MATHS ET INFORMATIQUE

BCPST 2

Arnaud Bégyn | Thierry Gaspari | Florian Marty | Thierry Marengo

MATHS ET INFORMATIQUE
BCPST 2

MÉTHODES & EXERCICES

2e édition

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-083746-5

Table des matières

Avant-propos

Ce livre de méthodes de résolution d'exercices et de corrigés couvre le nouveau programme 2022 des classes préparatoires BCPST seconde année. C'est un programme très riche, qui aborde beaucoup de nouvelles notions, aussi bien en analyse qu'en algèbre ou en probabilités.

Ce livre a pour objectif de permettre au lecteur d'aller à l'essentiel, en un minimum de temps.

Chaque chapitre commence par lister un ensemble de méthodes pour aider les étudiants à démarrer dans les exercices et à savoir ce qu'on leur demande d'apprendre. Suivent les exercices qui sont issus d'archives personnelles d'enseignants en BCPST et d'annales de concours. Ensuite il est proposé des indications spécifiques à chaque exercice pour les aider à choisir la bonne piste de recherche. Puis tous les exercices sont corrigés ; les corrections sont rédigées avec un maximum de détail, dans le souci qu'elles soient accessibles à tous les étudiants.

L'aspect très progressif de cet ouvrage, et sa présentation basée sur l'essentiel, en font un outil parfaitement adapté au haut niveau exigé par les concours accessibles par la voie BCPST. Ses nombreux exercices corrigés et de tous niveaux permettront aussi aux étudiants de s'approprier ou de réviser rapidement leur cours de mathématiques pendant l'année.

Chapitre 1

Polynômes

Thèmes abordés dans les exercices

— Opérations sur les polynômes
— Ecriture développée d'un polynôme
— Racines d'un polynôme
— Ecriture factorisée d'un polynôme
— En informatique, manipulation de listes qui représentent les polynômes

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

— Unicité de l'écriture des polynômes
— Coefficient dominant et degré d'un polynôme
— Définition et propriétés d'une racine d'un polynôme
— Relation entre degré et nombre de racines
— Ordre de multiplicité d'une racine
— Théorème de d'Alembert-Gauss

Les méthodes à retenir

Pour étudier ou utiliser les propriétés des polynômes	— Utiliser l'unicité de l'écriture : deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients $\hookrightarrow$ **Exercices 1.5, 1.6, 1.7, 1.10 et 1.13** — Utiliser le fait que le nombre de racines distinctes d'un polynôme non nul est majoré par son degré $\hookrightarrow$ **Exercices 1.9 et 1.11** — Utiliser le comportement en $\pm\infty$: quand $x \to \pm\infty$, $P(x)$ est équivalent au terme de plus haut degré. $\hookrightarrow$ **Exercice 1.3**
Pour déterminer ou utiliser les racines ou l'écriture factorisée d'un polynôme	— Appliquer les formules habituelles sur les polynômes de degré 2. $\hookrightarrow$ **Exercices 1.4, 1.5 et 1.6** — Utiliser le fait que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si α est une racine de P, alors le conjugué $\overline{\alpha}$ est une racine de P. $\hookrightarrow$ **Exercices 1.7 et 1.8** — Dans $\mathbb{C}$, se ramener à la résolution de l'équation $z^n = 1$. $\hookrightarrow$ **Exercices 1.2, 1.4 et 1.12** — Utiliser le théorème de d'Alembert-Gauss. $\hookrightarrow$ **Exercice 1.8**

Énoncés des exercices

1.1 Calculs sur des polynômes avec Python

En informatique, un polynôme non nul de degré n qui s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ peut être représenté par la liste $[a_0, \ldots, a_n]$. Par exemple, $9X^5 - 7X^2 + X + 4$ est représenté par la liste $[4, 1, -7, 0, 0, 9]$. Le polynôme nul est codé par la liste vide $[]$.

a) Ecrire en Python une fonction `derivi(P)` qui prend une telle liste en entrée et qui renvoie la liste représentant le polynôme dérivé P'.

b) Créer une fonction qui, après avoir pris en entrée un polynôme P et un entier naturel r, retourne $P^{(r)}$ qui est la dérivée r-ième de P.

c) Ecrire une fonction `primitive(P)` qui prend le polynôme P en entrée puis qui retourne la primitive de P qui s'annule en 0.

1.2 Racines complexes de l'unité

a) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Déterminer les racines n-ièmes de l'unité, c'est-à-dire les racines complexes du polynôme $X^n - 1$.

b) Donner la liste des racines n-ièmes de l'unité dans les cas particuliers : $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$.

1.3 Polynômes de degré impair

a) Démontrer que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair a au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

b) Prouver que ce n'est plus nécessairement le cas pour un polynôme de degré pair.

1.4 Factorisation d'un polynôme

a) Déterminer les racines complexes du polynôme $P(X) = X^8 + X^4 + 1$.

b) En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

1.5 Recherche des racines d'un polynôme de degré 3

On considère le polynôme $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 1$.

a) Trouver une racine évidente α de Q, puis factoriser Q par $(X - \alpha)$.

b) En déduire toutes les racines de Q.

1.6 Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples

a) Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x > 0, \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$.

En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$ sur $]0,+\infty[$.

b) Utiliser une méthode semblable pour primitiver $x \mapsto \frac{1}{x^2+5x+6}$ sur $]0,+\infty[$.

1.7 Recherche des racines d'un polynôme de degré 4

On considère le polynôme $\mathrm{A(X)} = \mathrm{X}^4 - 4\mathrm{X}^3 + 11\mathrm{X}^2 - 14\mathrm{X} + 10$.

a) Vérifier que $(1+i)$ est racine de A.

b) En déduire toutes les racines complexes, puis toutes les racines réelles, de A.

1.8 Factorisation d'un polynôme de degré 4 à coefficients réels

Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, de degré 4, sans racine réelle. Montrer que P est le produit de deux polynômes de degré 2 à coefficients réels.

1.9 Polynômes solutions d'une équation fonctionnelle

Déterminer les polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = \mathrm{P}(x+1)$.

1.10 Polynôme solution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle du second degré :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ ty''(t) - 2y'(t) + 4y(t) = 4t^4 + 12t - 6.$$

Déterminer un polynôme P solution de cette équation.

1.11 Polynômes de Tchebychev

On considère la suite $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ définie par :

$$\mathrm{T}_0(\mathrm{X}) = 1, \quad \mathrm{T}_1(\mathrm{X}) = \mathrm{X} \quad \text{et, pour tout entier } n \geqslant 2, \quad \mathrm{T}_n(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n-1}(\mathrm{X}) - \mathrm{T}_{n-2}(\mathrm{X}).$$

a) Donner le degré de T_n et son coefficient dominant.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout réel a, $\mathrm{T}_n(\cos a) = \cos(na)$.

c) En déduire les racines de T_n dans $[-1,1]$, puis toutes les racines de T_n.

1.12 Utilisation des racines de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les racines complexes du polynôme $\mathrm{Q(X)} = (\mathrm{X}+i)^n - (\mathrm{X}-i)^n$.

1.13 Solution particulière d'une équation différentielle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le polynôme P_n tel que $\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_n' = \dfrac{1}{n!}\mathrm{X}^n$.

Du mal à démarrer ?

1.1

a) Remarquer que, pour $k \geqslant 1$, la dérivée de $a_k X^k$ est $k a_k X^{k-1}$.

b) Utiliser une boucle `for` pour répéter plusieurs fois la fonction précédente.

c) Commencer par déterminer une primitive de $a_k X^k$.

1.2

a) Résoudre l'équation $z^n = 1$ en travaillant avec la forme exponentielle du complexe z : $z = re^{i\alpha}$, avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in [0, 2\pi[$.

b) Appliquer le résultat précédent pour les valeurs de n données. Pour chaque n, il y a exactement n racines n-ièmes de l'unité.

1.3

a) Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

b) Penser à un polynôme de degré 2 bien connu.

1.4

a) Appliquer un changement de variables $Z = X^4$ pour se ramener à un polynôme de degré 2.

b) Dans $\mathbb{C}[X]$, on a obtenu 8 racines différentes pour P qui est de degré 8, donc la factorisation est immédiate. Pour factoriser dans $\mathbb{R}[X]$, remarquer que les termes de la forme $(X - a)(X - \overline{a})$ sont des polynômes à coefficients réels.

1.5

a) Calculer $Q(k)$ pour k prenant des valeurs entières très petites. Pour la factorisation, déterminer par identification les réels a, b, c tels que $Q(X) = (X - \alpha)(aX^2 + bX + c)$.

b) Il reste à obtenir les racines d'un polynôme de degré 2. Soit elles sont évidentes, soit on utilise le discriminant.

1.6

a) Ecrire tous les termes avec le même dénominateur puis identifier les coefficients.

b) Chercher les deux racines x_1 et x_2 de $X^2 + 5X + 6$ puis procéder de même qu'à la première question pour obtenir une décomposition de la forme $\dfrac{1}{x^2 + 5x + 6} = \dfrac{a}{x - x_1} + \dfrac{b}{x - x_2}$.

1.7

a) Calculer $A(1 + i)$.

b) Que peut-on dire de $A(1 - i)$?

1.8 Appliquer le théorème de d'Alembert-Gauss. Si un complexe a est racine de P, que peut-on dire du conjugué de a ?

1.9 Remarquer que le polynôme $Q(X) = P(X) - P(0)$ s'annule en 0, en 1, en 2, etc.

1.10 Chercher P sous la forme $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$. Commencer par obtenir n, le degré de P, puis procéder par identification pour obtenir les coefficients de P.

1.11

a) Utiliser les premiers polynômes de la suite pour conjecturer le degré et le coefficient dominant de T_n, puis utiliser une récurrence double pour rédiger la démonstration.

b) Encore une récurrence double.

c) Quand est-ce que $\cos(na) = 0$?

1.12 Transformer l'équation puis effectuer un changement de variable pour se ramener à une équation de la forme $Z^n = 1$.

1.13 Justifier que P_n doit être de degré n, puis chercher P_n sous la forme $P_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Corrigés des exercices

1.1

a) Si P n'est pas constant, la dérivée du polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$.

Si P est constant, alors $P' = 0$.

On traduit ces informations en Python :

```
def derivi(P) :
    Q=[]  ; n=len(P)
    for k in range(1,n) :
        Q=Q+[k*P[k]]
    # Ici P[k] représente le coefficient a_k
    return(Q)
```

On vérifie que la fonction renvoie le résultat attendu, même si P est constant, ou nul.

b) On propose la solution suivante :

```
def derivmultiple(P,r) :
    Q=P
    for k in range(r) :
        Q=derivi(Q)
    return(Q)
```

Comme pour le programme précédent, on vérifie que la fonction retourne ce qui est attendu pour les cas particuliers : polynôme nul ou constant, $r = 0$, etc.

c) Si P n'est pas nul, la primitive de $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ qui s'annule en 0 est $Q = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_{j-1}}{j} X^j$. Si P est nul, cette primitive est $Q = 0$. On peut donc écrire :

```
def primitive(P) :
    if P==[] :
        Q=[]
    else :
        Q=[0]  ; n=len(P)
        for k in range(1,n+1) :
            Q=Q+[P[k-1]/k]
    return(Q)
```

1.2

a) La méthode est à retenir : pour résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation de la forme $z^n = y$, on écrit tous les nombres présents avec leur écriture exponentielle. Ici, on veut résoudre $z^n = 1$. On remarque que $1 = 1.e^{i0}$. On cherche z sous la forme $z = re^{i\alpha}$.

On a : $z^n = 1 \Leftrightarrow r^n e^{ina} = 1.e^{i0}$.

En identifiant module et argument on a :

- d'une part, $r^n = 1 \Leftrightarrow r = 1$ car r est un réel positif ;
- d'autre part, $n\alpha = 0[2\pi] \Leftrightarrow \alpha = 0[\frac{2\pi}{n}]$, ce qui signifie qu'il existe k dans $\{0,\dots,n-1\}$ tel que $\alpha = 0 + k\frac{2\pi}{n}$.

Donc il y a n solutions de la forme $z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0,\dots,n-1\}$.

b) Lorsque $n = 3$: il y a trois racines cubiques de l'unité, qui sont : $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

En notant $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, ces racines s'écrivent : $1, j, j^2$.

Lorsque $n = 4$: il y a quatre racines 4-èmes de l'unité, qui sont : $1, i, -1, -i$.

Lorsque $n = 5$: il y a cinq racines 5-èmes de l'unité, qui sont : $1, e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}}$.

En notant $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, ces racines s'écrivent : $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$.

1.3

a) Soit P dans $\mathbb{R}[X]$ de degré impair. Notons d le degré de P et a_d le coefficient dominant de P. En $\pm\infty$, $P(x) \sim a_d x^d$. Puisque d est impair, $\lim_{x\to-\infty} x^d = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^d = +\infty$. Ainsi la fonction P est continue et change de signe sur $\mathbb{R}$. Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe (au moins) un réel a tel que $P(a) = 0$.

b) Le contre-exemple est connu : le polynôme $P(X) = X^{2n} + 1$ n'a aucune racine réelle, puisque : $\forall x \in \mathbb{R}, x^{2n} + 1 \geqslant 1$.

1.4

a) Soit z un nombre complexe. Pour résoudre l'équation $P(z) = 0$ on pose $w = z^4$. Alors

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow w^2 + w + 1 = 0 \Leftrightarrow w = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ ou } w = e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

Ensuite on résout les deux équations : $z^4 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z^4 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ avec la même méthode que dans l'exercice 1.2. On pose $z = re^{i\theta}$ et on a :

$$z^4 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow r^4 = 1 \text{ et } 4\theta = \frac{2\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow r = 1 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{6}[\frac{\pi}{2}]$$

Par ailleurs

$$z^4 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow r = 1 \text{ et } \theta = -\frac{\pi}{6}[\frac{\pi}{2}]$$

On obtient au final huit racines complexes de P :

$$\{e^{i\frac{\pi}{6}}; e^{i\frac{4\pi}{6}}; e^{i\frac{7\pi}{6}}; e^{i\frac{10\pi}{6}}; e^{-i\frac{\pi}{6}}; e^{i\frac{2\pi}{6}}; e^{i\frac{5\pi}{6}}; e^{i\frac{8\pi}{6}}\}$$

(les fractions sont volontairement non simplifiées).

b) Puisque P est de degré 8, on a bien obtenu toutes les racines de P et ce sont toutes des racines simples. De plus P est un polynôme unitaire (son coefficient dominant vaut 1) donc la factorisation de P dans $\mathbb{C}$ est :

$$\begin{aligned}\mathrm{P(X)} &= (\mathrm{X}-e^{i\frac{\pi}{6}})(\mathrm{X}-e^{-i\frac{\pi}{6}})(\mathrm{X}-e^{i\frac{2\pi}{6}})(\mathrm{X}-e^{-i\frac{2\pi}{6}})\\ &\quad(\mathrm{X}-e^{i\frac{4\pi}{6}})(\mathrm{X}-e^{-i\frac{4\pi}{6}})(\mathrm{X}-e^{i\frac{5\pi}{6}})(\mathrm{X}-e^{-i\frac{5\pi}{6}}).\end{aligned}$$

Aucune de ces racines n'est réelle. Avec les formules d'Euler on a :

$$\begin{aligned}(\mathrm{X}-e^{i\frac{\pi}{6}})(\mathrm{X}-e^{-i\frac{\pi}{6}}) &= \mathrm{X}^2-(e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{-i\frac{\pi}{6}})\mathrm{X}+e^{i\frac{\pi}{6}}e^{-i\frac{\pi}{6}}\\ &= \mathrm{X}^2-2\cos(\frac{\pi}{6})\mathrm{X}+1.\end{aligned}$$

En procédant de même dans les autres termes, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{P(X)} &= (\mathrm{X}^2-2\cos(\frac{\pi}{6})\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2-2\cos(\frac{2\pi}{6})\mathrm{X}+1)\\ &\quad(\mathrm{X}^2-2\cos(\frac{4\pi}{6})\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2-2\cos(\frac{5\pi}{6})\mathrm{X}+1)\end{aligned}$$

puis, en déterminant les valeurs des cosinus :

$$\mathrm{P(X)} = (\mathrm{X}^2-\sqrt{3}\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2+\sqrt{3}\mathrm{X}+1).$$

Cette écriture est la factorisation de P dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

1.5

a) On remarque que $\mathrm{Q}(-1)=0$. On cherche alors trois réels a, b, c tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ x^3-2x^2-2x+1=(x+1)(ax^2+bx+c).$$

En développant, cette égalité se réécrit :

$$x^3-2x^2-2x+1=ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c.$$

Ceci est une égalité polynômiale, donc on peut identifier les coefficients pour obtenir le système :

$$\begin{cases} a &= 1\\ a+b &= -2\\ b+c &= -2\\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1\\ b &= -3\\ c=1 \end{cases}.$$

Ainsi : $\mathrm{Q(X)}=(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2-3\mathrm{X}+1)$.

b) Il ne reste qu'à résoudre : $x^2-3x+1=0$. Avec les formules habituelles sur le discriminant on obtient $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Finalement Q a trois racines : $-1, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

1.6

a) On cherche deux réels a et b tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \frac{1}{x(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}.$$

En multipliant par $x(x+1)$ puis en développant, cette égalité se réécrit : $1=a(x+1)+bx=(a+b)x+a$.
Cette égalité est vraie pour tout x dans $]0,+\infty[$, donc pour un nombre infini de réels x. Ainsi les deux polynômes 1 et $(a+b)\mathrm{X}+a$ sont égaux, donc on peut identifier leurs coefficients :

$$\begin{cases} a &= 1\\ a+b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1\\ b &= -1 \end{cases}.$$

Finalement $g(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.
Ces fonctions sont continues donc primitivables sur $]0,+\infty[$ et, en notant G une primitive de g :

$$\forall x\in]0,+\infty[,\ \mathrm{G}(x)=\mathrm{C}+\ln|x|-\ln|x+1|=\mathrm{C}+\ln\frac{x}{x+1}.$$

b) Le polynôme $\mathrm{X}^2+5\mathrm{X}+6$ a pour racines -2 et -3, donc $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x+3)(x+2)}=\frac{a}{x+3}+\frac{b}{x+2} &\Leftrightarrow 1=a(x+2)+b(x+3)\\ &\Leftrightarrow 1=(a+b)x+(2a+3b)\\ &\Leftrightarrow a+b=0 \text{ et } 2a+3b=1\\ &\Leftrightarrow a=-1 \text{ et } b=1.\end{aligned}$$

Ainsi une primitive H de $h: x\mapsto \frac{1}{x^2+5x+6}$ s'écrit :

$$\forall x>0,\ h(x)=\mathrm{C}+\ln|x+2|-\ln|x+3|=\mathrm{C}+\ln\frac{x+2}{x+3}.$$

1.7

a) On peut effectuer le calcul de $\mathrm{A}(1+i)$ en utilisant les écritures algébriques. Il faut alors remarquer que : $(1+i)^2=2i$, $(1+i)^3=2i(1+i)=-2+2i$ et $(1+i)^4=(2i)^2=-4$.
On peut aussi utiliser les écritures exponentielles : $(1+i)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $(1+i)^2=2e^{i\frac{\pi}{2}}=2i$, $(1+i)^3=2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $(1+i)^4=4e^{i\pi}=-4$.
On obtient rapidement $\mathrm{A}(1+i)=0$.

b) A est un polynôme à coefficients réels et $1+i$ est racine de A, donc le conjugué de $1+i$, c'est-à-dire $1-i$, est aussi racine de A. Ainsi

$$\mathrm{A(X)}=(\mathrm{X}-1-i)(\mathrm{X}-1+i)\mathrm{D(X)}$$

avec D un polynôme de degré 2 à déterminer. Puisque A est unitaire, D est aussi unitaire. Posons $\mathrm{D}=\mathrm{X}^2+b\mathrm{X}+c$.

On remarque que $(X-1-i)(X-1+i) = X^2-2X+2$. Ainsi, en développant et en identifiant les coefficients :

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\Leftrightarrow \quad A(X) = (X^2-2X+2)D(X)\\
&\Leftrightarrow \quad X^4-4X^3+11X^2-14X+10 \\
&\qquad = (X^2-2X+2)(X^2+bX+c)\\
&\Leftrightarrow \quad X^4-4X^3+11X^2-14X+10\\
&\qquad = X^4+(b-2)X^3+(c-2b+2)X^2+(2b-2c)X+2c\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b-2 &= -4\\ c-2b+2 &= 11\\ 2b-2c &= -14\\ 2c &= 10\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b &= -2\\ c &= 5\end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi A s'écrit sous cette forme :

$$A(X) = (X^2-2X+2)(X^2-2X+5).$$

Le polynôme A a quatre racines complexes : $1+i, 1-i$, et les deux racines de X^2-2X+5 qui sont, avec la formule du discriminant : $1+2i$ et $1-2i$.

Par contre le polynôme A n'a aucune racine réelle.

1.8

Considérons P un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$, de degré 4, sans racine réelle. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, P a une racine complexe α. De plus le conjugué $\overline{\alpha}$ est lui aussi racine de P. Ainsi P peut se factoriser sous la forme :

$$P(X) = (X-\alpha)(X-\overline{\alpha})Q(X)$$

avec Q un polynôme unitaire de degré 2, à coeffients réels et sans racine réelle. Le même argument appliqué à Q permet d'affirmer l'existence d'un complexe non réel β tel que $Q(X) = (X-\beta)(X-\overline{\beta})$.

On remarque enfin que $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2-(\alpha+\overline{\alpha})X+\alpha\overline{\alpha}$. Or $c = \alpha+\overline{\alpha}$ est un nombre réel car c est le double de la partie réelle de α, et $d = \alpha\overline{\alpha}$ est lui aussi un réel car d est le carré du module de α.

Ainsi $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$ est un polynôme de degré 2 à coefficients réels, sans racine réelle. Le même argument est valable pour $(X-\beta)(X-\overline{\beta})$, donc P est bien le produit de deux polynômes de degré 2 à coefficients réels.

1.9

Considérons tout d'abord P une solution du problème, c'est-à-dire que $P \in \mathbb{R}[X]$ et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = P(x+1)$.

Tout d'abord, montrons par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0)$.

Il est trivial que $P(0) = P(0)$, donc la proposition est vraie pour $n = 0$.

Si, pour un entier n fixé, $P(n) = P(0)$, alors la relation donnée par l'énoncé prouve que $P(n+1) = P(n) = P(0)$. Ainsi la proposition est héréditaire.

On conclut avec le principe de récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $P(n) = P(0)$.

Posons maintenant $Q(X) = P(X)-P(0)$. La fonction polynômiale Q s'annule en tout entier $n \in \mathbb{N}$. Or le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par le degré de ce polynôme. Puisque Q a une infinité de racines, on en déduit que Q est le polynôme nul. Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = P(0)$. Autrement dit, P est un polynôme constant.

On vient de prouver qu'un polynôme solution du problème posé par l'énoncé est nécessairement un polynôme constant.

Réciproquement, si P est un polynôme constant alors $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = P(x+1)$.

En conclusion, un polynôme P vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = P(x+1)$ si, et seulement si, P est constant.

1.10

Soit P un polynôme solution de cette équation :

$$XP''(X)-2P'(X)+4P(X) = 4X^4+12X-6.$$

Commençons par déterminer n, le degré de P. Il est clair que $n \geqslant 4$, sinon le terme $4X^4$ n'apparaîtrait pas à droite de l'égalité.

On sait que $\deg(XP'') = 1+\deg(P'') = n-1$; $\deg(-2P') = n-1$; $\deg(P) = n$.

De plus $\deg(XP''-2P'+4P) = \max(\deg(XP''),\deg(-2P'),\deg(P))$.

Donc $\deg(XP''-2P'+4P) = \deg(P) = n$.

Mais puisque P vérifie l'équation différentielle on sait aussi que : $\deg(XP''-2P'+4P) = \deg(4X^4+12X-6) = 4$.

On a donc $n = 4$. On note :

$$P = \sum_{k=0}^{4} a_k X^k = a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3+a_4X^4.$$

$$P' = a_1+2a_2X+3a_3X^2+4a_4X^3$$

$$P'' = 2a_2+6a_3X+12a_4X^2$$

Pour simplifier on note $S(X) = XP''(X)-2P'(X)+4P(X)$. On a :

$$\begin{aligned}
S(X) \quad = \quad & (4a_0-2a_1)+(4a_1-4a_2+2a_2)X+(4a_2-6a_3+6a_3)X^2\\
&+(4a_3-8a_4+12a_4)X^3+(4a_4)X^4
\end{aligned}$$

Par conséquent, en procédant par identification :

$$\begin{aligned}
S(X) = 4X^4+12X-6 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4a_0-2a_1 &= -6\\ 4a_1-2a_2 &= 12\\ 4a_2 &= 0\\ 4a_3+4a_4 &= 0\\ 4a_4 &= 4\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 &= 0\\ a_1 &= 3\\ a_2 &= 0\\ a_3 &= -1\\ a_4 &= 1\end{cases}
\end{aligned}$$

On a donc obtenu : $P = X^4 - X^3 + 3X$. L'équation polynômiale a été résolue par équivalences successives, donc on peut conclure que le polynôme $P = X^4 - X^3 + 3X$ est l'unique polynôme solution de l'équation différentielle.

1.11

a) Pour cette question il faut prendre l'initiative de calculer T_2, T_3, voire même T_4 pour conjecturer le résultat à démontrer.

$T_2(X) = 2XT_1(X) - T_0(X) = 2X^2 - 1$.

$T_3(X) = 2XT_2(X) - T_1(X) = 4X^3 - 3X$.

$T_4(X) = 2XT_3(X) - T_2(X) = 8X^4 - 8X^2 + 1$.

Voici donc la proposition que l'on conjecture : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on note $\mathscr{P}(n)$: « T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}. »

Démontrons cette propriété à l'aide d'une récurrence double.

- Aux rangs initiaux $n = 1$ et $n = 2$.

  $T_1 = X$ est un polynôme de degré 1 et de coefficient dominant $1 = 2^{1-1}$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

  $T_2 = 2X^2 - 1$ est de degré 2 et de coefficient dominant $2 = 2^{2-1}$. Donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

- Hérédité.

  On fixe $n \geqslant 3$ et on suppose $\mathscr{P}(n-2)$ et $\mathscr{P}(n-1)$ vraies. Alors :

  ⋆ $2XT_{n-1}$ est un polynôme de degré $1+(n-1) = n$, de coefficient dominant $2.2^{n-2} = 2^{n-1}$.

  ⋆ T_{n-2} est un polynôme de degré $(n-2)$.

  Et on sait que $T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}$, donc T_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant 2^{n-1}.

- On conclut, grâce au principe de récurrence double, que pour tout entier naturel n non nul, T_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant 2^{n-1}.

Attention, ceci est faux pour $n = 0$!

b) Pour $n \in \mathbb{N}$ notons $\mathscr{Q}(n)$ la proposition :

$$\mathscr{Q}(n) : \text{« } \forall a \in \mathbb{R},\ T_n(\cos a) = \cos(na). \text{ »}$$

Soit a un réel quelconque.

$T_0 = 1$ donc $T_0(\cos a) = 1$ et $\cos(0 \times a) = cos(0) = 1$.

$T_1 = X$ donc $T_1(\cos a) = \cos(a) = \cos(1 \times a)$.

Donc la propriété est vraie aux rangs 0 et 1.

Fixons $n \geqslant 2$ et supposons la propriété vraie aux rangs $(n-1)$ et $(n-2)$. Alors :

$$\begin{aligned} T_n(\cos(a)) &= 2\cos(a)T_{n-1}(\cos(a)) - T_{n-2}(\cos(a)) \\ &= 2\cos(a)\cos((n-1)a) - \cos((n-2)a) \\ &\quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \cos(na) + \cos((n-2)a) - \cos((n-2)a) \\ &\quad \text{(en utilisant : } 2\cos b \cos c = \cos(b+c) \\ &\qquad\qquad + \cos(b-c)) \\ &= \cos(na). \end{aligned}$$

Le principe de récurrence double permet de conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R},\ T_n(\cos a) = \cos(na).$$

c) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Soit $x \in [-1,1]$. Alors il existe a dans $[0,\pi]$ tel que $x = \cos(a)$. On résout :

$$\begin{aligned} T_n(x) = 0 &\Leftrightarrow T_n(\cos a) = 0 \Leftrightarrow \cos(na) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, na = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{aligned}$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$ on note $u_k = \frac{1}{n}(\frac{\pi}{2} + k\pi)$. Les réels qui s'écrivent $x_k = \cos(u_k)$, avec $k \in \mathbb{Z}$, sont des racines de T_n. De plus, $0 < u_0 < u_1 \ldots < u_{n-1}$ et $u_{n-1} = \dfrac{1}{n}(\dfrac{\pi}{2} + (n-1)\pi) = (1 - \dfrac{1}{2n})\pi < \pi$. Puisque la fonction $\cos : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ est injective, les réels $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont deux à deux distincts et forment donc n racines distinctes de T_n. Or T_n est un polynôme de degré n donc n'a pas d'autres racines. En conclusion, le polynôme T_n a exactement n racines réelles qui sont les nombres x_k avec $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

1.12 On suppose $z \neq i$ car $Q(i) = (2i)^n \neq 0$.

$$Q(z) = 0 \Leftrightarrow (z+i)^n = (z-i)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1.$$

On pose $Y = \dfrac{z+i}{z-i}$ et on cherche Y tel que $Y^n = 1$. Pour cela on écrit Y sous forme exponentielle $Y = re^{i\theta}$ puis on obtient, après des calculs déjà détaillés dans l'exercice 1.2, que :

$$Y^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \{0, \ldots, n-1\}, Y = e^{i\frac{2k\pi}{n}}.$$

Maintenant, on fixe $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ et on résout l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} &\Leftrightarrow z + i = e^{i\frac{2k\pi}{n}}(z-i) \\ &\Leftrightarrow (1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}})z = -i(1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}) \end{aligned}$$

On veut diviser, ce qui n'est pas possible si $k=0$. Il faut donc prendre $k \in \{1,\dots,n-1\}$:

$$\frac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \Leftrightarrow z = -i \times \frac{1+e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}} \Leftrightarrow z = -i \times \frac{2\cos(\frac{k\pi}{n})}{-2i\sin(\frac{k\pi}{n})}$$

Pour la dernière ligne, c'est la transformation habituelle de $1+e^{i\alpha}$ par la technique de l'arc moitié, qui consiste à factoriser par $e^{i\frac{\alpha}{2}}$. Après simplification :

$$\mathrm{A}(z) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \{1,\dots,n-1\} | z = \frac{\cos(\frac{k\pi}{n})}{\sin(\frac{k\pi}{n})}.$$

1.13 Soit P_n un polynôme tel que $\mathrm{P}_n - \mathrm{P}'_n = \frac{1}{n!}\mathrm{X}^n$. Déjà $\mathrm{P}_n - \mathrm{P}'_n$ est un polynôme de même degré que X^n, donc P_n est de degré n. On peut écrire : $\mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ avec $a_n \neq 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_n - \mathrm{P}'_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}\mathrm{X}^k \\ &= a_n \mathrm{X}^n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - (k+1)a_{k+1})\mathrm{X}^k. \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients on obtient :

$$a_n = \frac{1}{n!} \text{ et } \forall k \in \{0,\dots,n-1\}, a_k = (k+1)a_{k+1}.$$

Ces deux relations nous permettent de déterminer, l'un après l'autre, tous les coefficients (a_k).

$$a_{n-1} = n a_n = \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

$$a_{n-2} = (n-1)a_{n-1} = \frac{1}{(n-2)!}$$

En réitérant, on obtient que :

$$\forall k \in \{0,\dots,n\},\ a_k = \frac{1}{k!}$$

Finalement on a :

$$\mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\mathrm{X}^k.$$

Pour conclure, un calcul immédiat et laissé au lecteur permet de vérifier la réciproque, c'est-à-dire que ce polynôme P_n satisfait bien : $\mathrm{P}_n - \mathrm{P}'_n = \frac{1}{n!}\mathrm{X}^n$.

Chapitre 2

Espaces vectoriels

Thèmes abordés dans les exercices

— Familles de vecteurs libres/liées
— Espace engendré par une famille de vecteurs
— Espaces vectoriels usuels
— Dimension d'un espace vectoriel
— Rang d'une famille de vecteurs
— En informatique, programmation de la méthode du pivot de Gauss

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

— Familles de vecteurs libres/liées
— Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel
— Familles génératrices d'un espace vectoriel
— Bases d'un espace vectoriel
— Coordonnées d'un vecteur dans une base
— Dimension d'un espace vectoriel
— Rang d'une famille de vecteurs

Les méthodes à retenir

Pour étudier la liberté d'une famille de vecteurs

— Si $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right)$ est une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$, on vérifie que pour $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$:

$$\alpha_1 \overrightarrow{u_1} + \cdots + \alpha_p \overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{0} \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$$

et on peut en déduire que la famille est libre.

$\hookrightarrow$ **Exercices 2.4, 2.5, 2.8, 2.11, 2.12, 2.13 et 2.14**

— Si $\mathbb{E}$ est un ensemble de polynômes, l'égalité fonctionnelle : $\alpha_1 \overrightarrow{u_1} + \cdots + \alpha_p \overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{0}$ permet de dire que tous les coefficeints du polynôme du membre de gauche sont nuls.

$\hookrightarrow$ **Exercices 2.4 et 2.11**

— Si $\mathbb{E}$ est un ensemble de fonctions numériques, l'égalité fonctionnelle : $\alpha_1 \overrightarrow{u_1} + \cdots + \alpha_p \overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{0}$ donne une égalité valable pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il est alors judicieux de l'appliquer pour certaines valeurs remarquables de x.

$\hookrightarrow$ **Exercices 2.8, 2.12 et 2.14**

— Si $\mathbb{E}$ est un ensemble de matrices, l'égalité : $\alpha_1 \overrightarrow{u_1} + \cdots + \alpha_p \overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{0}$ donne un système d'équations d'inconnues $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$. Il suffit alors de le résoudre.

$\hookrightarrow$ **Exercices 2.5 et 2.13**

— Si la famille est composée d'un seul vecteur, elle est libre si, et seulement si, il est non nul.
Si elle est composée de deux vecteurs, elle est libre si, et seulement si, ils sont non colinéaires.

$\hookrightarrow$ **Exercice 2.6**

Pour étudier le caractère générateur d'une famille de vecteurs

— Si $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right)$ est une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$, on vérifie que pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathbb{E}$ il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$:

$$\overrightarrow{v} = \alpha_1 \overrightarrow{u_1} + \cdots + \alpha_p \overrightarrow{u_p}$$

et on peut en déduire que la famille est génératrice de $\mathbb{E}$. Si on trouve une unique solution pour $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ on a alors démontré que $\mathscr{F}$ est une base.

$\hookrightarrow$ **Exercices 2.5, 2.6, 2.8, 2.12 et 2.13**

— Si $\mathbb{E}$ est un ensemble de fonctions numériques, l'égalité fonctionnelle précédente : $\overrightarrow{v} = \alpha_1 \overrightarrow{u_1} + \cdots + \alpha_p \overrightarrow{u_p}$ donne une égalité valable pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il est alors judicieux de l'appliquer pour certaines valeurs remarquables de x, afin de calculer les valeurs de $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$.

$\hookrightarrow$ **Exercice 2.8**

— Si $\mathbb{E}$ est un ensemble de matrices, l'égalité précédente : $\overrightarrow{v} = \alpha_1 \overrightarrow{u_1} + \cdots + \alpha_p \overrightarrow{u_p}$ donne un système d'équations d'inconnues $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$. Il suffit alors de le résoudre.

$\hookrightarrow$ **Exercices 2.5 et 2.13**

Pour montrer qu'un ensemble est un (sous-)espace vectoriel

— Dans la majorité des cas, on identifie un ensemble $\mathbb{F}$ plus grand que $\mathbb{E}$ (au sens de l'inclusion : $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$) pour lequel on connaît la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On montre alors que $\mathbb{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$.

$\hookrightarrow$ **Exercices 2.2, 2.3, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.12 et 2.13**

— Pour cela on vérifie que $\mathbb{E}$ est non vide (le plus simple est de montrer que $\overrightarrow{0} \in \mathbb{E}$), puis que $\mathbb{E}$ est stable par combinaison linéaire : $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \in \mathbb{E}^2 \Longrightarrow \overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v} \in \mathbb{E}$.

$\hookrightarrow$ **Exercices 2.2, 2.3, 2.6, 2.7, 2.9, 2.12 et 2.13**

— On peut aussi montrer que $\mathbb{E}$ est le noyau d'une application linéaire. Le cours permet alors de conclure que $\mathbb{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$.

$\hookrightarrow$ **Exercice 2.2**

— Inversement pour montrer qu'une partie $\mathbb{E}$ n'est pas un espace vectoriel, il faut montrer que $\overrightarrow{0} \notin \mathbb{E}$, ou que $\mathbb{E}$ n'est pas stable pour la multiplication par un scalaire (trouver $\left(\lambda, \overrightarrow{u}\right) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}$ tel que $\lambda . \overrightarrow{u} \notin \mathbb{E}$), ou que $\mathbb{E}$ n'est pas stable pour l'addition (trouver $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \in \mathbb{E}^2$ tel que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \notin \mathbb{E}$).

$\hookrightarrow$ **Exercices 2.2, 2.3, 2.7 et 2.9**

— Si on trouve une famille de vecteurs $\mathscr{B}$ de $\mathbb{F}$ telle que $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$, alors on sait par théorème que $\mathbb{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$.

$\hookrightarrow$ **Exercices 2.5, 2.8, 2.10 et 2.12**

Pour manipuler les bases d'un (sous-)espace vectoriel

— Pour trouver une base d'un espace vectoriel, on commence par chercher une famille génératrice, et on en extrait ensuite une famille libre (en ôtant les vecteurs de la famille qui sont combinaison linéaire des autres).

$\hookrightarrow$ **Exercices 2.2, 2.5, 2.6, 2.8, 2.10, 2.12 et 2.13**

— Si on montre que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{E}$, on peut alors déterminer la dimension de $\mathbb{E}$: $\dim(\mathbb{E}) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = \mathrm{rg}(\mathscr{B})$.

$\hookrightarrow$ **Exercices 2.2, 2.5, 2.6, 2.8, 2.10, 2.12 et 2.13**

— Réciproquement, pour montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{E}$, on a le choix entre montrer que $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = \dim(\mathbb{E})$, ou montrer que la famille est libre avec $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = \dim(\mathbb{E})$, ou montrer que la famille est génératrice de $\mathbb{E}$ avec $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = \dim(\mathbb{E})$.

$\hookrightarrow$ **Exercices 2.4, 2.11 et 2.14**

— Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ dans la base $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_p\right)$ revient à résoudre l'équation :
$\overrightarrow{v} = \alpha_1 \overrightarrow{u}_1 + \cdots + \alpha_p \overrightarrow{u}_p$, d'inconnue $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$.

$\hookrightarrow$ **Exercices 2.4, 2.12 et 2.14**

— Si on calcule le rang de la famille de vecteurs $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_p\right)$ alors il est inférieur ou égal à p, et est égal à p si et seulement si $\mathscr{B}$ est une base.

$\hookrightarrow$ **Exercices 2.4 et 2.11**

Énoncés des exercices

2.1 Utilisation de Python pour résoudre un système linéaire

a) On considère les vecteurs $u = (2,1)$ et $v = (1,-1)$. On cherche à savoir si le vecteur $w = (15,-3)$ est combinaison linéaire de u et de v, et à expliciter cette combinaison linéaire le cas échéant. Ce problème sur les espaces vectoriels revient à résoudre le système linéaire (S) :

$$(\mathrm{S})\begin{cases} 2x+y &= 15 \\ x-y &= -3 \end{cases}$$

Il peut être résolu de la manière suivante :

$$\begin{aligned}(\mathrm{S}) &\iff \begin{cases} 2x+y = 15 \\ 3y = 21 & \mathrm{L}_2 \longleftarrow \mathrm{L}_1-2\mathrm{L}_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x+y = 15 \\ y = 7 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases}\end{aligned}$$

Écrire en Python une fonction `Res2(M)`, qu'on testera avec `M=[[2,1,15],[1,-1,-3]]`, qui résout par le pivot de Gauss un système linéaire 2×2 (on ignorera les problèmes de nullité des coefficients).

b) On considère le système linéaire (S) :

$$(\mathrm{S})\begin{cases} x+y+z &= 6 \\ x-y+2z &= 5 \\ 2x+y-z &= 1 \end{cases}$$

Il peut être résolu de la manière suivante :

$$(\mathrm{S}) \iff \begin{cases} x+y+z = 6 \\ 2y-z = 1 & \mathrm{L}_2 \longleftarrow \mathrm{L}_1-\mathrm{L}_2 \\ \frac{1}{2}y+\frac{3}{2}z = \frac{11}{2} & \mathrm{L}_3 \longleftarrow \mathrm{L}_1-\frac{1}{2}\mathrm{L}_2 \end{cases}$$

On se retrouve avec un système linéaire à deux inconnues :

$$\begin{cases} 2y-z &= 1 \\ \frac{1}{2}y+\frac{3}{2}z &= \frac{11}{2} \end{cases}$$

Écrire en Python une fonction `Res3(N)`, qu'on testera avec `N=[[1,1,1,6],[1,-1,2,5],[2,1,-1,1]]`, qui mime la résolution précédente.