

**TOUT EN
FICHES**

Pascal Bigot

Professeur en BTS au lycée
Marie Curie (Nogent-sur-Oise)

Richard Mauduit

Professeur en BTS au lycée
Robert Schuman (Le Havre)

Eric Wenner

Professeur en BTS au lycée
Robert Schuman (Le Havre)

L'ESSENTIEL DE

MÉCANIQUE DES FLUIDES

LICENCE, IUT

DUNOD

Graphisme de couverture : Pierre-André Gualino
Illustrations de couverture : shutterstock_12802474

NOUS NOUS ENGAGEONS EN FAVEUR DE L'ENVIRONNEMENT :



Nos livres sont imprimés sur des papiers certifiés pour réduire notre impact sur l'environnement.



Le format de nos ouvrages est pensé afin d'optimiser l'utilisation du papier.



Depuis plus de 30 ans, nous imprimons 70 % de nos livres en France et 25 % en Europe et nous mettons tout en œuvre pour augmenter cet engagement auprès des imprimeurs français.



Nous limitons l'utilisation du plastique sur nos ouvrages (film sur les couvertures et les livres).

© Dunod, 2011, 2015, 2021, 2023
11, rue Paul Bert 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-085472-1

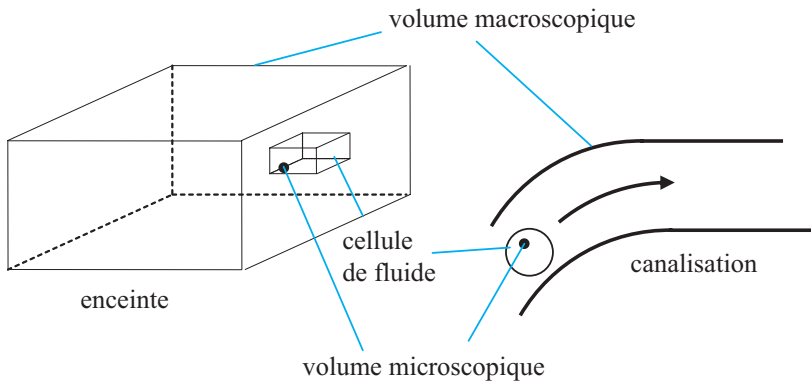
Table des matières

| | | |
|-----------------|--|-----|
| Fiche 1 | Généralités sur les fluides – pression | 1 |
| Fiche 2 | Fluides gazeux | 8 |
| Fiche 3 | Relation fondamentale de la statique des fluides | 21 |
| Fiche 4 | Pression atmosphérique | 30 |
| Fiche 5 | Mesures de pressions | 37 |
| Fiche 6 | Forces de pression : poussée sur une paroi | 47 |
| Fiche 7 | Forces de pression : poussée d'Archimède | 54 |
| Fiche 8 | Tension superficielle et tensiométrie | 63 |
| Fiche 9 | Écoulement d'un fluide parfait | 72 |
| Fiche 10 | Vitesses et débits de fluide | 83 |
| Fiche 11 | La viscosité et sa mesure | 96 |
| Fiche 12 | Rhéologie | 109 |
| Fiche 13 | Les pertes de charge | 122 |
| Fiche 14 | Les pompes | 135 |
| Fiche 15 | Les turbines hydrauliques | 145 |
| Fiche 16 | Théorème d'Euler | 155 |
| Fiche 17 | Théorème de Bernoulli généralisé | 166 |
| Fiche 18 | Travail de synthèse | 177 |
| Fiche 19 | Dynamique des fluides compressibles | 185 |
| Fiche 20 | Théorème d'Hugoniot | 196 |

1. Les fluides

■ Grandeurs mésoscopiques

En mécanique des fluides, les grandeurs définies le sont pour des volumes mésoscopiques appelés *cellules de fluide* (ou encore appelés éléments de fluides), *intermédiaires entre le volume microscopique et le volume macroscopique*.



Une grandeur définie sur un volume microscopique ne concerne que trop peu de particules et n'est donc pas continue.

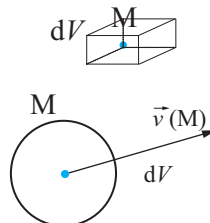
Une grandeur définie sur un volume macroscopique ne permet pas de rendre compte des variations de cette grandeur à l'intérieur de ce volume.

EXEMPLES DE GRANDEURS DÉFINIES POUR UNE CELLULE DE FLUIDE (AU NIVEAU MÉSCOPIQUE)

$$\text{Masse volumique (en } M) = \frac{dm}{dV}$$

avec dm = masse de l'ensemble des particules dans le volume dV .

$\vec{v}(M)$ = moyenne des vecteurs vitesses des particules contenues dans le volume dV .



■ Différence solide/fluide

Dans un solide, les particules sont rigidement liées les unes aux autres, contrairement à un fluide : *fluides = liquides et gaz*.

■ Différence liquide/gaz

Au niveau macroscopique, contrairement à un liquide, un gaz occupe toujours l'ensemble du volume qui lui est proposé.

Au niveau microscopique, contrairement à un gaz, les particules d'un liquide sont très proches.

D'autre part, liquides et gaz diffèrent par l'ordre de grandeur :

- de leur masse volumique (en moyenne 1 000 fois supérieure pour un liquide) ;
- de leur aptitude à subir une variation de volume à température constante (en moyenne 100 000 fois supérieure pour un gaz).

■ Grandeurs usuelles

- **Pression P en un point** : voir partie 2.
- **Température T** : grandeur qui traduit le degré d'agitation des particules.
- **Volume V** : partie de l'espace occupée.
- **Masse volumique ρ (« rhô »)** : $\rho = \frac{m}{V}$ avec m = masse de fluide occupant le volume V .
- **Densité d** : $d = \frac{m}{m_R}$ avec m = masse de fluide occupant le volume V et m_R = masse d'un corps R de référence occupant le même volume V .

Le corps de référence est l'eau pour les liquides et l'air pour les gaz.

On a aussi : $d = \frac{\rho}{\rho_R}$ avec ρ_R = masse volumique du corps R .

■ Fluides incompressibles et compressibles

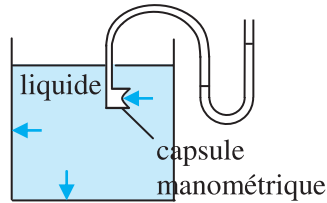
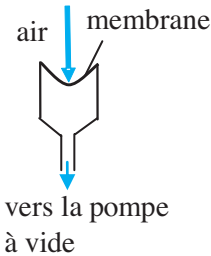
Un fluide incompressible est tel que sa masse volumique reste la même en tout point : *les liquides peuvent être considérés comme incompressibles*.

Un fluide compressible est tel que sa masse volumique peut varier d'un point à l'autre : *les gaz peuvent être considérés comme compressibles*.

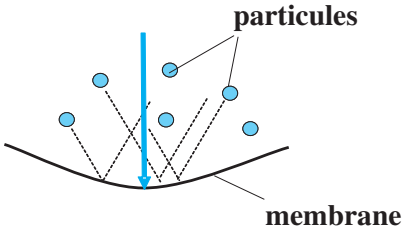
2. Pression en un point d'un fluide au repos

Forces pressantes

Les molécules d'un *fluide quelconque, au repos*, sont en mouvement incessant (par exemple, quelques gouttes de colorant ajoutées dans un verre d'eau finissent par diffuser dans la totalité du liquide) et exercent donc des forces pressantes en tout point du fluide.



Interprétation microscopique :

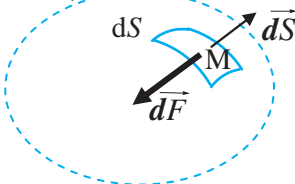


La force de pression résultante est principalement due aux chocs des particules

Par raison de symétrie, une force de pression est localement normale à l'élément de surface sur lequel elle s'exerce (la viscosité n'intervenant pas pour un fluide au repos).

Pression absolue en un point

(surface S)



La pression p_M au point M est définie

telle que : $d\vec{F} = -p_M \cdot d\vec{S}$

on a alors : $p_M = \frac{dF}{dS}$

Unité S.I. : le Pascal (Pa)

Si on isole dans un fluide un volume V fictif délimité par une surface S fermée, les particules extérieures à V exercent sur une surface élémentaire dS (centrée sur le point M) de S la force pressante $d\vec{F}$ normale (pour un fluide au repos) à dS .

$$\text{« pression »} = \text{« } \frac{\text{force}}{\text{surface}} \text{ »} ; \text{ « force »} = \text{« pression } \times \text{ surface »}$$

Autres unités utilisées

- le bar : 1 bar = 10^5 Pa
- l’atmosphère (atm) : 1 atm = $1,013 \cdot 10^5$ Pa = 1,013 bar
- le millimètre de mercure (mm de Hg) 760 mm de Hg = 1 atm
- le mètre colonne d’eau (m CE) 10 m CE = 1 bar

■ Pression relative (ou effective) en un point

La pression relative $p_{\text{rel}}(M)$ en un point M est telle que :

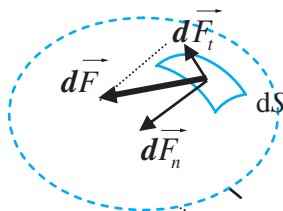
$$p_{\text{rel}}(M) = p_M - p_{\text{atm}}$$

avec p_{atm} = pression atmosphérique (elle peut varier !).

La présence d’atmosphère fait qu’elle contribue à la pression exercée ; la pression relative correspond donc à la pression exercée par le fluide seul.

■ Cas d’un fluide en mouvement

Dans ce cas, la force pressante $d\vec{F}$ n’est plus forcément normale à dS , en particulier si le fluide est visqueux.

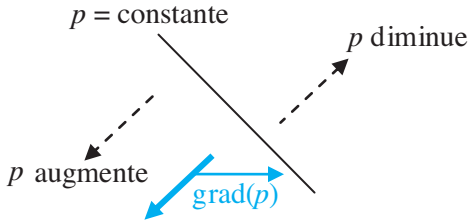


$$d\vec{F} = d\vec{F}_n \text{ (composante normale)} + d\vec{F}_t \text{ (composante tangentielle)}$$

La pression en M est telle que : $p_M = \frac{dF_n}{dS}$

Gradient de pression

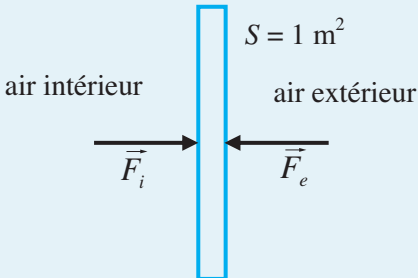
C'est le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}(p) = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z} \vec{u}_x + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{x,z} \vec{u}_y + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y} \vec{u}_z$



(en coordonnées cartésiennes) ; il permet d'indiquer localement comment varie la pression. Ce vecteur est perpendiculaire à une surface isobare.

EXERCICE 1 Force pressante exercée par l'air atmosphérique

Calculez la force exercée de part et d'autre sur 1 m^2 de vitre ; on supposera que la pression atmosphérique est la même de chaque côté et égale à 1 bar.

Solution

$$F_e = F_i = p_{\text{atm}} \cdot S = 10^5 \times 1 = 10^5 \text{ N}$$

C'est environ le poids d'une masse de 10^4 kg (10 tonnes).

Tout se passe comme si un éléphant tenait verticalement sur chaque côté de la vitre.

$$S = 1 \text{ m}^2$$

EXERCICE 2 Pression au fond d'un réacteur

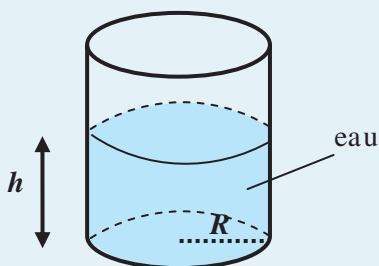
Un réacteur cylindrique à fond plat, de rayon $R = 20 \text{ cm}$ et de hauteur $H = 50 \text{ cm}$, contient 35 L d'eau.

1. Calculez la hauteur h d'eau dans le réacteur.

2. Calculez la force exercée par l'eau sur le fond du réacteur.
3. Calculez la pression relative, en Pascal puis en mmCE, exercée par l'eau sur le fond du réacteur (trouvez deux méthodes).

Données : $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $g = 9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$

Solution



$$\begin{aligned} 1. \text{ Volume d'eau} &= V = (\pi \cdot R^2) \cdot h \\ 35 \cdot 10^{-3} &= \pi \cdot (0,2)^2 \cdot h \\ h &= 0,278 \text{ m} = \mathbf{27,8 \text{ cm}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Soit } F_{\text{eau}} &= \text{valeur de la force exercée par l'eau } F_{\text{eau}} = m_{\text{eau}} \cdot g \text{ (poids de l'eau)} \\ &= \rho_{\text{eau}} \cdot V \cdot g = 10^3 \times 35 \times 10^{-3} \times 9,81 = \mathbf{343 \text{ N}} \end{aligned}$$

3. Première méthode

$$P_{\text{relative}} \text{ de l'eau} = \frac{F_{\text{eau}}}{\pi \cdot R^2} = 2730 \text{ Pa} (= 278 \text{ mmCE})$$

Deuxième méthode

Soit F_{air} = valeur de la force exercée par l'air

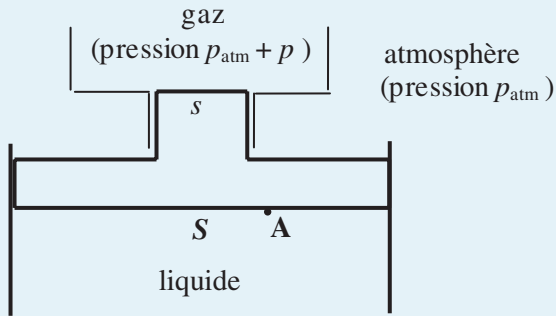
$$\text{pression de l'eau} = \frac{F_{\text{eau}} + F_{\text{air}}}{\pi \cdot R^2} = \frac{F_{\text{eau}} + (\pi \cdot R^2) \cdot p_{\text{atm}}}{\pi \cdot R^2} = \frac{F_{\text{eau}}}{\pi \cdot R^2} + p_{\text{atm}}$$

$$P_{\text{relative}} \text{ de l'eau} = \text{pression de l'eau} - p_{\text{atm}} = \frac{F_{\text{eau}}}{\pi \cdot R^2} = 2730 \text{ Pa}$$

EXERCICE 3 Pression exercée par un piston

On considère le dispositif suivant :

Le piston est caractérisé par des sections S et s , et une masse m ; déterminez l'expression de la pression au point A.



Solution

$$p_A = \frac{\text{force}}{\text{surface}}$$

La force F exercée sur la surface S de liquide est telle que :

$$F = p_{\text{atm}} \cdot (S - s) + (p_{\text{atm}} + p) \cdot s + m \cdot g$$

(force due à l'**atmosphère**) + (force due au **gaz**) + (force due au **piston**)

$$F = p_{\text{atm}} \cdot S + p \cdot s + m \cdot g$$

$$\text{donc } p_A = \frac{p_{\text{atm}} \cdot S + p \cdot s + m \cdot g}{S} = p_{\text{atm}} + \frac{p \cdot s + m \cdot g}{S}$$

1. Modèle du gaz parfait

Description

Soit une masse m de gaz à l'équilibre qui contient N molécules dans un volume V . Ce gaz est supposé parfait si les molécules en mouvement sont sans interactions entre elles (en dehors des chocs qu'elles subissent entre elles ou contre les parois du récipient qui accueille le gaz), ce qui suppose une densité moléculaire faible. Chaque molécule est assimilée à un point matériel ayant un mouvement de translation rectiligne entre deux chocs.

Équation d'état

On montre que la pression P du gaz parfait est reliée à sa température absolue T (en K) par la relation :

$$PV = N k T$$

où k est la constante de Boltzmann.

- Pour une mole de molécules, $N = \mathcal{N}_A$ (nombre d'Avogadro) donc :

$$PV = (\mathcal{N}_A k) T$$

$$\mathcal{N}_A k = 6,022 \cdot 10^{23} \times 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ mol}^{-1} \cdot \text{J} \cdot \text{K}^{-1} = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

On pose $R = \mathcal{N}_A k$ que l'on appelle constante molaire des gaz parfaits.

- Pour n moles de molécules, $N = n \mathcal{N}_A$ et la relation

$$PV = nRT$$

constitue l'équation d'état du gaz parfait dans laquelle les grandeurs P , V et T sont les variables d'état du gaz.

Unités S.I. : P en Pa ; V en m^3 ; T en K.

On utilise également deux autres formes pour exprimer l'équation d'état du gaz parfait. Puisque $n = \frac{m}{M}$ où M est la masse molaire du gaz, on a $PV = m \frac{R}{M} T$, c'est-à-dire :

$$PV = m r T$$

en posant $r = \frac{R}{M}$ la constante massique du gaz étudié supposé parfait.

Enfin, la masse volumique du gaz est $\rho = \frac{m}{V}$ donc on a également :

$$P = \rho rT$$

On considérera qu'un gaz réel se comportera comme un gaz parfait lorsque sa pression est faible (densité moléculaire $\frac{N}{V}$ faible).

2. Mélanges de gaz parfaits

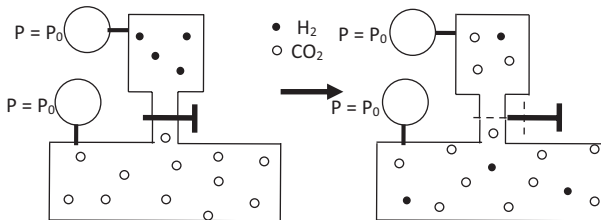
■ Mélange idéal

Lorsqu'on procède au mélange de gaz supposés parfaits, on n'obtient pas forcément un mélange gazeux parfait, les molécules de gaz différents pouvant interagir, voire réagir chimiquement. Le mélange est dit *idéal* si ce phénomène n'apparaît pas.

■ L'expérience de Berthollet

Un récipient contenant du dihydrogène pur (H_2) peut être mis en communication avec un autre contenant du dioxyde de carbone pur (CO_2).

Les deux récipients sont dans les mêmes conditions de température et de pression. Dans les conditions usuelles, H_2 et CO_2 peuvent être modélisés par des gaz parfaits.



1^{ère} étape : On ouvre le robinet ; au bout d'un temps plus ou moins long, les deux gaz finissent par être totalement mélangés, malgré la différence de masse volumique.

$$\rho(\text{CO}_2) \gg \rho(\text{H}_2) \text{ car } \rho = \frac{PM}{R.T}$$

$$\text{et } M(\text{H}_2) = 2 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \ll M(\text{CO}_2) = 44 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

2^e étape : On referme le robinet ; on constate que la pression dans chaque récipient n'a pas changé. Les deux gaz se sont répartis comme s'ils étaient seuls.

Conclusion : Les molécules d'un gaz ne sont pas affectées par la présence de l'autre gaz.

Un mélange de gaz parfaits se comporte comme un gaz parfait unique.

■ Pression partielle

La pression partielle d'un gaz, dans un mélange de gaz parfaits, est la pression qu'il exercerait s'il était seul dans le même volume et pour la même température.

La pression partielle d'un gaz se définit, mais n'est pas directement mesurable (il faudrait éliminer les autres gaz du mélange).

■ Loi de Dalton

Considérons un mélange de n gaz parfaits, à une température T , une pression totale P_{tot} , et occupant un volume V . Soit n_i la quantité de matière du gaz numéro i et p_i sa pression partielle.

L'équation d'état appliquée au gaz parfait numéro i donne : $p_i V = n_i RT$ (1)

L'équation d'état appliquée au mélange donne : $P_{tot} V = \left(\sum_{i=1}^n n_i \right) RT$ (2)

(2) équivaut à $P_{tot} V = \sum_{i=1}^n (n_i RT) = \sum_{i=1}^n (p_i V) = \left(\sum_{i=1}^n p_i \right) V$, donc $P_{tot} = \left(\sum_{i=1}^n p_i \right)$

Loi de Dalton : la pression exercée par un mélange de gaz parfaits est la somme des pressions partielles exercées par chaque gaz.

■ Conséquences de la loi de Dalton

Soit $x_i = \frac{n_i}{n_{tot}}$ la fraction molaire du gaz numéro i dans le mélange.

Avec n_{tot} = quantité de matière totale dans le mélange gazeux ($n_{tot} = \sum_{i=1}^n n_i$)

En divisant (1) par (2), on obtient $p_i = x_i P_{tot}$.

La pression partielle d'un gaz est le produit de sa fraction molaire par la pression totale.

Cette relation n'est plus valable si on utilise les fractions massiques.

Soit M_i la masse molaire du gaz numéro i ,

$$M = \frac{1}{n_{tot}} \sum_{i=1}^n n_i M_i = \text{masse molaire moyenne du mélange gazeux.}$$

(2) équivaut à $P_{tot} V = n_{tot} RT$; comme $\sum_{i=1}^n n_i M_i$ est la masse du mélange, on a :

$$P_{tot} V = \frac{m}{M} RT \text{ avec } m = \text{masse du mélange.}$$

On peut considérer un mélange de gaz parfaits comme un gaz parfait unique de masse molaire moyenne M .

3. Lois de Joule

■ Première loi de Joule

L'unique forme d'énergie des N molécules contenues dans le volume V de gaz parfait est l'énergie cinétique de translation des molécules (les molécules d'un gaz parfait étant ponctuelles, elles ne peuvent avoir une énergie cinétique de rotation). On appelle énergie interne U du gaz parfait la somme des énergies cinétiques des N molécules.

L'énergie interne U d'un gaz parfait ne dépend que de sa température et au cours d'une transformation d'une quantité de gaz n (en mol) ou m (en kg) :

$$\Delta U = n C_V \Delta T = m c_V \Delta T$$

C_V : capacité thermique molaire à volume constant en $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

c_V : capacité thermique massique à volume constant en $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

■ Deuxième loi de Joule

L'enthalpie H d'un gaz parfait ne dépend que de sa température et par définition : $H = U + PV$

Au cours d'une transformation d'une quantité de gaz n (en mol) ou m (en kg) :

$$\Delta H = n C_p \Delta T = m c_p \Delta T$$

C_p : capacité thermique molaire à pression constante en $\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

c_p : capacité thermique massique à pression constante en $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

Puisque les deux capacités thermiques massiques sont telles que :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \text{ ou } \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

On en déduit :

$$\Delta H = \gamma \Delta U$$

4. Relation de Mayer

La relation de Mayer pour un gaz parfait s'écrit :

$$C_p - C_v = R \quad \text{ou} \quad c_p - c_v = r$$

5. Les gaz réels

■ Description

Soit une masse m de gaz réel à l'équilibre de N molécules contenues dans un réservoir de volume V . Il faut tenir compte :

- des interactions entre les molécules ;
- du volume propre occupé par les N molécules.

Du fait de ces interactions intermoléculaires, la pression d'un gaz réel est inférieure, toute chose égale par ailleurs, à celle du même gaz s'il était considéré comme parfait. De plus, les N molécules se déplacent dans un volume inférieur au volume V du réservoir puisque les molécules ont un volume propre. (Le volume à soustraire de V est appelé covolume et est supérieur au volume propre des molécules).

■ Équations d'état des gaz réels

Les équations d'état suivantes (pour n moles) permettent de décrire dans des domaines de températures et de pression plus ou moins larges les gaz réels :

Équation d'état de Van der Waals

$$\left(P + n^2 \frac{a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

a et b constantes du gaz réel étudié.

REMARQUE

Lorsque le volume V est très grand (faible densité moléculaire), on a :

$$V \gg nb \text{ et } n^2 \frac{a}{V^2} \ll P$$

On retrouve alors l'équation d'état du gaz parfait : $PV = nRT$.

Équation d'état de Clausius

$$P(V - nb) = nRT$$

b constante du gaz réel étudié.

Équation d'état de Dieterici

$$P(V - nb) = nRT e^{-\frac{na}{RTV}}$$

a et b constantes du gaz réel étudié.

EXERCICE 1 Gaz parfait

1. Une certaine quantité de gaz supposé parfait occupe un volume $V_1 = 1,0 \text{ L}$ à la température $\theta_1 = -20 \text{ °C}$ sous la pression $P_1 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. À quelle pression P_2 faut-il comprimer ce gaz pour diminuer de moitié le volume lorsque la température est $\theta_2 = 40 \text{ °C}$?
2. Calculez les variations d'énergie interne et d'enthalpie de cette quantité de gaz.
3. Cette quantité de gaz subit ensuite une détente adiabatique et réversible qui le ramène jusqu'à sa pression initiale P_1 . Calculez la température θ_3 et le volume occupé V_3 en fin de détente.

On admettra, que dans ce cas, la loi suivante est vérifiée : $P \cdot V^\gamma = \text{cste}$.

Données :

$$C_V = 20,8 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1} ; \gamma = 1,4.$$

$$\text{Constante des gaz parfaits : } R = 8,31 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}.$$

Solution

1. L'équation d'état à laquelle satisfait la masse m de gaz parfait dans l'état 1 permet d'écrire : $P_1 V_1 = m r T_1$

Dans l'état 2, l'équation d'état s'écrit : $P_2 V_2 = m r T_2$ avec $V_2 = \frac{V_1}{2}$

Le rapport membre à membre de ces deux égalités donne :

$$\frac{P_2 \left(\frac{V_1}{2} \right)}{P_1 V_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

On en déduit (avec T_1 et T_2 en kelvins) : $P_2 = 2 \frac{T_2}{T_1} \times P_1 = \mathbf{2,51.10^5 \text{ Pa}}$

2. La quantité n , exprimée en mol, du gaz est :

$$n = \frac{P_1 V_1}{R T_1} = \mathbf{4,5.10^{-2} \text{ mol}}$$

La première loi de Joule permet de calculer la variation d'énergie interne que subit la quantité n du gaz :

$$\Delta U = n C_V (T_2 - T_1) = \mathbf{56,2 \text{ J}}$$

La variation d'enthalpie ΔH que subit le gaz est :

$$\Delta H = \gamma \Delta U = 78,7 \text{ J}$$

3. Au cours de la détente, on peut écrire : $P_2 V_2^\gamma = P_3 V_3^\gamma$ avec $P_3 = P_1$ et $V_2 = \frac{V_1}{2}$ donc :

$$V_3 = V_2 \times \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \mathbf{0,96 \text{ L}}$$

On en déduit la température $T_3 = \frac{P_3 V_3}{n R} = 258,4 \text{ K}$ soit $\theta_3 = \mathbf{-14,6 \text{ }^\circ\text{C}}$.

EXERCICE 2 Mélange de gaz parfaits

Un premier réservoir (R1) de volume 5,0 L contient 8,0 g de méthane à l'état gazeux dont la température est 30 °C. Un second réservoir (R2) de volume 8,0 L contient 21 g de diazote gazeux à la température de 25 °C. Ces deux gaz sont ensuite introduits dans une capacité de volume 10 L portée à la température de 50 °C. Les gaz sont supposés parfaits.

Masse molaires atomiques :

$$M(H) = 1 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1} ; M(C) = 12 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1} ; M(N) = 14 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}.$$

1. Calculer les pressions de chaque gaz avant mélange ainsi que la pression finale du mélange gazeux.
2. Déterminer alors la fraction molaire et la pression partielle de chaque gaz.

Solution

1. La quantité de matière de méthane est $n_1 = \frac{m(\text{CH}_4)}{M(\text{CH}_4)} = 0,50 \text{ mol}$ et celle de diazote est $n_2 = \frac{m(\text{N}_2)}{M(\text{N}_2)} = 0,75 \text{ mol}$. Les gaz étant parfaits, leurs pressions avant mélange se calculent par la loi des gaz parfaits et on trouve respectivement pour le méthane et le diazote : $P_1 = n_1 \frac{RT_1}{V_1} = 2,5 \text{ bar}$ et $P_2 = n_2 \frac{RT_2}{V_2} = 2,3 \text{ bar}$.

La quantité totale n de gaz après mélange s'écrit : $n = n_1 + n_2$. Le mélange gazeux se comportant comme un gaz parfait, on obtient : $\frac{P_{\text{tot}} V}{RT} = n_1 + n_2$.

Le calcul donne $P_{\text{tot}} = 3,4 \text{ bar}$.

2. La fraction molaire du méthane dans le mélange est $x_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{n_1}{n_1 + n_2} = 40 \%$.

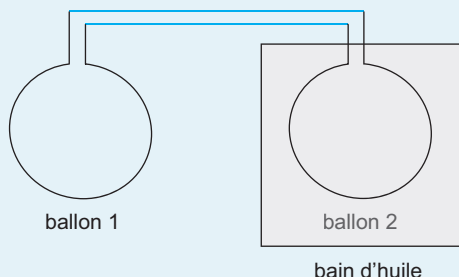
On obtient donc celle du diazote $x_2 = \frac{n_2}{n} = 60 \%$. La pression partielle du méthane dans le mélange est $p_1 = x_1 P_{\text{tot}} = 1,3 \text{ bar}$ et la pression partielle du diazote est, d'après la loi de Dalton, $p_2 = P_{\text{tot}} - p_1 = 2,0 \text{ bar}$.

Il ne faut pas confondre les pressions des gaz avant leur mélange avec les pressions partielles de ces mêmes gaz dans le mélange.

EXERCICE 3 Système gazeux à deux ballons

Deux ballons de même volume V sont réunis par un tube de section faible (et dont le volume sera supposé négligeable). L'ensemble contient $n = 0,70$ mol de dihydrogène à $T = 27\text{ °C}$ (état initial).

Un des ballons est immergé dans un bain d'huile chaude à $T' = 127\text{ °C}$, l'autre ballon étant maintenu à $T = 27\text{ °C}$ (état final).



1. Calculer la quantité de matière de dihydrogène dans chaque ballon dans l'état final.
2. Calculer le rapport entre la pression finale P' et la pression initiale P .

Solution

1. Soient n_1 et n_2 le nombre de moles de dihydrogène respectivement dans les ballons 1 et 2 dans l'état final.

Pour le ballon 1, $P'V = n_1 RT$

Pour le ballon 2, $P'V = n_2 RT'$

(la pression dans un gaz étant la même en tout point). On déduit que : $n_1 \cdot T = n_2 \cdot T'$

Or, $n_1 + n_2 = n$

Le calcul donne : $n_1 = 0,4$ mol et $n_2 = 0,3$ mol.

2. Pour le ballon 1 dans l'état initial, $PV = \frac{n}{2} RT$

Pour le ballon 1 dans l'état final, $P'V = n_1 RT$

Donc $\frac{P'}{P} = \frac{2n_1}{n}$. Le calcul donne : $\frac{P'}{P} = \frac{8}{7}$

EXERCICE 4 Coefficients thermoélastiques

Pour tous les fluides, on définit trois nombres positifs appelés coefficients thermoélastiques du fluide : le coefficient α de dilatation isobare, le coefficient β d'augmentation de pression isochore et le coefficient X_T de compressibilité isotherme.

Déterminez α , β et X_T dans le cas du gaz parfait.

Que vaut le quotient : $\frac{\alpha}{\beta X_T}$?

Solution

Le coefficient de dilatation isobare a pour expression : $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$

La dérivée $\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$ de V par rapport à T (à pression P constante) est :

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{nRT}{P} \right)_P = \frac{nR}{P} \text{ donc } \alpha = \frac{1}{V} \times \frac{nR}{P} = \frac{nR}{nRT}.$$

$$\alpha = \frac{1}{T}$$

Le coefficient d'augmentation de pression isochore a pour expression : $\beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$.

La dérivée $\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$ de P par rapport à T (à volume V constant) est :

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{nRT}{V} \right)_V = \frac{nR}{V} \text{ donc } \beta = \frac{1}{P} \times \frac{nR}{V} = \frac{nR}{nRT}$$

$$\beta = \frac{1}{T}$$

Le coefficient de compressibilité isotherme a pour expression : $X_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$.

La dérivée $\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$ de V par rapport à P (à température T constante) est :

$$\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{nRT}{P} \right)_T = -\frac{nRT}{P^2} \text{ donc } X_T = -\frac{1}{V} \times \left(-\frac{nRT}{P^2} \right) = \frac{nRT}{P \times (PV)} \text{ soit :}$$

$$X_T = \frac{1}{P}$$

On en déduit :

$$\frac{\alpha}{\beta X_T} = P$$

Le quotient $\frac{\alpha}{\beta X_T}$ est donc égal à P la pression du gaz parfait. Cette relation reste vraie pour tout fluide homogène d'équation d'état $f(P, V, T) = 0$.

EXERCICE 5 Équation d'état de Van der Waals

Données :

Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Le gaz considéré est le dioxygène. Il obéit à l'équation d'état de Van der Waals qui s'écrit pour $n = 1 \text{ mol}$ (V est donc le volume molaire) :

$$\left(P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT$$

1. Calculez les coordonnées, notées P_C , T_C et V_C , du point critique C en fonction de a , b et R .
2. Donnez l'expression de b en fonction de R , P_C et T_C . Calculez b sachant que : $P_C = 50,4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et $T_C = 154,6 \text{ K}$. En déduire l'expression de a .
3. On admet que le covolume b représente quatre fois le volume d'une mole de molécules de gaz, assimilées à des sphères de diamètre σ . Calculez σ .
4. Le facteur de compressibilité Z d'un gaz se définit par : $Z = \frac{PV_m}{RT}$ où V_m est le volume molaire. Exprimez Z_C au point critique du gaz O_2 considéré comme un gaz de Van der Waals. Concluez sur le modèle sachant que la valeur expérimentale est $Z_C = 0,29$.

Solution

Dans le diagramme de Clapeyron (P, V), l'isotherme critique présente un point d'inflexion avec une tangente horizontale. De plus, d'un point de vue physique, on ne pourra pas liquéfier un gaz dont la température est supérieure à la température critique.

À l'aide de l'équation d'état de Van der Waals, on peut écrire :

$$P_c = \frac{RT_c}{(V_c - b)} - \frac{a}{V_c^2} \quad (1)$$

Puisque l'isotherme critique est à tangente horizontale au point C, alors $\left(\frac{dP}{dV}\right)_C = 0$ soit :

$$-\frac{RT_c}{(V_c - b)^2} + \frac{2a}{V_c^3} = 0 \quad (2)$$

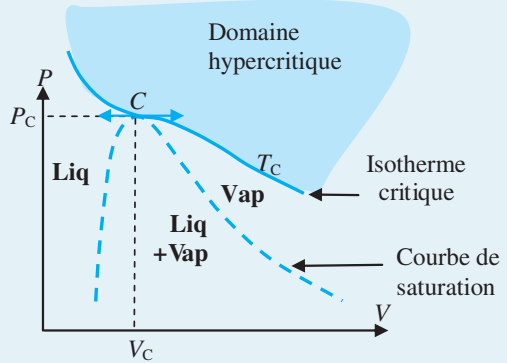
Le point critique C étant un point d'inflexion alors $\left(\frac{d^2P}{dV^2}\right)_C = 0$ soit :

$$\frac{RT_c}{(V_c - b)^3} - \frac{3a}{V_c^4} = 0 \quad (3)$$

À l'aide de (2) et (3), on obtient le volume molaire critique : $V_c = 3b$

Puis en remplaçant dans (2), on trouve : $T_c = \frac{8a}{27bR}$

À l'aide de (1), on obtient : $P_c = \frac{a}{27b^2}$



2. Puisque $\frac{a}{27b} = bP_C$, on en déduit : $T_C = \frac{8bP_C}{R}$ donc :

$$b = \frac{RT_C}{8P_C} \quad \text{et} \quad a = \frac{27R^2T_C^2}{64P_C}$$

Les calculs donnent : $b = 3,18 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ et $a = 0,138 \text{ Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{mol}^{-2}$

3. En assimilant une molécule à une sphère de diamètre σ (diamètre de Van der Waals), son volume est $v_0 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sigma}{2}\right)^3$.

Le volume d'une mole de molécules est donc $V = N_A \times v_0$ et le covolume a pour expression :

$$b = 4 (N_A \times v_0)$$

Donc : $b = 4 N_A \times \frac{4}{3} \pi \frac{\sigma^3}{8}$ soit : $\sigma^3 = \frac{3b}{2\pi N_A}$; on en déduit :

$$\sigma = \left(\frac{3b}{2\pi N_A} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Le calcul donne, pour la valeur de b précédente : $\sigma = 2,9 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ (0,29 nm).

4. Au point critique, $Z_C = \frac{P_C V_C}{RT_C}$; puisque $\frac{RT_C}{P_C} = 8b$ et $V_C = 3b$, on obtient $Z_C = \frac{3}{8} = 0,375$ (valeur indépendante de la nature du gaz).

Pour le gaz O_2 , l'écart relatif observé entre les valeurs expérimentale et modélisée est $\frac{0,375 - 0,29}{0,29} = 29,3 \%$. Le modèle de Van der Waals ne semble pas particuliè-

rement adapté pour le gaz O_2 à la pression critique.

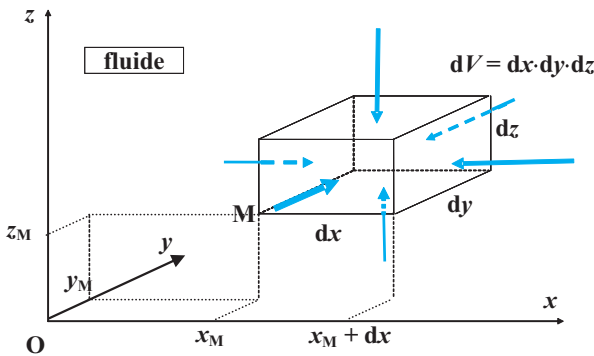
Ce modèle récompensa néanmoins le physicien hollandais Johannes Diderik Van der Waals en 1910 du prix Nobel de physique pour ses travaux sur l'équation d'état des gaz et liquides.

Relation fondamentale de la statique des fluides

Fiche
3

1. Résultante des forces de pression sur un élément de fluide

On considère un élément de fluide de forme parallélépipédique de volume dV , le fluide étant en équilibre.



Chacune des faces est soumise à une force de pression $d\vec{F} = -p_M \cdot d\vec{S}$
avec p_M = pression du fluide au point M

$d\vec{S}$ = vecteur surface de l'une des faces

Soit $d\vec{R}$ = résultante des forces de pression agissant sur dV ;

On pose : dR_x = composante de $d\vec{R}$ selon l'axe Ox

$$\begin{aligned} dR_x &= p(x_M) \cdot dy \cdot dz - p(x_M + dx) \cdot dy \cdot dz = -dp \cdot dy \cdot dz \\ &= -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \end{aligned}$$

$$\text{soit : } dR_x = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z} \cdot dV$$

$$\text{De même, } dR_y = -\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{x,z} \cdot dV \text{ et } dR_z = -\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y} \cdot dV$$

$$\text{D'où : } d\vec{R} = -(\overline{\text{grad}}P_M) \cdot dV$$