = \frac{2y-1}{y-3}.$$

Ainsi, tout élément y de l'arrivée admet un antécédent et un seul par g, donc g est bijective, et l'application réciproque de g est : $g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad y \longmapsto \dfrac{2y-1}{y-3}$.

1.4

• On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2) = 1 + x^2 \\ (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(1+x) = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2. \end{cases}$$

• Par exemple : $(f \circ g)(1) = 2$ et $(g \circ f)(1) = 4$,
donc : $f \circ g \neq g \circ f$.

1.5

a) • *Initialisation :*

Pour $n = 0$, on a :

$$L_{n+1}^2 - L_n L_{n+2} = L_1^2 - L_0 L_2 = 1^2 - 2 \cdot 3 = -5$$

et
$$5(-1)^{n+1} = -5,$$

donc la formule est vraie pour $n = 0$.

• *Hérédité :*

Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned}
& L_{n+2}^2 - L_{n+1}L_{n+3} \\
= \; & L_{n+2}^2 - L_{n+1}(L_{n+2}+L_{n+1}) \\
= \; & (L_{n+2}^2 - L_{n+1}L_{n+2}) - L_{n+1}^2 \\
= \; & L_{n+2}(L_{n+2}-L_{n+1}) - L_{n+1}^2 \\
= \; & L_{n+2}L_n - L_{n+1}^2 \\
= \; & -(L_{n+1}^2 - L_nL_{n+2}) \\
= \; & -\big(5(-1)^{n+1}\big) \; = \; 5(-1)^{n+2},
\end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n+1$.

Ceci montre, par récurrence sur n, que la formule proposée est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) • *Initialisation :*

Pour $n = 0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_k^2 = L_0^2 = 2^2 = 4,$

et : $L_nL_{n+1} + 2 = L_0L_1 + 2 = 2 \cdot 1 + 2 = 4,$

donc la formule est vraie pour $n = 0$.

• *Hérédité :*

Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} L_k^2 &= \Big(\sum_{k=0}^{n} L_k^2\Big) + L_{n+1}^2 \\
&= (L_nL_{n+1}+2) + L_{n+1}^2 \\
&= (L_nL_{n+1} + L_{n+1}^2) + 2 \\
&= L_{n+1}(L_n + L_{n+1}) + 2 \; = \; L_{n+1}L_{n+2} + 2,
\end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n+1$.

Ceci montre, par récurrence sur n, que la formule proposée est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) • *Initialisation :*

Pour $n = 0$: $\begin{cases} L_{2n} = L_0 = 2 \\ L_n^2 - 2(-1)^n = 2^2 - 2 = 2 \end{cases}$

et $\begin{cases} L_{2n+1} = L_1 = 1 \\ L_nL_{n+1} - (-1)^n = 2\cdot 1 - 1 = 1, \end{cases}$

donc la formule (système de deux formules) est vraie pour $n = 0$.

• *Hérédité :*

Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned}
L_{2n+2} &= L_{2n+1} + L_{2n} \\
&= \big(L_nL_{n+1} - (-1)^n\big) + \big(L_n^2 - 2(-1)^n\big) \\
&= (L_nL_{n+1} + L_n^2) - 3(-1)^n \\
&= L_n(L_{n+1} + L_n) - 3(-1)^n \\
&= L_nL_{n+2} - 3(-1)^n \\
&= \big(L_{n+1}^2 - 5(-1)^{n+1}\big) - 3(-1)^n \\
&= L_{n+1}^2 + 2(-1)^n \\
&= L_{n+1}^2 - 2(-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& L_{2n+3} = L_{2n+2} + L_{2n+1} \\
= \; & \big(L_{n+1}^2 - 2(-1)^{n+1}\big) + \big(L_nL_{n+1} - (-1)^n\big) \\
= \; & L_{n+1}\big(L_{n+1} + L_n\big) - (-1)^{n+1} \\
= \; & L_{n+1}L_{n+2} - (-1)^{n+1},
\end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n+1$.

Ceci montre, par récurrence sur n, que la formule proposée est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.6

a) On a, pour tout $(a,b) \in E \times F$:

$$\begin{aligned}
& (a,b) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \\
\iff \; & \big((a,b) \in A_1 \times B_1 \;\text{ et }\; (a,b) \in A_2 \times B_2\big) \\
\iff \; & \big(a \in A_1 \;\text{ et }\; b \in B_1\big) \;\text{ et }\; \big(a \in A_2 \;\text{ et }\; b \in B_2\big) \\
\iff \; & \big(a \in A_1 \;\text{ et }\; a \in A_2\big) \;\text{ et }\; \big(b \in B_1 \;\text{ et }\; b \in B_2\big) \\
\iff \; & \big(a \in A_1 \cap A_2 \;\text{ et }\; b \in B_1 \cap B_2\big) \\
\iff \; & (a,b) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2),
\end{aligned}$$

donc : $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

b) 1) On a, pour tout $(a,b) \in E \times F$:

$$\begin{aligned}
& (a,b) \in (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) \\
\iff \; & \big((a,b) \in A_1 \times B_1 \;\text{ ou }\; (a,b) \in A_2 \times B_1\big) \\
\iff \; & \big((a \in A_1 \;\text{ ou }\; a \in A_2) \;\text{ et }\; b \in B_1\big) \\
\iff \; & \big(a \in A_1 \cup A_2 \;\text{ et }\; b \in B_1\big) \\
\iff \; & (a,b) \in (A_1 \cup A_2) \times B_1,
\end{aligned}$$

donc : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1$.

2) L'ensemble $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$ contient, entre autres, les couples (a,b) où $a \in A_1$ et $b \in B_2$, et ces couples ne sont pas nécessairement dans $A_1 \times B_1$ ou $A_2 \times B_2$.

Donnons un contre-exemple.

Notons $E = F = \{0,1\}$, $A_1 = B_1 = \{0\}$, $A_2 = B_2 = \{0,1\}$.

On a alors : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = \{(0,0)\} \cup \{(1,1)\}$

et $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = \{0,1\} \times \{0,1\}$
$= \big\{(0,0),\, (0,1),\, (1,0),\, (1,1)\big\}$.

Ainsi, $(0,1)$ est dans le premier ensemble et non dans le second.

On conclut qu'en général il n'y a pas égalité entre les deux ensembles envisagés.

1.7

On a :

$$A \backslash B = A \iff A \cap \overline{B} = A \iff A \subset \overline{B} \iff A \cap B = \varnothing,$$

et, de même :

$$B \backslash A = B \iff B \cap \overline{A} = B \iff B \subset \overline{A} \iff B \cap A = \varnothing,$$

d'où les équivalences logiques entre les trois assertions.

1.8

a) On suppose $f \circ g \circ f = f$ et f injective.

Soit $x \in E$.

On a : $f(x) = (f \circ g \circ f)(x) = f\big(g \circ f(x)\big)$.

Comme f est injective, on déduit :

$$x = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

Cela montre que g est surjective.

b) On suppose $g \circ f \circ g = g$ et g surjective.

Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

Puisque g est surjective, il existe $y_1, y_2 \in F$ tels que :

$$x_1 = g(y_1) \quad \text{et} \quad x_2 = g(y_2).$$

On a alors :

$$x_1 = g(y_1) = (g \circ f \circ g)(y_1) = g\Big(f\big(g(y_1)\big)\Big) = g\big(f(x_1)\big)$$
$$= g\big(f(x_2)\big) = (g \circ f \circ g)(y_2) = g(y_2) = x_2,$$

et on conclut que f est injective.

1.9

Puisque u_{n+1} est donné (entre autres) en fonction de $u_0, ..., u_n$, on va effectuer un raisonnement par récurrence forte.

• *Initialisation :*

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \in \mathbb{Q}_+^*$.

• *Hérédité :*

Supposons, pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé : $u_0, ..., u_n \in \mathbb{Q}_+^*$.

Comme $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!(n-k)!}$, que $u_0, ..., u_n$ sont dans $\mathbb{Q}_+^*$ et que $0!, 1!, ..., n!$ sont dans $\mathbb{N}^*$, par opérations, on déduit : $u_{n+1} \in \mathbb{Q}_+^*$.

On conclut, par récurrence forte sur n : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{Q}_+^*$.

1.10

a) • Il est clair que, si $A = B$, alors $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.

Réciproquement, supposons $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.

Pour tout $a \in A$, on a $\mathbf{1}_B(a) = \mathbf{1}_A(a) = 1$, donc $a \in B$, ce qui montre $A \subset B$, puis, de même, $B \subset A$, donc $A = B$.

On conclut : $A = B \iff \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.

Autrement dit, la connaissance de $\mathbf{1}_A$ détermine entièrement A.

• On a, pour tout $x \in E$:
si $x \in A$, alors $x \notin \overline{A}$, donc $\mathbf{1}_A(x) = 1$ et $\mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 0$, d'où $\mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$
si $x \notin A$, alors $x \in \overline{A}$, donc $\mathbf{1}_A(x) = 0$ et $\mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 1$, d'où $\mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$.

Ceci montre : $\forall x \in E, \quad \mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$.

On conclut : $\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$.

• On a, pour tout $x \in E$:

si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$, donc $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = 1$, $\mathbf{1}_A(x) = 1$, $\mathbf{1}_B(x) = 1$, d'où $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$

si $x \notin A \cap B$, alors $x \notin A$ ou $x \notin B$, donc $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = 0$ et $\big(\mathbf{1}_A(x) = 0 \text{ ou } \mathbf{1}_B(x) = 0\big)$, d'où $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$.

Ceci montre : $\forall x \in E, \quad \mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$.

On conclut : $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

• On a, en passant par des complémentaires et en utilisant des résultats précédents :

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{A \cup B} &= 1 - \mathbf{1}_{\overline{A \cup B}} \\
&= 1 - \mathbf{1}_{\overline{A} \cap \overline{B}} \\
&= 1 - \mathbf{1}_{\overline{A}}\mathbf{1}_{\overline{B}} \\
&= 1 - (1 - \mathbf{1}_A)(1 - \mathbf{1}_B) \\
&= 1 - (1 - \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B) \\
&= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B.
\end{aligned}$$

• On a :

$$\mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_{A \cap \overline{B}} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_{\overline{B}} = \mathbf{1}_A(1 - \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B.$$

b) On a, pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

$$\mathbf{1}_{A \cap (A \cup B)} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B)$$
$$= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A,$$

donc, d'après *a)* : $A \cap (A \cup B) = A$.

De même :

$$\mathbf{1}_{A \cup (A \cap B)} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{A \cap B} - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_{A \cap B}$$
$$= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A,$$

donc, d'après *a)* : $A \cup (A \cap B) = A$.

On peut aussi remarquer que, puisque $A \subset A \cup B$, on a $A \cap (A \cup B) = A$, et que, puisque $A \cap B \subset A$, on a $A \cup (A \cap B) = A$.

1.11

a) Supposons $g \circ f$ injective.

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. On a alors :

$$g \circ f(x_1) = g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) = g \circ f(x_2).$$

Puisque $g \circ f$ est injective, il s'ensuit : $x_1 = x_2$.

On conclut que f est injective.

b) Supposons $g \circ f$ surjective.

Soit $z \in G$. Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que : $z = g \circ f(x)$.

On a alors : $\quad z = g\big(f(x)\big)$ et $f(x) \in F$.

Ceci montre : $\forall z \in G, \ \exists y \in F, \quad z = g(y)$.

On conclut que g est surjective.

c) Si $g \circ f$ est bijective, alors $g \circ f$ est injective et surjective, donc, d'après *a)* et *b)*, f est injective et g est surjective.

1.12

Schématiquement, en utilisant le résultat de l'exercice 1.11, on a :

$$g \circ f \circ g \text{ bijective} \iff \begin{cases} g \circ f \circ g \text{ injective} \\ g \circ f \circ g \text{ surjective} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (g \circ f) \circ g \text{ injective} \\ g \circ (f \circ g) \text{ surjective} \end{cases} \implies \begin{cases} g \text{ injective} \\ g \text{ surjective} \end{cases}$$

$$\implies g \text{ bijective} .$$

Ceci montre que g est bijective.

On peut donc considérer l'application réciproque g^{-1} de g. On a alors : $\quad f = g^{-1} \circ (g \circ f \circ g) \circ g^{-1}$,
qui est la composée de trois applications bijectives, donc f est bijective.

Finalement, f et g sont bijectives.

1.13

a) Supposons $A \subset B$.

Soit $y \in f(A)$. Il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$.
Comme $a \in A \subset B$, on a $a \in B$, puis $y = f(a) \in f(B)$.

On obtient : $f(A) \subset f(B)$.

b) Soit $a \in A$. On a : $f(a) \in f(A)$, donc par définition d'une image réciproque, $a \in f^{-1}\big(f(A)\big)$.

On conclut : $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.

c) • En utilisant *a)* :

$$\begin{cases} A \subset A \cup B \\ B \subset A \cup B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(A) \subset f(A) \cup f(B) \\ f(B) \subset f(A) \cup f(B) \end{cases}$$
$$\Longrightarrow f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B).$$

• Soit $y \in f(A \cup B)$.
Il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.
On a : $x \in A$ ou $x \in B$.
Si $x \in A$, alors $f(x) \in f(A) \subset f(A) \cup f(B)$.
Si $x \in B$, alors $f(x) \in f(B) \subset f(A) \cup f(B)$.

On a donc : $f(x) \in f(A) \cup f(B)$.

Ceci montre : $\forall(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

On conclut : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

d) En utilisant *a)* :

$$\begin{cases} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(A \cap B) \subset f(A) \\ f(A \cap B) \subset f(B) \end{cases}$$
$$\Longrightarrow f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

1.14

a) Supposons $A' \subset B'$.

Soit $x \in f^{-1}(A')$.
On a $f(x) \in A'$, donc $f(x) \in B'$, puis $x \in f^{-1}(B')$.

On conclut : $\qquad f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$.

b) Soit $y \in f\big(f^{-1}(A')\big)$.
Il existe $x \in f^{-1}(A')$ tel que $y = f(x)$.
Puis, comme $x \in f^{-1}(A')$, on a $f(x) \in A'$, donc $y \in A'$.

On conclut : $\qquad f\big(f^{-1}(A')\big) \subset A'$.

c) On a, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}(A' \cup B') \\ \iff\ & f(x) \in A' \cup B' \\ \iff\ & \big(f(x) \in A' \quad \text{ou} \quad f(x) \in B'\big) \\ \iff\ & \big(x \in f^{-1}(A') \quad \text{ou} \quad x \in f^{-1}(B')\big) \\ \iff\ & x \in f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B'). \end{aligned}$$

On conclut : $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$.

d) On a, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}(A' \cap B') \\ \iff\ & f(x) \in A' \cap B' \\ \iff\ & \big(f(x) \in A' \quad \text{et} \quad f(x) \in B'\big) \\ \iff\ & \big(x \in f^{-1}(A') \quad \text{et} \quad x \in f^{-1}(B')\big) \\ \iff\ & x \in f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B'). \end{aligned}$$

On conclut : $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.

1.15

a) 1) Pour $E = \{1,2,3,4\}$, $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$, on a :

$$A \cup B = \{1,2,3\}, \quad A \cap B = \{1\},$$
$$\overline{A \cap B} = \{2,3,4\}, \quad A \vartriangle B = \{2,3\}.$$

2) Pour $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty\,;2]$, $B = [1\,;+\infty[$, on a :

$$A \cup B = \mathbb{R}, \quad A \cap B = [1\,;2],$$
$$\overline{A \cap B} =]-\infty\,;1[\cup]2\,;+\infty[, \quad A \vartriangle B =]-\infty\,;1[\cup]2\,;+\infty[.$$

b) On a, pour tout $(A,B) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2$:

$$\begin{aligned} A \vartriangle B &= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}). \end{aligned}$$

c) On a, pour tout $(A,B) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2$:

$$\mathbf{1}_{A \vartriangle B} = \mathbf{1}_{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\overline{B}} + \mathbf{1}_B \mathbf{1}_{\overline{A}} - \underbrace{\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\overline{B}} \mathbf{1}_B \mathbf{1}_{\overline{A}}}_{=0}$$
$$= \mathbf{1}_A(1 - \mathbf{1}_B) + \mathbf{1}_B(1 - \mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B.$$

d) Soit $(A,B,C) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^3$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{(A \vartriangle B) \vartriangle C} &= \mathbf{1}_{A \vartriangle B} + \mathbf{1}_C - 2 \cdot \mathbf{1}_{A \vartriangle B} \mathbf{1}_C \\ &= (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) + \mathbf{1}_C - 2 \cdot (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B)\mathbf{1}_C \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A \mathbf{1}_C + \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C) + 4 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C. \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A \vartriangle (B \vartriangle C)} &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{B \vartriangle C} - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{B \vartriangle C} \\ &= \mathbf{1}_A + (\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2 \cdot \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C) - 2 \cdot \mathbf{1}_A(\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2 \cdot \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C) \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A \mathbf{1}_C + \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C) + 4 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C. \end{aligned}$$

Ceci montre : $\qquad \mathbf{1}_{(A \vartriangle B) \vartriangle C} = \mathbf{1}_{A \vartriangle (B \vartriangle C)}$.

On déduit : $\qquad (A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C)$,
et on conclut que la loi $\vartriangle$ est associative dans $\mathcal{P}(E)$.

Chapitre 2

Calculs algébriques et trigonométrie

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Calculs de sommations simples ou doubles, de produits simples ou doubles
- Manipulation des coefficients binomiaux, obtention d'égalités et calculs de sommes les faisant intervenir
- Résolution de systèmes linéaires
- Résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés du symbole $\sum$ pour une sommation d'un nombre fini de termes, et du symbole $\prod$ pour un produit d'un nombre fini de facteurs
- Règles de calcul élémentaire sur les nombres entiers, sur les nombres réels
- Sommations usuelles : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k,\ \sum_{k=1}^{n} k^2,\ \sum_{k=0}^{n} q^k$
- Factorisation de $a^n - b^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- Définition et propriétés des coefficients binomiaux $\dbinom{n}{p}$, en particulier :
  - l'expression à l'aide de factorielles $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$,
  - la formule fondamentale $\dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1} = \dbinom{n+1}{p+1}$,
  - la formule du binôme de Newton
- Opérations élémentaires, méthode du pivot
- Définition et propriétés de $\sin, \cos, \tan$, formules de trigonométrie.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour calculer certaines sommations indexées par un entier

- Si le résultat est fourni, essayer de raisonner par récurrence
- Essayer de se ramener aux sommations classiques :
  - la sommation géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\quad \sum_{q=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

  - la sommation d'entiers, de carrés d'entiers consécutifs :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

  - la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

- Essayer de faire apparaître un télescopage.

➟ **Exercices 2.1 à 2.3, 2.9, 2.10, 2.16, 2.21 à 2.23**

Exemple

Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-k-1}{(k+1)!} = -\frac{n}{(n+1)!}.$$

Récurrence sur n.

- Pour $n=1$, l'égalité demandée est évidente, chacun des deux membres étant égal à $-\dfrac{1}{2}$.
- Supposons, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-k-1}{(k+1)!} = -\frac{n}{(n+1)!}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k^2-k-1}{(k+1)!} &= \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-k-1}{(k+1)!}\Big) + \frac{(n+1)^2-(n+1)-1}{(n+2)!} \\ &= -\frac{n}{(n+1)!} + \frac{n^2+n-1}{(n+2)!} \\ &= \frac{-n(n+2)+n^2+n-1}{(n+2)!} = -\frac{n+1}{(n+2)!},\end{aligned}$$

donc l'égalité est vraie pour $n+1$.

Ceci montre, par récurrence, que l'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque : Un autre calcul est possible, utilisant un télescopage.

Exemple

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1).$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)\big((2n+1)+3\big)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \end{aligned}$$

Exemple

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

On remarque, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$,

d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Méthode

Pour calculer des sommations doubles, ou des produits doubles

Essayer de :

- emboîter deux sommations simples, emboîter deux produits simples
- utiliser une permutation de symboles $\sum$, une permutation de symboles $\prod$
- exploiter des rôles éventuellement symétriques des deux indices.

➟ **Exercices 2.12, 2.14, 2.15, 2.19, 2.20, 2.23**

Exemple

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (2i+3j).$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 2i + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 3j = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i + 3\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j \\ &= 2\sum_{i=1}^{n} i\Big(\sum_{j=1}^{n} 1\Big) + 3\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} j\Big) = 2\sum_{i=1}^{n} in + 3n\sum_{j=1}^{n} j \\ &= 2n\sum_{i=1}^{n} i + 3n\sum_{j=1}^{n} j = 5n\sum_{i=1}^{n} i = \frac{5n^2(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Méthode

Pour calculer une sommation faisant intervenir des coefficients binomiaux

Essayer de :

- remplacer les coefficients binomiaux par leurs expressions à l'aide de factorielles
- utiliser la formule du binôme de Newton
- utiliser un raisonnement par récurrence, si l'énoncé donne la valeur de la sommation.

➟ **Exercices 2.3, 2.16, 2.21, 2.22**

Exemple

Montrer, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $2 \leqslant k \leqslant n$:

$$k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}.$$

On a :

$$\begin{aligned} k(k-1)\binom{n}{k} &= k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{k(k-1)}{k!}\,\frac{n!}{(n-k)!} \\ &= \frac{1}{(k-2)!}\,\frac{n!}{(n-k)!} \\ &= n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \\ &= n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-2)!\big((n-2)-(k-2)\big)!} \\ &= n(n-1)\binom{n-2}{k-2}. \end{aligned}$$

Exemple

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k/2}$.

On applique la formule du binôme de Newton à 1 et $2^{1/2}$:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k/2} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(2^{1/2})^k = (1+\sqrt{2})^n.$$

Méthode

Pour résoudre un système linéaire

- Utiliser une méthode de Gauss.
- Utiliser des combinaisons linéaires d'équations pour se ramener à un système équivalent plus simple.

➟ **Exercices 2.4 à 2.6**

Exemple

Résoudre le système d'équations, d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} 3x+y=1 \\ 2x-3y=8. \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x+y=1 & L_1 \\ 2x-3y=8 & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x+y=1 & L_1 \\ 11x=11 & L_2 \longleftarrow L_2+3L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=1 \\ y=-2. \end{cases}$$

Exemple

Résoudre le système d'équations, d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} 4x+y+z=5 \\ x+4y+z=-1 \\ x+y+4z=8. \end{cases}$$

On a, en additionnant les trois égalités :

$$(\mathrm{S}) \iff \begin{cases} (\mathrm{S}) \\ 6(x+y+z)=12 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x+y+z=5 & L_1 \\ x+4y+z=-1 & L_2 \\ x+y+4z=8 & L_3 \\ x+y+z=2 & L_4 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3x=3 & L_1 \leftarrow L_1-L_4 \\ 3y=-3 & L_2 \leftarrow L_2-L_4 \\ 3z=6 & L_3 \leftarrow L_3-L_4 \\ x+y+z=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=2. \end{cases}$$

Méthode

Pour résoudre une équation ou une inéquation portant sur des fonctions trigonométriques

Essayer de se ramener à une des équations ou inéquations simples que l'on sait résoudre, du type $\cos x = a,\ \cos x \leqslant a,\ \cos x \geqslant a, \ldots$

- par utilisation de formules de trigonométrie
- par changement d'inconnue
- par factorisation.

➟ **Exercices 2.7, 2.8**

Exemple

Résoudre l'équation

$$\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{1}{2},$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{1}{2} \iff (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2}$$
$$\iff 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2} \iff 4\sin^2 x \cos^2 x = 1 \iff \sin^2 2x = 1$$
$$\iff \sin 2x = \pm 1 \iff 2x = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff x = \frac{\pi}{4}\ \left[\frac{\pi}{2}\right].$$

On conclut : $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Exemple

Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\cos x + \sin x)^4 \leqslant 4$$

et étudier le cas d'égalité.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x + \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin x$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right),$$

donc : $\quad (\cos x + \sin x)^4 = 4 \cos^4\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \leqslant 4 \cdot 1 = 4.$

Pour le cas d'égalité :

$$(\cos x + \sin x)^4 = 4 \iff 4\cos^4\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 4 \iff \cos^4\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$$

$$\iff \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \pm 1 \iff \frac{\pi}{4} - x = 0 \quad [\pi] \iff x = \frac{\pi}{4} \quad [\pi].$$

On conclut : il y a égalité si et seulement si $x = \frac{\pi}{4} \quad [\pi]$.

Exemple

Résoudre l'inéquation

$$(1) \qquad \tan x \tan 2x < 1,$$

d'inconnue $x \in \left[0\,; \frac{\pi}{2}\right[$

En notant $t = \tan x$, on a :

$$(1) \iff t\,\frac{2t}{1-t^2} < 1 \iff \frac{2t^2}{1-t^2} < 1.$$

Si $1 - t^2 < 0$, alors l'inégalité est trivialement vraie.

Si $1 - t^2 > 0$: $\quad \frac{2t^2}{1-t^2} < 1 \iff 2t^2 < 1 - t^2 \iff 3t^2 < 1.$

Ainsi : (1) $\iff \left(t^2 > 1 \ \text{ ou } \ t^2 < \frac{1}{3}\right)$

donc, puisque $t = \tan x \geqslant 0$: (1) $\iff \left(t > 1 \ \text{ ou } \ t < \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Comme $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on conclut : $\mathcal{S} = \left[0\,; \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}\,; \frac{\pi}{2}\right[$.

Vrai ou Faux ?

2.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1 = 1$. V F

2.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = in$. V F

2.3 Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n$: $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$. V F

2.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}$. V F

2.5 Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $|x+y| \leqslant |x| + |y|$. V F

2.6 Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$: $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$. V F

2.7 La fonction $|.|$ est croissante sur $\mathbb{R}$. V F

2.8 Tout nombre réel admet un inverse. V F

2.9 Après calculs, le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: V F

$$\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - y + z = 4 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}$$

admet une solution et une seule, qui est $(1, -1, 2)$.

2.10 Pour une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, V F

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{2k}$.

Énoncés des exercices

2.1 Calcul d'une somme, par récurrence

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \dfrac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}.$

2.2 Exemple d'inégalité, raisonnement par récurrence

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}.$

2.3 Somme de coefficients binomiaux de 2 en 2

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $A_n = \sum_{k,\ 0 \leqslant 2k \leqslant n} \dbinom{n}{2k}$ et $B_n = \sum_{k,\ 0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \dbinom{n}{2k+1}.$

2.4 Exemples simples de résolution de systèmes d'équations linéaires

a) Résoudre les systèmes d'équations suivants, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(1) \begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ 6x - 3y = 2 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x - 3y = -1 \\ 2x + y = 5. \end{cases}$$

b) Résoudre les systèmes d'équations suivants, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(1) \begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x - y + z = -1 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 3y - z = 3 \\ 3x - 4y - 3z = 4 \end{cases} \qquad (3) \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + z = 4. \end{cases}$$

2.5 Exemples de résolution de systèmes d'équations linéaires avec paramètres

Résoudre et discuter les systèmes d'équations suivants, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$a) \begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ 4x - 2y + az = a \end{cases} \qquad b) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1. \end{cases}$$

2.6 Exemple de résolution d'un système d'équations linéaires avec paramètres

Résoudre et discuter le système d'équations suivant, d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et de paramètre $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$x - y + 2z + t = 0, \quad -2x + 3y + z - 4t = 1, \quad -3x + 5y + 4z - 7t = a, \quad -x + 2y + 3z - 3t = b.$

2.7 Résolution d'une équation trigonométrique

Résoudre l'équation $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$, d'inconnue $x \in [0\,;\pi]$.

2.8 Résolution d'une inéquation trigonométrique

Résoudre l'inéquation $\cos 2x \geqslant \cos x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

2.9 Calcul d'une somme

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2$.

2.10 Calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$

On note, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$: $S_p(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$.

a) Rappeler les valeurs de $S_p(n)$ pour $p \in \{0,1,2\}$.

b) En développant $(k+1)^4$ puis en sommant, déduire la valeur de $S_3(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2.11 Calcul d'une somme par télescopage

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$.

2.12 Sommes de nombres harmoniques

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_k = \displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p}$, appelé k-ième nombre harmonique.

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{H}_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{H}_k$ en fonction de n et de H_n.

2.13 Calcul d'une somme contenant des factorielles

a) Décomposer linéairement le polynôme $P = \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 1$ de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ sur les polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = \mathrm{X}$, $P_2 = \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)$.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 k!$.

2.14 Somme de minimums

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n} \mathrm{Min}\,(i,j)$.