Thierry Gaspari

L'ORAL DE MATHS ET INFORMATIQUE AUX CONCOURS AGRO-VÉTO ET G2E

BCPST

ANNALES ET SUJETS ORIGINAUX CORRIGÉS

l'intégrale

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

NOUS NOUS ENGAGEONS EN FAVEUR DE L'ENVIRONNEMENT :

Nos livres sont imprimés sur des papiers certifiés pour réduire notre impact sur l'environnement.

Le format de nos ouvrages est pensé afin d'optimiser l'utilisation du papier.

Depuis plus de 30 ans, nous imprimons 70% de nos livres en France et 25% en Europe et nous mettons tout en œuvre pour augmenter cet engagement auprès des imprimeurs français.

Nous limitons l'utilisation du plastique sur nos ouvrages (film sur les couvertures et les livres).

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-086701-1

Avant-propos

Cet ouvrage propose des **exercices corrigés de préparation aux oraux des concours Agro-Véto et G2E**. Il s'adresse aux étudiants en seconde année de BCPST qui souhaitent **réussir l'écrit et l'oral de ces deux concours**. Les exercices sont des **sujets donnés aux concours**, ou bien des **sujets type** conçus conformément à la réforme des concours effective depuis 2023, en accord avec le nouveau programme 2022 des classes préparatoires BCPST.
Chaque exercice bénéficie d'une **correction complète avec des explications détaillées**, des rappels de cours, une variété de méthodes, des conseils tactiques et des explications sur les techniques de calcul. La progressivité de la difficulté des questions, ainsi que la profusion des explications dans les corrections, permettront à tout étudiant de réaliser des progrès notables. **Les** 170 **programmes informatiques sont suivis d'explications détaillées.** De plus, certains approfondissements proposés en fin d'exercices, signalés par le pictogramme , sont accessibles sur le site www.dunod.com, sur la page de l'ouvrage.
Pour les étudiants peu à l'aise en Mathématiques ou en Informatique, les explications fournies constitueront une ressource précieuse pour gagner en confiance et progresser. Les étudiants ayant pour unique objectif l'un des deux concours trouveront un intérêt évident à étudier les sujets de l'autre concours, car les thèmes abordés sont similaires, de même que les méthodes de résolution. Les questions de fin d'exercices sont à un niveau élevé, permettant ainsi aux étudiants les plus ambitieux de se confronter à des raisonnements complexes, en les préparant ainsi au mieux aux concours à venir.

Quand et comment utiliser cet ouvrage ?

Le livre peut être utilisé **dès le début de la seconde année**, afin de **se préparer aux khôlles et aux évaluations écrites**. Les **tableaux récapitulatifs** donnés au début des chapitres 2 et 4 permettront à l'étudiant de savoir quels exercices il peut aborder en fonction des chapitres étudiés en cours d'année. L'ouvrage peut aussi être utilisé **au moment de la préparation des oraux**, afin d'élever son niveau juste avant l'épreuve.
Dans les corrections, l'analyse des questions et les remarques méthodologiques sont séparées de la rédaction précise, qui est signalée par le pictogramme .

Les explications détaillées des programmes informatiques sont signalées par .

Présentation détaillée du livre

Cet ouvrage est séparé en deux parties :

La première partie concerne l'oral MPI (Mathématiques Pratiques et Informatique) du concours Agro-Véto, structuré en trois exercices distincts :

— L'oral commence par une **question de cours**. **Le chapitre** 1 **comporte les** 121 **questions posées au concours** 2023**, ainsi que toutes les réponses**. Le rapport du jury du concours 2023 indique que « *les questions de cours ne sont réussies qu'à* 70 % » et que « *l'effet n'est pas très positif quand la question* *de cours est imprécise ou bâclée* ». Ce chapitre 1 permettra aux étudiants d'être parfaitement préparés pour cette première partie de l'oral.

— Le deuxième moment consiste à **présenter l'exercice préparé**, qui est un exercice de Mathématiques contenant quelques questions d'informatique, l'étudiant disposant d'un ordinateur sur lequel il peut écrire ses programmes en langage Python. **Dans le chapitre** 2 **on présente** 20 **sujets complets, entièrement corrigés**. Certains ont été donnés au concours 2023, les sujets antérieurs à 2023 ont été aménagés de manière à être réalisés sur 40 minutes. **Le chapitre** 2 **débute par un tableau récapitulatif**, donnant pour chaque exercice sa difficulté et les thèmes abordés.

— Enfin, **la troisième séquence est un court exercice d'informatique donné sans préparation**. **Dans le chapitre** 3 **on présente** 15 **sujets, corrigés de façon très détaillée**. Ici encore tous les programmes informatiques sont expliqués avec beaucoup de soin et de pédagogie, pour permettre à l'étudiant de comprendre et progresser.

La seconde partie de l'ouvrage est consacrée à l'oral de Mathématiques et à l'oral d'informatique du concours G2E.

— **Dans le chapitre** 4 **on présente** 20 **exercices corrigés de l'oral de Mathématiques.** Lors de cet oral l'étudiant prépare puis présente deux exercices : l'un sur l'Analyse ou l'Algèbre, l'autre sur les Probabilités. **En début de chapitre** 4 **l'étudiant trouvera un tableau récapitulatif avec la difficulté de chaque exercice et les notions abordées**.

— **Le chapitre** 5 **est consacré à l'oral d'Informatique du concours G2E**. L'étudiant prépare puis présente un premier exercice, le jury lui donne ensuite un second exercice de même format à traiter sans préparation. **Cet ouvrage propose** 10 **sujets d'informatique complets**, corrigés avec beaucoup de détails et d'explications.

En conclusion

L'étudiant trouvera dans cet ouvrage des exercices classiques qui abordent l'ensemble des notions de Mathématiques et d'Informatique étudiées pendant les deux années de BCPST ; des explications méthodologiques et tactiques pour savoir comment gérer l'oral ; des corrections entièrement rédigées avec des explications sur le cours et les techniques de calcul ; 170 programmes Python détaillés et totalement expliqués.

Au final cet ouvrage est **bien plus qu'un recueil d'exercices corrigés** :
il permettra de mieux comprendre les notions abordées en Mathématiques et en Informatique pendant les deux années de classes préparatoires. Il aidera les étudiants qui en font l'acquisition dès le début de seconde année à préparer méthodiquement leurs khôlles. Il améliorera la compréhension des méthodes et des concepts mathématiques indispensables à l'écrit des concours Agro-Véto et G2E. Enfin il permettra des révisions efficaces en fin de seconde année, pour réussir les oraux.

Table des matières

Partie 1

Oraux du concours Agro-Véto

Oraux du concours Agro-Véto

CHAPITRE 1

Questions de cours

Toutes ces questions sont issues du concours Agro-Véto 2023.

Exercice 1.1 : Injectivité

Définition d'une application $f : E \to G$ injective.

$f : E \to G$ est injective si et seulement si tout élément de G a au plus un antécédent par f dans E.
Autre formulation : $f : E \to G$ est injective si et seulement si, pour tout y de G, l'équation $f(x) = y$ admet au maximum une solution x dans E.

Exercice 1.2 : Surjectivité

Définition d'une application $f : E \to G$ surjective.

$f : E \to G$ est surjective si et seulement si tout élément de G a au moins un antécédent par f dans E.
Autre formulation : $f : E \to G$ est surjective si et seulement si, pour tout y de G, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution x dans E.

Exercice 1.3 : Bijection réciproque

Pour $f : E \to F$ bijective, définir la fonction réciproque f^{-1}.

$f^{-1} : F \to E, y \mapsto f^{-1}(y) =$ l'unique antécédent de y par f dans E.
Autrement dit,

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Exercice 1.4 : Famille génératrice

Définition d'une famille génératrice dans un espace vectoriel E.

Une famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_q)$ est génératrice de E si et seulement si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \ldots, u_q$.

Exercice 1.5 : Liberté

Définition d'une famille libre de vecteurs dans un espace vectoriel E.

La famille $(u_1, \ldots, u_k)$ est libre si et seulement si la seule combinaison linéaire de cette famille qui soit nulle est la combinaison linéaire dont tous les coefficients sont nuls.

- *Autre formulation* :
La famille $(u_1, \ldots, u_k)$ est libre si et seulement si aucun vecteur de cette famille ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

- *Autre formulation* :
La famille $(u_1, \ldots, u_k)$ est libre si et seulement si :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1, k]\!], \quad \lambda_i = 0.$$

Exercice 1.6 : Base

Donner la définition d'une base d'un espace vectoriel.

La famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E si et seulement si $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre et génératrice de E.

Exercice 1.7 : Matrice inversible

Définition d'une matrice carrée inversible.

La matrice M est inversible si et seulement si il existe une matrice N telle que :

$$MN = NM = I_n.$$

Exercice 1.8 : Inverse d'une matrice d'ordre 2

Inversibilité d'une matrice carrée 2×2.

La matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Dans ce cas,

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.9 : Formule de changement de base

Soit P la matrice de passage d'une base $\mathscr{B}_1$ à une base $\mathscr{B}_2$ d'un espace vectoriel E de dimension n.

Si u est un vecteur de E, quelle relation lie $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(u)$?

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(u) = P\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(u).$$

Exercice 1.10 : Endomorphisme

Donner la définition d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E.

Une application f est un endomorphisme de E si et seulement si f est linéaire et $f(E) \subset E$.

Exercice 1.11 : Noyau

Définition du noyau d'une application linéaire.

Le noyau de $f : E \to F$ est l'ensemble des vecteurs u tels que $f(u) = 0_F$.

Exercice 1.12 : Injectivité d'une application linéaire

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une application linéaire soit injective.

Une application linéaire $f : E \to F$ est injective si et seulement si

$$\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}.$$

Exercice 1.13 : Théorème du rang

Énoncer le théorème du rang pour une application linéaire.

Si $f : E \to F$ est une application linéaire, si E est de dimension finie, alors

$$\dim(E) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \mathsf{rang}(f)$$

avec par définition

$$\mathsf{rang}(f) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big).$$

Exercice 1.14 : Matrices semblables

Matrices semblables : définition.

Deux matrices A et B sont dites semblables s'il existe une matrice P inversible telle que

$$A = PBP^{-1}.$$

Exercice 1.15 : Éléments propres d'une matrice

Donner la définition d'une valeur propre ainsi que d'un sous-espace propre pour une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Un scalaire λ est valeur propre de A si et seulement si il existe un vecteur X non nul tel que $AX = \lambda X$.
Le sous-espace propre associé à λ est :

$$E_\lambda = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = \lambda X\}.$$

Exercice 1.16 : Éléments propres d'un endomorphisme

Donner la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre pour un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Un scalaire λ est valeur propre de f s'il existe un vecteur x non nul tel que $f(x) = \lambda x$.
Un vecteur w est un vecteur propre de f si $w \neq 0_E$ et il existe un scalaire α tel que $f(w) = \alpha w$.

Exercice 1.17 : Condition de diagonalisabilité

Pour u endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable.

L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formée par des vecteurs propres de u.
Autre formulation : u est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres de u est égale à n.
Autre formulation : u est diagonalisable si et seulement si il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice 1.18 : Matrices diagonalisables

Énoncer une condition suffisante et non nécessaire pour qu'une matrice soit diagonalisable, puis une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.

Condition suffisante et non nécessaire :
Si M est symétrique à coefficients réels, alors M est diagonalisable.

Autre proposition : Si M est d'ordre n et possède n valeurs propres distinctes, alors M est diagonalisable.

Condition nécessaire et suffisante : M est diagonalisable si et seulement si il existe P inversible et D diagonale telles que $M = PDP^{-1}$.

Exercice 1.19 : Conditions suffisantes de diagonalisabilité

Donner deux conditions suffisantes et non nécessaires de diagonalisabilité d'une matrice réelle.

Si A est symétrique et à coefficients réels, alors A est diagonalisable.

Si A est triangulaire et si ses coefficients diagonaux sont tous distincts, alors A est diagonalisable.

Exercice 1.20 : Produit scalaire

Donner la définition du produit scalaire de deux vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

En notant $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ on a

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Exercice 1.21 : Norme

Définition de la norme d'un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

La norme du vecteur x de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ est :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Exercice 1.22 : Distance à un sous-espace vectoriel

Définir la distance d'un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ à un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$.

La distance de x à F est la borne inférieure de l'ensemble $\{\|x - y\|, y \in F\}$.
En pratique,

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$$

où $p_F(x)$ est la projection orthogonale du vecteur x sur F.

Exercice 1.23 : Cercle

Écrire une équation cartésienne du cercle de centre $A = (a, b)$ et de rayon r.

Un point M de coordonnées (x, y) appartient à ce cercle si et seulement si :

$$\left(x - a\right)^2 + \left(y - b\right)^2 = r^2.$$

Exercice 1.24 : Droites

Donner une représentation paramétrique de la droite de l'espace passant par le point A de coordonnées (x_1, y_1, z_1) et dirigée par le vecteur u de coordonnées (a, b, c).

Cette droite est l'ensemble des points de coordonnées $(x_1 + ta, y_1 + tb, z_1 + tc)$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.25 : Plans

Donner une équation cartésienne d'un plan de $\mathbb{R}^3$ qui est normal au vecteur $u = (1, 2, -1)$.

Le plan est l'ensemble des vecteurs dont les coordonnées (x, y, z) vérifient l'équation cartésienne :

$$x + 2y - z = 0.$$

Exercice 1.26 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour tous vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$:

$$\left|\langle u, v\rangle\right| \leqslant \|u\| \times \|v\|$$

avec égalité si, et seulement si, les vecteurs u et v sont colinéaires.

Exercice 1.27 : Théorème de Pythagore

Énoncer le théorème de Pythagore dans $\mathbb{R}^n$.

Deux vecteurs u et v sont orthogonaux si et seulement si

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Exercice 1.28 : Base orthonormale

Définition d'une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Une famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \|u_i\| = 1 \text{ et } \forall (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \text{ si } i \neq j \text{ alors } \langle u_i, u_j\rangle = 0.$$

Exercice 1.29 : Coefficient binomial

Pour n et k entiers naturels, donner l'expression du coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

Pour $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Par convention, si $k > n$: $\binom{n}{k} = 0$.

Exercice 1.30 : Formule de Pascal

Formule du triangle de Pascal sur les coefficients binomiaux.

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}.$$

Exercice 1.31 : Indépendance d'événements

Définition de la notion d'indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements.

Une famille d'événements $(A_1, \ldots, A_n)$ est dite mutuellement indépendante si, pour toute partie I de $\{1, \ldots, n\}$, on a

$$P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Exercice 1.32 : Événements incompatibles

Si A et B désignent deux événements d'un même espace probabilisé, donner la définition de « A et B sont incompatibles » et de « A et B sont indépendants ».

$$\text{« } A \text{ et } B \text{ sont incompatibles »} \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = \varnothing.$$
$$\text{« } A \text{ et } B \text{ sont indépendants »} \quad \Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Exercice 1.33 : Probabilités composées

Énoncer la formule des probabilités composées.

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements de probabilités non nulles, alors

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \ldots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1}}(A_n).$$

Exercice 1.34 : Système complet

Définition d'un système complet d'événements.

$(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements de Ω si

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{et pour tout } (i,j) \text{ de } \{1, \ldots, n\}^2, \quad \text{si } i \neq j \text{ alors } A_i \cap A_j = \varnothing.$$

Exercice 1.35 : Probabilités totales

Énoncer la formule des probabilités totales.

Soit $(C_1, \ldots, C_n)$ un système complet d'événements de Ω, alors pour tout événement B on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(C_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(C_i) \times P_{C_i}(B).$$

Exercice 1.36 : Formule de Bayes

Énoncer la formule de Bayes.

Soit $(C_1, \ldots, C_n)$ un système complet d'événements de Ω, alors pour tout événement B de probabilité non nulle et tout i_0 de $\{1, \ldots, n\}$ on a :

$$P_B(C_{i_0}) = \frac{P(B \cap C_{i_0})}{P(B)} = \frac{P(C_{i_0}) \times P_{C_{i_0}}(B)}{\sum_{i=1}^{n} P(C_i) \times P_{C_i}(B)}.$$

Exercice 1.37 : Espérance d'une variable discrète

Définition de l'espérance d'une variable aléatoire X discrète et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On dit que X admet une espérance si et seulement si la série $\sum kP(X = k)$ est absolument convergente. Dans ce cas,

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k).$$

Exercice 1.38 : Transfert pour une variable discrète

Énoncer le théorème de transfert dans le cadre d'une variable aléatoire réelle discrète.

Soit g une fonction définie sur $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$. La variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum g(x_k)P(X = x_k)$$

est absolument convergente.
Dans ce cas,

$$E\Big(g(X)\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(x_k)\, P(X = x_k).$$

Exercice 1.39 : Variance

Définition de la variance d'une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2.

$$V(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big).$$

Exercice 1.40 : Moments de $aX + b$

Si $E(X)$ et $V(X)$ existent, si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, rappeler l'espérance et la variance de la variable aléatoire $aX + b$.

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad ; \quad V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Exercice 1.41 : Loi de Poisson

Soit X une variable suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Expliciter la loi de X, et donner son espérance et sa variance.

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \ P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$
$$E(X) = V(X) = \lambda.$$

Exercice 1.42 : Loi géométrique

Quand dit-on qu'une variable aléatoire suit la loi géométrique de paramètre p ? Quelles sont alors son espérance et sa variance ?

On dit que X suit une loi géométrique de paramètre p si et seulement si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ P(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

On a alors :

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Exercice 1.43 : Moments d'une variable géométrique

Donner l'espérance et variance de $X \hookrightarrow \mathscr{G}(1/3)$.

$$E(X) = 3 \quad ; \quad V(X) = 3^2\big(1 - \frac{1}{3}\big) = 6.$$

Exercice 1.44 : Moment d'ordre deux d'une variable géométrique

Donner la valeur de $E(X^2)$ si X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

$$E(X^2) = V(X) + \big(E(X)\big)^2 = \frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}.$$

Exercice 1.45 : Moment d'ordre deux d'une variable de Poisson

Donner la valeur de $E(X^2)$ si X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

$$E(X^2) = V(X) + \big(E(X)\big)^2 = \lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda + 1).$$

Exercice 1.46 : Lois marginales

Comment déterminer les lois marginales d'un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles discrètes si on connaît la loi conjointe ?

Pour tout i fixé dans $X(\Omega)$:

$$P(X = i) = \sum_{j \in Y(\Omega)} P(X = i \cap Y = j).$$

Pour tout j fixé dans $Y(\Omega)$:

$$P(Y = j) = \sum_{i \in X(\Omega)} P(X = i \cap Y = j).$$

Exercice 1.47 : Transfert pour un couple discret

Formule de l'espérance de $Z = u(X, Y)$, où X et Y sont des variables aléatoires discrètes à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ et u une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u(i, j) P(X = i \cap Y = j).$$

Exercice 1.48 : Variable à densité

A quelle(s) condition(s) sur sa fonction de répartition une variable aléatoire X admet-elle une densité de probabilité ?
Comment détermine-t-on alors une densité de X ?

La variable aléatoire X a une densité de probabilité si et seulement si sa fonction de répartition F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ privé éventuellement d'un nombre fini de points.
Alors, en tout point t où F est dérivable :

$$f(t) = F'(t).$$

Exercice 1.49 : Fonction de répartition

Donner la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité. Donner ses variations et ses limites en $\pm\infty$.

En notant f une densité de X :

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto F(t) = P(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} f(w) \mathrm{d}w.$$

La fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$,

$$\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} F(t) = 1.$$