MATHS
PC/PC*

Claude Deschamps | François Moulin | Yoann Gentric
Emmanuel Delsinne | François Lussier | Chloé Mullaert
Serge Nicolas | Jean Nougayrède | Claire Tête

j'intègre

MATHS
PC/PC*

TOUT-EN-UN

2e édition

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-084148-6

Table des matières

Pour Claude

Notre collègue et ami Claude Deschamps
est décédé le 11 mars 2022.

Difficile, Claude, de dissocier ton nom
de celui d'André Warusfel (« Warus »)
qui nous a quittés en 2016.

Vous avez tous les deux dirigé cette collection depuis 1997,
dans la lignée d'une longue série de livres,
dont le dernier avatar, qui porte ton nom,
« Ramis – Deschamps – Odoux », est encore utilisé de nos jours.

Sous votre houlette,
nous avons contribué à ces « Tout-en-un »
dont l'objectif est d'être des ouvrages de référence
pour tous les étudiants et dont le contenu,
accessible à tous, suit à la lettre le programme officiel.

Toute l'équipe de cet ouvrage,
dont certains membres ont été tes élèves,
tient à te rendre hommage en souvenir de tous ces moments
passés à chercher la rédaction idéale
pour transmettre aux étudiants
des notions mathématiques souvent délicates.

Avant-propos

Ce nouveau Tout-en-un de mathématiques vient répondre aux attentes des nouveaux programmes de classes préparatoires, entrés en vigueur en septembre 2021 pour la première année et en septembre 2022 pour la deuxième année. Il reprend l'ambition des précédentes éditions : faire tenir en un seul volume cours complet et exercices corrigés.

Ce volume PC se veut dans la continuité du volume PCSI : lors de son élaboration, l'équipe d'auteurs ne s'est pas contentée d'adapter l'ancien livre au nouveau programme, mais a repensé chaque chapitre en profondeur, dans un souci permanent de clarté et de concision.

Il nous tient à cœur de préciser quelques éléments clés de la structure du livre.

- Plutôt que de faire figurer systématiquement, à la suite de l'énoncé d'une proposition ou d'un théorème, sa démonstration entièrement rédigée, nous préférons parfois donner un principe de démonstration (la démonstration complète étant alors reléguée en fin de chapitre). L'objectif est double :
  - rendre l'exposé du cours plus concis et plus facile à lire lorsque l'étudiant ne souhaite pas s'attarder sur les démonstrations ;
  - l'étudiant, ayant à sa disposition un principe de démonstration, peut soit (en cas de première lecture) tenter de réfléchir par lui-même à la manière d'élaborer la preuve complète, soit (en cas de lecture ultérieure) se souvenir rapidement de cette preuve.
- Chaque chapitre se conclut par une série d'exercices permettant à l'étudiant de s'exercer. Chacun de ces exercices est entièrement corrigé.
  - Certains de ces exercices ont pour mission de faire appliquer de manière ciblée un théorème ou une méthode ; sous le numéro de l'exercice est alors indiqué le numéro de la page du cours associée. Inversement, ces exercices sont signalés dans la marge, à l'endroit concerné du cours.

    S'il n'est pas totalement indispensable de traiter ces exercices lors d'une première lecture du cours, leur lien étroit avec celui-ci les rend particulièrement intéressants pour assimiler les nouvelles notions et méthodes.
  - L'étudiant trouvera également des exercices d'entraînement un peu plus ambitieux, demandant plus de réflexion. Certains, plus difficiles, sont étoilés.

Bien entendu nous sommes à l'écoute de toute remarque dont les étudiants, nos collègues, tout lecteur... pourraient nous faire part (à l'adresse électronique suivante : `touten1maths@gmail.com`). Cela nous permettra, le cas échéant, de corriger certaines erreurs nous ayant échappé et surtout ce contact nous guidera pour une meilleure exploitation des choix pédagogiques que nous avons faits aujourd'hui dans cet ouvrage.

François Moulin et Yoann Gentric

« Mode d'emploi » d'un chapitre

Une introduction présente le sujet traité.

Compléments d'algèbre linéaire

1

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Les encadrés correspondent soit à des théorèmes, propositions ou corollaires, qui partagent le même système de numérotation, soit à des définitions, qui ont leur propre numérotation.

Corollaire 17

Deux matrices semblables ont même trace.

Théorème 25

Dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Définition 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une **matrice orthogonale** si $A^T A = I_n$.

La démonstration de chaque résultat encadré, lorsqu'elle ne suit pas directement celui-ci, est indiquée par un renvoi.

Proposition 4 (Caractère local de la limite)

Soit $r > 0$. L'application f tend vers ℓ en a si, et seulement si, la restriction de f à $A \cap B(a,r)$ tend vers ℓ en a.

Démonstration page 198

Les points de méthode apparaissent sur fond grisé.

Point méthode Pour démontrer qu'une *suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément, il est parfois utile d'étudier la convergence normale de la *série* télescopique $\sum(f_{n+1}-f_n)$.

Les points auxquels il faut faire particulièrement attention sont signalés par un filet vertical sur la gauche.

Attention Comme le prouve l'exemple suivant, une série de fonctions peut converger uniformément sans pour autant converger normalement.

Des renvois vers des exercices peuvent apparaître en marge au sein du cours.

Exo 9.4

Proposition 7

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série entière $\sum n^{\alpha} z^{n}$ est de rayon de convergence 1.

Les exemples sont repérés par deux coins.

Ex. 4. La valeur absolue est la norme induite sur $\mathbb{R}$ par le module sur $\mathbb{C}$.

Des exercices sont proposés en fin de chapitre, avec éventuellement un rappel du numéro de la page de cours où se trouve la notion dont l'exercice est une application.

S'entraîner et approfondir

Éléments propres

2.1 Soit φ un isomorphisme de E dans F et u un endomorphisme de E.
$\rightarrow$46 Déterminer les éléments propres de $\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$ en fonction de ceux de u.

Certains exercices bénéficient d'indications, et les plus difficiles sont étoilés.

⋆⋆ **5.18** On note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $\mathcal{T}_n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puis que c'est l'adhérence de $\mathcal{D}_n$.

Tous les exercices sont entièrement corrigés.

Solutions des exercices

2.1 Pour tout vecteur x de E et pour tout scalaire λ, on a, par bijectivité et linéarité de φ :

$$u(x) = \lambda x \iff \big(u \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big) = \lambda x \iff \big(\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big) = \lambda \varphi(x),$$

c'est-à-dire :

$$x \in E_\lambda(u) \iff \varphi(x) \in E_\lambda(\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}).$$

Comme φ est un isomorphisme, on en déduit que les endomorphismes u et $\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$ ont les mêmes valeurs propres et leurs sous-espaces propres sont reliés par :

$$E_\lambda(\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}) = \varphi\big(E_\lambda(u)\big).$$

Chapitre 1 : Compléments d'algèbre linéaire

Compléments d'algèbre linéaire

1

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I Produit et somme de sous-espaces vectoriels

1 Produit fini d'espaces vectoriels

Proposition 1

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ ainsi que $E_1, \ldots, E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'ensemble produit $E_1 \times \cdots \times E_p$ muni des lois suivantes :

- l'addition définie par $(x_1, \ldots, x_p) + (y_1, \ldots, y_p) = (x_1 + y_1, \ldots, x_p + y_p)$,
- la loi externe définie par $\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_p) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_p)$,

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel appelé **espace vectoriel produit** $\boldsymbol{E_1 \times \cdots \times E_p}$.

Démonstration page 25

Principe de démonstration. Notons $F = E_1 \times \cdots \times E_p$. D'après la définition d'un espace vectoriel, il s'agit de vérifier :

- d'une part que l'addition définie sur F est associative, commutative, possède un élément neutre et que tout élément de F admet un opposé,
- d'autre part que pour tout $(x, y) \in F^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, on a :

(1) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$ (3) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

(2) $1 \cdot x = x$ (4) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

Remarque En particulier, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors E^p muni des lois produits est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Notations

- On note aussi $\prod\limits_{k=1}^{p} E_k$ au lieu de $E_1 \times \cdots \times E_p$.
- Si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille finie de $\mathbb{K}$-espace vectoriels, l'espace produit est noté $\prod\limits_{i \in I} E_i$. Par convention, si I est vide, $\prod\limits_{i \in I} E_i$ est l'espace nul.

Proposition 2

Soit $(E_1, \dots, E_p)$ une famille finie de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. L'espace vectoriel produit $\prod_{k=1}^{p} E_k$ est de dimension finie et :

$$\dim\left(\prod_{k=1}^{p} E_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim(E_k).$$

Démonstration page 25

Principe de démonstration. Quitte à faire une récurrence sur p, il suffit de traiter le cas $p = 2$. Pour le cas $p = 2$, si E_1 et E_2 sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, prendre $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n_1}$ une base de E_1 et $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n_2}$ une base de E_2, puis montrer que :

$$\mathcal{G} = \big((e_1, 0), \dots, (e_{n_1}, 0), (0, f_1), \dots\ , (0, f_{n_2})\big)$$

est une base de $E_1 \times E_2$.

2 Somme finie de sous-espaces vectoriels

Nous généralisons ici les notions vues en première année de somme et de somme directe de deux sous-espaces vectoriels.

Définition 1

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E. On appelle **somme** de ces sous-espaces vectoriels, et l'on note $\sum_{i \in I} E_i$, l'ensemble :

$$\left\{\sum_{i \in I} x_i \mid (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i\right\}.$$

Remarques

- *Commutativité.* Par commutativité de l'addition dans E, une somme de sous-espaces vectoriels ne dépend pas de l'ordre de sommation.
- *Associativité.* On vérifie sans difficulté que $\left(\sum_{i \in I} E_i\right) + \left(\sum_{i \in J} E_i\right) = \sum_{i \in I \cup J} E_i$ et, plus généralement, $\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i \in I_k} E_i\right) = \sum_{i \in I_1 \cup \dots \cup I_p} E_i$.
- Une somme vide d'éléments de E valant par définition le vecteur nul, on a toujours $\sum_{i \in \varnothing} E_i = \{0\}$.
- Si la famille de sous-espaces considérée est de la forme $(E_1, \dots, E_p)$, ce qui revient à prendre $I = [\![1, p]\!]$ dans la définition précédente, alors la somme se note $\sum_{k=1}^{p} E_k$ ou $E_1 + \dots + E_p$, et l'on a :

  $$\sum_{k=1}^{p} E_k = \big\{x_1 + \dots + x_p \mid (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p\big\}.$$

  Dans le cas $p = 2$, on retrouve la notion de somme de deux sous-espaces vectoriels vue en première année.

Ex. 1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, les trois droites vectorielles :

$$E_1 = \mathbb{R}\,, \quad E_2 = i\mathbb{R} \quad \text{et} \quad E_3 = \operatorname{Vect}(1+i)$$

sont telles que $E_1 + E_2 + E_3 = \mathbb{C}$ puisque $\mathbb{C} = E_1 + E_2 \subset E_1 + E_2 + E_3 \subset \mathbb{C}$.

Ex. 2. Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notons E_j le sous-espace vectoriel constitué des matrices dont les colonnes sont toutes nulles, sauf éventuellement la j-ème. Prouvons que $\sum\limits_{j=1}^{p} E_j = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $(C_1, \ldots, C_p)$ la famille des colonnes de A, et pour $j \in [\![1,p]\!]$, notons A_j la matrice dont la famille des colonnes est $(0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-ème place}}}{C_j}, 0, \ldots, 0)$. Alors on a :

$$A = \sum_{j=1}^{p} A_j \qquad \text{et} \qquad \forall j \in [\![1,p]\!] \quad A_j \in E_j.$$

D'où $\sum\limits_{j=1}^{p} E_j = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition 3

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E. Leur somme est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant tous les E_i.

Démonstration.

- Pour justifier que $\sum\limits_{i\in I} E_i$ est un sous-espace vectoriel, remarquons qu'il s'agit de l'image de l'application suivante, dont la linéarité est immédiate : $\Phi : \begin{array}{ccc} \prod\limits_{i\in I} E_i & \longrightarrow & E \\ (x_i)_{i\in I} & \longmapsto & \sum\limits_{i\in I} x_i. \end{array}$
- Le sous-espace vectoriel $\sum\limits_{i\in I} E_i$ contient chacun des E_i puisque si l'on fixe $i_0 \in I$, alors tout vecteur $x \in E_{i_0}$ s'écrit $x = \sum\limits_{i\in I} x_i$ avec $x_{i_0} = x$ et $\forall i \in I \setminus \{i_0\} \quad x_i = 0$.
- De plus, si H est sous-espace vectoriel de E contenant chacun des E_i, alors pour toute famille $(x_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} E_i$, on a :

$$\forall i \in I \quad x_i \in H \qquad \text{donc} \qquad \sum_{i\in I} x_i \in H.$$

Par conséquent, H contient $\sum\limits_{i\in I} E_i$. □

Ex. 3. Soit $a_1, \ldots, a_p$ des vecteurs de E. Alors on a l'égalité suivante :

$$\operatorname{Vect}(a_1, \ldots, a_p) = \operatorname{Vect}(a_1) + \cdots + \operatorname{Vect}(a_p).$$

En effet, étant donné un vecteur $x \in E$, un sous-espace vectoriel contient x si, et seulement s'il contient $\operatorname{Vect}(x)$. Par conséquent, le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les a_i, c'est-à-dire $\operatorname{Vect}(a_1, \ldots, a_p)$, est aussi le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les $\operatorname{Vect}(a_i)$, c'est-à-dire $\operatorname{Vect}(a_1) + \cdots + \operatorname{Vect}(a_p)$.

3 Somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition 2

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E.
On dit que les E_i sont **en somme directe** si pour tout $x \in \sum_{i\in I} E_i$, la décomposition $x = \sum_{i\in I} x_i$, avec $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$, est unique.

Terminologie On dit aussi que la somme $\sum_{i\in I} E_i$ est **directe**.

Notation Lorsque la somme $\sum_{i\in I} E_i$ est directe, on la note $\bigoplus_{i\in I} E_i$. Dans le cas d'une famille de la forme $(E_1, \dots, E_p)$, on note $\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ ou $E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$.

Remarques

- Dans le cas d'une famille de deux sous-espaces vectoriels, on retrouve la définition vue en première année.
- Si $J \subset I$ et si la somme $\sum_{i\in I} E_i$ est directe, alors la somme $\sum_{i\in J} E_i$ l'est aussi. En d'autres termes, une « sous-somme » d'une somme directe est directe.
- La somme $\sum_{i\in I} E_i$ est directe si, et seulement si, l'application :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \prod_{i\in I} E_i & \longrightarrow & \sum_{i\in I} E_i \\ (x_i)_{i\in I} & \longmapsto & \sum_{i\in I} x_i \end{array}$$

  est injective. Comme elle est linéaire et surjective, cela revient à dire que c'est un isomorphisme.

En pratique, on utilise la caractérisation suivante pour prouver qu'une somme est directe.

Proposition 4

Une somme $\sum_{i\in I} E_i$ est directe si, et seulement si :

Exo 1.1

$$\forall (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i \qquad \sum_{i\in I} x_i = 0 \implies \forall i \in I \quad x_i = 0.$$

Démonstration. Reprenons l'application linéaire Φ de la remarque précédente. La somme $\sum_{i\in I} E_i$ est directe si, et seulement si, Φ est injective, ce qui revient à dire que son noyau est réduit à $\{0\}$. □

Ex. 4. Si E est de dimension finie, et si $(e_1,\dots,e_n)$ en est une base, alors $\bigoplus\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Vect}(e_k)=E$.

- En effet, on a $\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Vect}(e_k)=E$ car pour $x\in E$, il existe $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in\mathbb{K}^n$ tel que :
$$x=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\lambda_k e_k}_{\in\mathrm{Vect}(e_k)}.$$
- De plus, si $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in\prod\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Vect}(e_k)$ est tel que $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=0$, alors en écrivant chaque x_k sous la forme $\lambda_k e_k$ avec $\lambda_k\in\mathbb{K}$, la relation précédente donne, par liberté de la famille $(e_1,\dots,e_n)$, la nullité de tous les λ_k, puis de tous les x_k. Donc la somme est directe.

Ex. 5. Si une somme $\sum\limits_{i\in I}E_i$ est directe et si, pour tout $i\in I$, on se donne un vecteur *non nul* $x_i\in E_i$, alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre. En effet, si $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille de scalaires vérifiant :
$$\sum_{i\in I}\lambda_i x_i=0,$$
alors en remarquant que $\forall i\in I\quad \lambda_i x_i\in E_i$, le caractère direct de la somme assure que pour tout $i\in I$, on a $\lambda_i x_i=0$, puis, le vecteur x_i étant non nul, $\lambda_i=0$.

Attention Comme le montre l'exemple suivant, des sous-espaces vectoriels peuvent être en somme directe deux à deux sans que leur somme soit directe.

Ex. 6. Dans $\mathbb{R}^2$, notons $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$ et $u=(1,1)$. Alors les trois droites vectorielles :
$$D_1=\mathrm{Vect}(e_1)\ ;\qquad D_2=\mathrm{Vect}(e_2)\qquad\text{et}\qquad D_3=\mathrm{Vect}(u)$$
vérifient $D_1\cap D_2=D_1\cap D_3=D_2\cap D_3=\{0\}$, mais ne sont pas en somme directe car, par exemple, on a $\underset{\in D_1}{\underset{\uparrow}{e_1}}+\underset{\in D_2}{\underset{\uparrow}{e_2}}+\underset{\in D_3}{\underset{\uparrow}{(-u)}}=0$.

Proposition 5 (Associativité de la somme directe)

Supposons que I s'écrive comme une union disjointe $I=I_1\cup I_2$. La somme $\sum\limits_{i\in I}E_i$ est directe si, et seulement si :

- les sommes $\sum\limits_{i\in I_1}E_i$ et $\sum\limits_{i\in I_2}E_i$ sont directes ;
- les sous-espaces vectoriels $\bigoplus\limits_{i\in I_1}E_i$ et $\bigoplus\limits_{i\in I_2}E_i$ sont en somme directe ;

et l'on a alors :
$$\Big(\bigoplus_{i\in I_1}E_i\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{i\in I_2}E_i\Big)=\bigoplus_{i\in I}E_i.$$

Démonstration page 26

Remarque Par récurrence, le résultat précédent s'étend au cas où I s'écrit comme une union disjointe $I = I_1 \cup \cdots \cup I_p$.

4 Cas de la dimension finie

Proposition 6 (Partition d'une base)

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E et $(I_1, \ldots, I_p)$ une partition de I.

Si, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on pose $E_k = \operatorname{Vect}(e_i)_{i\in I_k}$, alors on a $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$.

Démonstration page 26

Terminologie Lorsque l'on dispose d'une famille $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels telle que $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$, on parle de **décomposition de E en somme directe** ou plus simplement **décomposition de E**.

Proposition 7 (Base adaptée à une décomposition)

Supposons E de dimension finie. Supposons de plus que l'on a :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i.$$

Si, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on considère une base $\mathcal{B}_i$ de E_i, alors la famille constituée, dans l'ordre, des vecteurs de $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p$, est une base de E.

Une telle base est dite **adaptée à la décomposition** $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

Démonstration page 27

Terminologie On dit aussi qu'une base de E adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ est obtenue « par concaténation » des bases $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p$.

Proposition 8

Si les sous-espaces vectoriels E_i sont de dimension finie, alors leur somme est aussi de dimension finie, et l'on a :

$$\dim\left(\sum_{i\in I} E_i\right) \leqslant \sum_{i\in I} \dim E_i$$

avec égalité si, et seulement si, la somme $\sum_{i\in I} E_i$ est directe.

Démonstration. Considérons l'application linéaire surjective $\Phi : \begin{array}{ccc} \prod_{i\in I} E_i & \longrightarrow & \sum_{i\in I} E_i \\ (x_i)_{i\in I} & \longmapsto & \sum_{i\in I} x_i. \end{array}$

Le théorème du rang donne $\dim \prod_{i\in I} E_i = \dim \operatorname{Im} \Phi + \dim \operatorname{Ker} \Phi$.
Comme $\dim \prod_{i\in I} E_i = \sum_{i\in I} \dim E_i$, et par surjectivité de Φ, on obtient :

$$\sum_{i\in I} \dim E_i = \dim\left(\sum_{i\in I} E_i\right) + \dim \operatorname{Ker} \Phi.$$

Cela prouve l'inégalité souhaitée, avec égalité si, et seulement si, Φ est injective, c'est-à-dire si, et seulement si, la somme $\sum_{i\in I} E_i$ est directe. □

Exo 1.2

Remarque En particulier, si E est de dimension finie et si l'on dispose d'une décomposition $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$, alors on a $\dim E = \sum_{i\in I} \dim E_i$.

II Écriture par blocs

1 Matrices par blocs

Il est parfois utile d'écrire une matrice en mettant en évidence certaines de ses sous-matrices.

Ex. 7. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 8 & 9 \\ 12 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ peut s'écrire par blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \; ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \; ; \quad C = \begin{pmatrix} 12 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mais aussi $M = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}$ avec $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On appelle **écriture par blocs** toute écriture de la forme $\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,p} \end{pmatrix}$.

Remarque Bien évidemment, pour qu'une telle écriture ait un sens, deux blocs A_{i,j_1} et A_{i,j_2} ont le même nombre de lignes, et deux blocs $A_{i_1,j}$ et $A_{i_2,j}$ le même nombre de colonnes.

Ex. 8. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$, les matrices de la projection p sur F parallèlement à G et de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G s'écrivent par blocs :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

en notant n la dimension de E et r celle de F.

Ex. 9. On peut toujours écrire $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par blocs en utilisant la famille de ses lignes ou ses colonnes :

$$M = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_p \end{pmatrix}.$$

2 Opérations sur les matrices par blocs

Transposition par blocs

Si $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,p} \end{pmatrix}$, alors $A^T = \begin{pmatrix} {A_{1,1}}^T & \dots & {A_{n,1}}^T \\ \vdots & & \vdots \\ {A_{1,p}}^T & \dots & {A_{n,p}}^T \end{pmatrix}$.

Combinaison linéaire par blocs

Soit A et B deux matrices de *même taille*, écrites avec des blocs de tailles *compatibles pour l'addition*, alors toute combinaison linéaire de A et B s'écrit par blocs :

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda A_{1,1} + \mu B_{1,1} & \dots & \lambda A_{1,p} + \mu B_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{n,1} + \mu B_{n,1} & \dots & \lambda A_{n,p} + \mu B_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Produit par blocs

Proposition 9 (Produit par blocs)

Si A et B sont écrites par blocs sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{p,1} & \cdots & B_{p,q} \end{pmatrix}$$

avec des blocs de tailles *compatibles pour le produit matriciel*, alors :

Exo 1.3

Exo 1.4

$$AB = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n,1} & \cdots & C_{n,q} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!] \quad C_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} B_{k,j}.$$

Démonstration (non exigible) page 27

Attention Le produit par blocs précédent s'effectue comme un produit usuel mais, le produit matriciel n'étant pas commutatif, il est impératif de faire attention à l'ordre dans lequel on écrit chaque produit $A_{i,k}B_{k,j}$.

Ex. 10. Soit $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^4$. On a le produit par blocs suivant :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix}.$$

- La matrice $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ étant inversible (d'inverse elle-même), on en déduit que les matrices $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix}$ ont même rang.
- On a de plus $\det \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = (-1)^n$ (on la change en la matrice I_{2n} en effectuant les n échanges de colonnes $C_j \leftrightarrow C_{j+n}$ pour $j \in [\![1, n]\!]$). On en déduit que :

$$\det \begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix} = (-1)^n \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Ex. 11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. La matrice $M = \begin{pmatrix} \lambda & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $\lambda \neq 0$ et A inversible ; en effet, en développant par rapport à la première colonne, on obtient $\det M = \lambda \det A$. Si tel est le cas, alors en écrivant M^{-1} par blocs $\begin{pmatrix} \mu & L \\ C & D \end{pmatrix}$, on a, par produit par blocs :

$$MM^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & B \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & L \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\mu + BC & \lambda L + BD \\ AC & AD \end{pmatrix}.$$

Comme $MM^{-1} = I_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$, on obtient $\begin{cases} \lambda\mu + BC &= 1 \\ \lambda L + BD &= 0 \\ AC &= 0 \\ AD &= I_n. \end{cases}$

La matrice A étant inversible, on obtient $C = 0$, $\mu = \frac{1}{\lambda}$, $D = A^{-1}$ et enfin $L = -\frac{1}{\lambda} BA^{-1}$. On a donc obtenu :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda & L \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad L = -\frac{1}{\lambda} BA^{-1}.$$

Ex. 12. En particulier, si $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ est inversible et :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}.$$

Terminologie On appelle matrice **triangulaire supérieure par blocs**, de blocs diagonaux $A_{1,1}, \ldots, A_{n,n}$, une matrice carrée s'écrivant sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & \cdots & A_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}.$$

où les **blocs diagonaux** $A_{i,i}$ sont carrés.
Sur le même principe, on parle de matrice **triangulaire inférieure par blocs** et de matrice **diagonale par blocs**.

Remarques

- Couramment, dans l'écriture d'une matrice triangulaire par blocs, seuls les blocs diagonaux nous importent. On notera $\begin{pmatrix} A_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_n \end{pmatrix}$ une telle matrice triangulaire supérieure par blocs de blocs diagonaux $A_1, \ldots, A_n$.
- Un produit de deux matrices triangulaires supérieures par blocs, avec des blocs diagonaux de tailles compatibles, l'est encore. Plus précisément :

$$\begin{pmatrix} A_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_nB_n \end{pmatrix}$$

  On a le même résultat pour des matrices triangulaires inférieures par blocs et, évidement, pour des matrices diagonales par blocs.

Notation Une matrice diagonale par blocs de blocs diagonaux $A_1, \ldots, A_n$ est notée $\mathrm{Diag}(A_1, \ldots, A_n)$. Ainsi, sous condition que les tailles des blocs soient compatibles, on a :

$$\mathrm{Diag}(A_1, \ldots, A_n) \,\mathrm{Diag}(B_1, \ldots, B_n) = \mathrm{Diag}(A_1B_1, \ldots, A_nB_n).$$

Ex. 13. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Montrons que $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$.

Soit $(X, Y) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p$. On a :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX \\ BY \end{pmatrix},$$

donc :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \iff (X, Y) \in \operatorname{Ker} A \times \operatorname{Ker} B.$$

Ainsi, on a $\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \varphi\big(\operatorname{Ker} A \times \operatorname{Ker} B\big)$ où $\varphi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^{n+p}$ est l'isomorphisme défini par $\varphi(X,Y) = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$. Par conséquent :

$$\dim \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \dim \operatorname{Ker} A \times \operatorname{Ker} B = \dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Ker} B.$$

Le théorème du rang donne alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} &= n + p - (\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Ker} B) \\ &= (n - \dim \operatorname{Ker} A) + (p - \dim \operatorname{Ker} B) = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B. \end{aligned}$$

Ex. 14. À l'aide du résultat précédent, on prouve par récurrence que le rang d'une matrice diagonale par blocs est égal à la somme des rangs des blocs diagonaux.
Une matrice A diagonale par blocs est donc inversible si, et seulement si, ses blocs diagonaux le sont. Dans ce cas, en notant $A_1, \ldots, A_r$ les blocs diagonaux de A, alors la matrice inverse A^{-1} a pour blocs diagonaux $A_1^{-1}, \ldots, A_r^{-1}$.

Attention Le résultat obtenu précédemment, concernant le rang d'une matrice diagonale par blocs, ne s'étend pas à des matrices triangulaires par blocs (cf. exemple 15).

Ex. 15. La matrice triangulaire par blocs $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas de rang nul, même si ses blocs diagonaux le sont.

3 Déterminant et écriture par blocs

Convention Si une matrice est de taille nulle, son déterminant vaut 1.

Proposition 10

Exo 1.5

Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants de ses blocs diagonaux, c'est-à-dire :

$$\det\begin{pmatrix} A_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (\star) & & A_n \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^{n} \det A_k.$$

Démonstration page 28

Principe de démonstration. Quitte à faire une récurrence sur le nombre de blocs, il suffit de prouver le résultat pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

Pour cela, on remarque que $M = \begin{pmatrix} I_r & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$.

Remarque Une matrice triangulaire par blocs est donc inversible si, et seulement si, tous ses blocs diagonaux le sont.

Ex. 16. On a, en reconnaissant un déterminant triangulaire par blocs :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 31 & 45 \\ 3 & 4 & 10 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \times (-2) = 4.$$

Ex. 17. Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Montrons que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\,\det(A-B)$.

Effectuant les deux chaînes de transvections :

$$L_i \leftarrow L_i + L_{n+i} \quad \text{pour} \quad i \in [\![1,n]\!] \qquad \text{puis} \qquad C_{n+j} \leftarrow C_{n+j} - C_j \quad \text{pour} \quad j \in [\![1,n]\!],$$

on transforme successivement la matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ en :

$$\begin{pmatrix} A+B & B+A \\ B & A \end{pmatrix} \qquad \text{puis en} \qquad \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{pmatrix}.$$

Puisqu'une transvection laisse inchangé le déterminant, on en déduit :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{pmatrix} = \det(A+B)\,\det(A-B),$$

la dernière égalité étant vraie car la matrice est triangulaire par blocs.

III Sous-espaces stables et endomorphismes induits

Dans toute la suite du chapitre, sauf mention plus précise, u désigne un endomorphisme de E.

1 Définitions

Exo 1.11

Définition 3

Un sous-espace vectoriel F de E est dit **stable** par u si $u(F) \subset F$.

Notation Lorsque F est stable par u, on dit aussi que u **stabilise** F.

Remarques

- Les sous-espaces vectoriels $\{0\}$ et E sont stables par tout endomorphisme.
- L'intersection et la somme de sous-espaces vectoriels stables par u sont stables par u.
- Le noyau et l'image de u sont stables par u. Plus généralement, tout sous-espace vectoriel inclus dans le noyau de u ou contenant l'image de u est stable par u.

Ex. 18. Une homothétie de E stabilise tous les sous-espaces vectoriels de E. Ce sont d'ailleurs les seuls endomorphismes possédant cette propriété (cf. question 2(a) de l'exercice 1.13).

Ex. 19. Il existe des endomorphismes de E ne stabilisant que $\{0\}$ et E. C'est par exemple le cas d'une rotation vectorielle r d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ du plan euclidien $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire :

$$r : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{avec} \qquad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

En effet, supposons que r stabilise un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ différent de $\{0\}$ et $\mathbb{R}^2$, alors il s'agit d'une droite. En notant u un vecteur directeur de cette droite, on a $r(u) \in \mathrm{Vect}(u)$, d'où l'existence d'un réel λ tel que $r(u) = \lambda u$. Le vecteur u est alors dans le noyau de la matrice $R_\theta - \lambda I_2$, qui est par conséquent non inversible. Or, on a :

$$R_\theta - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{puis} \qquad \det(R_\theta - \lambda I_2) = \underbrace{(\cos\theta - \lambda)^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{\sin^2\theta}_{>0} > 0,$$

ce qui est contradictoire.

Proposition 11

Si deux endomorphismes u et v commutent, c'est-à-dire si $u \circ v = v \circ u$, alors les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Im} v$ sont stables par u.

Démonstration. Supposons que u et v commutent.

- Soit $x \in \operatorname{Ker} v$; on a $v\big(u(x)\big) = (v \circ u)(x) = (u \circ v)(x) = u(0) = 0$ par linéarité de u, donc $u(x) \in \operatorname{Ker} v$. Ainsi, $\operatorname{Ker} v$ est stable par u.
- En utilisant le fait que u et v commutent, on a $u(\operatorname{Im} v) = \operatorname{Im}(u \circ v) = \operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$, d'où le caractère stable de $\operatorname{Im} v$ par u. □

Proposition 12

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de F. Alors F est stable par u si, et seulement si :

$$\forall i \in I \quad u(e_i) \in F.$$

Démonstration. Puisque $F = \mathrm{Vect}\{e_i \mid i \in I\}$, on a $u(F) = \mathrm{Vect}\big\{u(e_i) \mid i \in I\big\}$. Par conséquent, on a $u(F) \subset F$ si, et seulement si, $\forall i \in I \quad u(e_i) \in F$. □

Ex. 20. Soit x un vecteur non nul de E. La droite $\mathbb{K}x$ est stable par u si, et seulement si, $u(x) \in \mathbb{K}x$, *i.e.* s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Dans ce cas, si $\lambda \neq 0$, c'est-à-dire si $x \notin \operatorname{Ker} u$, alors $u(\mathbb{K}x) = \mathbb{K}x$.

Ex. 21. Sous-espace cyclique
Supposons E de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E \setminus \{0\}$. Notons d le plus grand entier tel que la famille $\big(x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x)\big)$ soit libre (on a $d \geqslant 1$ car $x \neq 0$, et $d \leqslant \dim E$ car la famille considérée est de cardinal d). Montrons la stabilité par u du sous-espace :

$$E_x = \operatorname{Vect}\big(x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x)\big).$$

D'après la proposition 12, il suffit de prouver que :

$$\forall k \in [\![0, d-1]\!] \quad u\big(u^k(x)\big) \in E_x.$$

- C'est évident si $k \in [\![0, d-2]\!]$, par définition de E_x.
- Justifions-le pour $k = d-1$. Par définition de l'entier d, la famille $\big(x, u(x), \ldots, u^{d}(x)\big)$ est liée et la famille $\big(x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x)\big)$ est libre. On en déduit que $u^d(x) \in \operatorname{Vect}\big(x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x)\big) = E_x$, d'où le résultat.

Terminologie Le sous-espace vectoriel E_x est appelé **sous-espace cyclique engendré par $\boldsymbol{x}$** : c'est le plus petit sous-espace vectoriel stable contenant x.

Remarque Dans la base $\big(x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x)\big)$ de E_x, l'endomorphisme induit par u sur E_x a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & a_{d-1} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice s'appelle **matrice compagnon du polynôme $\boldsymbol{X^d - \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k}$**.

Définition 4

Soit F un sous-espace vectoriel stable par u. On appelle **endomorphisme induit** par u sur F l'endomorphisme $u_F \in \mathcal{L}(F)$ défini par :

$$\forall x \in F \quad u_F(x) = u(x).$$

Attention Ne pas confondre *endomorphisme induit* et *restriction*. On ne peut parler d'endomorphisme induit par u sur F que si F est stable par u. Dans le cas où F est stable par u, on distinguera soigneusement :
- l'endomorphisme induit u_F, qui est un endomorphisme de F ;
- la restriction $u_{|F}$ qui est une application linéaire de F vers E.

Remarque L'image de u_F est égale à $u(F)$ et son noyau à $F \cap \operatorname{Ker} u$.

2 Stabilité et écriture par blocs

Dans cette partie, E est supposé de dimension finie.

Proposition 13 (Traduction matricielle de la stabilité)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si l'on écrit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K}),$$

alors :

- $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ est stable par u si, et seulement si, $B = 0$;
- $\mathrm{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$ est stable par u si, et seulement si, $C = 0$.

Démonstration. Notons $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$.

Pour $x \in E$, si l'on écrit $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ avec $(X, Y) \in \mathbb{K}^r \times \mathbb{K}^{n-r}$, l'appartenance de x à F se traduit par $Y = 0$. Pour $x \in F$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\big(u(x)\big) = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX \\ BX \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad u(x) \in F \iff BX = 0.$$

Le sous-espace vectoriel F est donc stable par u si, et seulement si, $BX = 0$ pour tout $X \in \mathbb{K}^r$, autrement dit $B = 0$.
Démonstration analogue pour la stabilité de $\mathrm{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$. $\square$

Remarques Reprenons les notations de la proposition et notons :

$$F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r) \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n).$$

- Dans le cas où $B = 0$,
  * A est la matrice dans la base $(e_1, \dots, e_r)$ de F de l'endomorphisme induit u_F ;
  * l'interprétation de D est plus délicate : en notant $p \in \mathcal{L}(E)$ la projection sur G parallèlement à F, alors D est la matrice dans la base $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ de G de l'endomorphisme induit par $p \circ u$ sur G.
- De même, dans le cas où $C = 0$, D est la matrice dans la base $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ de l'endomorphisme induit par u sur G.

Ex. 22. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure si, et seulement si :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad u(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i),$$

  c'est-à-dire si, et seulement si, u laisse stable chacun des $F_i = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$.
- On retrouve le fait que, si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure et si u est bijectif, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^{-1})$ est également triangulaire supérieure. En effet, si c'est le cas, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $u(F_i) \subset F_i$ puis, comme u est bijectif, $\dim u(F_i) = \dim F_i$ donc $u(F_i) = F_i$ et enfin $F_i = u^{-1}\big(u(F_i)\big) = u^{-1}(F_i)$.

Proposition 14

Soit E de dimension finie tel que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Si $\mathcal{B}$ est une base adaptée à cette décomposition, alors l'endomorphisme u stabilise chaque E_i si, et seulement si, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_p \end{pmatrix},$$

où, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, la matrice A_i est carrée de taille $\dim E_i$.

Dans ce cas, chacun des blocs diagonaux A_i est la matrice de l'endomorphisme induit par u sur E_i dans la base de E_i extraite de $\mathcal{B}$.

Démonstration. Pour $i \in [\![1,p]\!]$, notons $\mathcal{B}_i$ la base de E_i extraite de $\mathcal{B}$; le sous-espace E_i est alors stable par u si, et seulement si, les vecteurs de $\mathcal{B}_i$ ont pour image par u un vecteur de E_i, c'est-à-dire une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{B}_i$. D'où l'équivalence annoncée et l'interprétation des blocs diagonaux A_i. □

Ex. 23. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale si, et seulement si, u stabilise chaque droite $\mathrm{Vect}(e_i)$ pour $i \in [\![1,n]\!]$.

IV Trace

1 Trace d'une matrice

Définition 5

La **trace** d'une matrice carrée A, notée $\operatorname{tr} A$, est la somme de ses coefficients diagonaux ; autrement dit, si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors on a $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Remarque Une matrice carrée et sa transposée ont même trace.

Proposition 15

L'application $\operatorname{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Immédiat en introduisant les coefficients des matrices. □

Proposition 16

Pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p} \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Démonstration page 29

Principe de démonstration. On exprime $\operatorname{tr}(AB)$ à l'aide d'une somme double, et l'on constate que $\operatorname{tr}(BA)$ s'exprime à l'aide de la même somme.

Remarque Dans la proposition précédente, si $n \neq p$, les matrices A et B sont de tailles différentes, mais les matrices AB et BA sont bien carrées : on a $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $BA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Ex. 24. Pour $n \geqslant 1$, il n'existe aucun couple $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $AB - BA = I_n$. En effet, si un tel couple existait, on aurait $\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(I_n) = n$. Or, par linéarité de la trace, puis par la proposition 16, on a :

$$\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0 \neq n.$$

Corollaire 17

Deux matrices semblables ont même trace.

Démonstration. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Supposons A et B semblables. Soit $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Par associativité du produit matriciel et en utilisant la proposition 16 :

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(B) &= \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}\big((P^{-1})(AP)\big)\\ &= \operatorname{tr}\big((AP)(P^{-1})\big) = \operatorname{tr}\big((A)(PP^{-1})\big) = \operatorname{tr}(AI_n) = \operatorname{tr}(A).\end{aligned}$$ □

2 Trace d'un endomorphisme

Définition 6

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **trace** de u, et l'on note $\operatorname{tr}(u)$, la trace commune des matrices représentant u dans une base de E.

Démonstration. La validité de cette définition vient du fait que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, les matrices $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ sont semblables, d'après la formule de changement de base pour les endomorphismes ; elles ont donc même trace d'après le corollaire 17. □

Proposition 18

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. L'application $\operatorname{tr} : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur E et vérifie de plus :

$$\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2 \quad \operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u).$$

Démonstration page 29

Principe de démonstration. Fixer une base $\mathcal{B}$ de E et raisonner matriciellement.

Ex. 25. En dimension finie, la trace d'un projecteur est égale à son rang. Soit en effet p un projecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Puisque p est un projecteur, $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont supplémentaires dans E. Ainsi, si l'on note $r = \dim \operatorname{Im} p = \operatorname{rg} p$, et si l'on considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ adaptée à la décomposition $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$, alors on a :

Exo 1.14

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \operatorname{Diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r \text{ termes}}, 0, \ldots, 0).$$

Exo 1.15

Il est alors immédiat que $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{tr}\big(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p)\big) = r$, c'est-à-dire $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$.