Pierre Le Barbenchon
Sophie Pinchinat
François Schwarzentruber

# Logique : fondements et applications

DUNOD

Graphisme de couverture : Elizabeth Riba
Illustration de couverture : shutterstock © Oleksandr Khalimonov



11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-082158-7

# Table des matières


**Avant-propos** **7**

**Introduction** **9**

**Liste des notations** **17**

**I Logique propositionnelle** **23**

**1 Formules** **25**

1.1 Syntaxe de la logique propositionnelle . . . . . . . . . . . . . . . . . 25

1.1.1 Éléments de syntaxe . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25

1.1.2 Arbre d'une formule . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26

1.1.3 Théorème de lecture unique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27

1.1.4 Simplification de l'écriture des formules . . . . . . . . . . . 28

1.1.5 Taille, hauteur, sous-formules d'une formule . . . . . . . . 29

1.2 Sémantique de la logique propositionnelle . . . . . . . . . . . . . . 30

1.2.1 Notion de valuation . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30

1.2.2 Valeur de vérité d'une formule . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

1.2.3 Table de vérité . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32

1.2.4 Zoom sur l'implication (connecteur $\to$) . . . . . . . . . . . 33

1.2.5 Ensemble des modèles d'une formule . . . . . . . . . . . . . 34

1.2.6 Propriétés des ensembles de modèles . . . . . . . . . . . . . 34

1.2.7 Satisfaisabilité, validité . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35

1.3 Équivalence de formules . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36

1.4 Substitution dans les formules . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39

1.5 Conséquence logique d'une formule . . . . . . . . . . . . . . . . . . 40

1.6 Généralisation aux ensembles de formules . . . . . . . . . . . . . . 41

1.7 Aller plus loin . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43

1.8 Exercices . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45

**2 Fragments syntaxiques** **49**
2.1 Systèmes complets de connecteurs . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49
2.2 Formes normales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52
2.2.1 Forme normale conjonctive . . . . . . . . . . . . . . . . . 52
2.2.2 Mise en forme normale conjonctive . . . . . . . . . . . . . 53
2.2.3 Forme normale disjonctive . . . . . . . . . . . . . . . . . 54
2.3 Zoom sur les clauses (disjonctives) . . . . . . . . . . . . . . . . . 56
2.3.1 Clauses de Horn . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56
2.3.2 2-clauses . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58
2.3.3 3-clauses . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58
2.4 Transformation de Tseitin . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60
2.5 Aller plus loin . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62
2.6 Exercices . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63

**3 Problème** SAT **65**
3.1 Complexité . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 66
3.1.1 Théorème de Cook . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 66
3.1.2 Transformation de Tseitin . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70
3.1.3 Problème 3SAT . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71
3.2 Algorithmes pour le problème SAT . . . . . . . . . . . . . . . . . 71
3.2.1 Problème FNDSAT . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 72
3.2.2 Problème HORNSAT . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 73
3.2.3 Problème 2SAT . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 74
3.3 Aller plus loin . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 78
3.4 Exercices . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 79

**4 Problème** VALIDE **83**
4.1 Pravda . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85
4.2 Système de résolution . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85
4.2.1 Comment se sert-on du système de résolution ? . . . . . . . 86
4.2.2 Correction et complétude . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 86
4.2.3 Démonstration de la correction . . . . . . . . . . . . . . . . 87
4.2.4 Démonstration de la complétude . . . . . . . . . . . . . . . 88
4.3 Déduction naturelle . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 90
4.4 Calcul des séquents . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 94
4.5 Aller plus loin . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 97
4.6 Exercices . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 98

**5 Compacité** **99**
5.1 Énoncés . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99
5.2 Applications . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 100
5.3 Aller plus loin . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 102

5.4 Exercices . . . . . . . . . . 103

**II Logique du premier ordre 105**

**6 Termes 107**
6.1 Syntaxe des termes . . . . . . . . . . 107
6.2 Substitution . . . . . . . . . . 109
6.3 $\mathcal{F}$-algèbre . . . . . . . . . . 110
6.4 Zoom sur l'algèbre des termes . . . . . . . . . . 111
6.5 Sémantique des termes . . . . . . . . . . 112
6.6 Classes équationnelles de $\mathcal{F}$-algèbres . . . . . . . . . . 114
6.6.1 Problème d'unification . . . . . . . . . . 115
6.6.2 Logique équationnelle . . . . . . . . . . 118
6.7 Aller plus loin . . . . . . . . . . 118
6.8 Exercices . . . . . . . . . . 119

**7 Formules 121**
7.1 Syntaxe . . . . . . . . . . 121
7.1.1 Signature . . . . . . . . . . 122
7.1.2 Formules atomiques . . . . . . . . . . 122
7.1.3 Formules du premier ordre . . . . . . . . . . 123
7.1.4 Variables libres ou liées . . . . . . . . . . 124
7.2 Sémantique . . . . . . . . . . 126
7.2.1 Modèles . . . . . . . . . . 126
7.2.2 Sémantique « à la Tarski » . . . . . . . . . . 128
7.2.3 Zoom sur la notation $\models$ . . . . . . . . . . 130
7.3 Ordre des quantificateurs dans une formule . . . . . . . . . . 131
7.4 Équivalences classiques en logique du premier ordre . . . . . . . . . . 131
7.5 Forme prénexe . . . . . . . . . . 136
7.6 Conséquence logique . . . . . . . . . . 136
7.7 Substitution de variables dans les formules . . . . . . . . . . 137
7.8 Sémantique relationnelle . . . . . . . . . . 140
7.9 Aller plus loin . . . . . . . . . . 142
7.10 Exercices . . . . . . . . . . 143

**8 Cardinalité des modèles 145**
8.1 Forme universelle et skolémisation . . . . . . . . . . 146
8.1.1 Une explication intuitive . . . . . . . . . . 147
8.1.2 Forme de Skolem . . . . . . . . . . 148
8.1.3 Équisatisfaisabilité avec la forme de Skolem . . . . . . . . . . 149
8.2 Forme clausale . . . . . . . . . . 151

8.3 Théorème de Herbrand . . . 153
8.4 Instances de Herbrand et logique propositionnelle . . . 156
8.5 Théorème de compacité . . . 158
8.6 Théorème de Lowenheim-Skolem descendant . . . 159
8.7 Théorème de Lowenheim-Skolem ascendant . . . 160
8.8 Causalité entre les théorèmes . . . 160
8.9 Aller plus loin . . . 161
8.10 Exercices . . . 162

**9 Problème VALIDE** **163**
9.1 Système de résolution . . . 163
9.1.1 Règles . . . 164
9.1.2 Correction . . . 165
9.1.3 Complétude . . . 166
9.1.4 Bilan sur la résolution . . . 168
9.2 Indécidabilité du problème VALIDE . . . 169
9.3 Aller plus loin . . . 173
9.4 Exercices . . . 175

**10 Systèmes de preuves** **177**
10.1 Déduction naturelle . . . 177
10.1.1 Correction de la déduction naturelle . . . 180
10.1.2 Complétude de la déduction naturelle . . . 181
10.2 Calcul des séquents . . . 186
10.3 Aller plus loin . . . 188
10.4 Exercices . . . 189

**11 Théories du premier ordre** **191**
11.1 Notion de théorie . . . 191
11.2 Théorie complète . . . 193
11.3 Axiomatisation . . . 195
11.4 Théories récursive et récursivement énumérable . . . 197
11.5 Élimination des quantificateurs . . . 200
11.6 Théories axiomatisées particulières . . . 201
11.6.1 Théorie de l'égalité . . . 201
11.6.2 Arithmétique de Presburger . . . 202
11.6.3 Arithmétique de Peano . . . 203
11.6.4 Arithmétique vraie . . . 203
11.6.5 Théorie des ordres denses . . . 204
11.7 Aller plus loin . . . 206
11.8 Exercices . . . 208

**III Pour aller plus loin en logique du premier ordre 211**

**12 Théorie des modèles finis et Jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé 213**
12.1 Limites du théorème de compacité . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 214
12.2 Notions préliminaires et rappels . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 215
12.2.1 Rang d'une formule . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 215
12.2.2 Isomorphisme . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 216
12.2.3 Sous-structures d'une structure . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 217
12.2.4 Isomorphisme partiel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 218
12.3 Jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 218
12.3.1 Description des jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé . . . . . . . . . . 219
12.3.2 Exemples de jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé . . . . . . . . . . . 221
12.3.3 Théorème d'Ehrenfeucht-Fraïssé . . . . . . . . . . . . . . 223
12.4 Application des jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé . . . . . . . . . . 223
12.4.1 Méthode pour des preuves d'inexprimabilité . . . . . . . . . 223
12.4.2 Quelques exemples d'inexprimabilité . . . . . . . . . . . 225
12.5 Aller plus loin . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 226

**13 Automates et logique 227**
13.1 Automates et expressions régulières sur $\Sigma$ . . . . . . . . . . . . . 228
13.2 Structures automatiques et logique du premier ordre . . . . . . . . . 233
13.2.1 Présentations automatiques et structures automatiques . . . 233
13.2.2 Théorie du premier ordre des structures automatiques . . . . 235
13.3 Logique du temps linéaire sur les traces finies . . . . . . . . . . . . 236
13.3.1 Logique du premier ordre sur les mots finis . . . . . . . . . . 237
13.3.2 Logique temporelle du temps linéaire $\mathrm{LTL}_{\mathtt{f}}$ . . . . . . . . . 238
13.3.3 Automates pour la logique du temps linéaire . . . . . . . . 239
13.3.4 Logique $\mathrm{LTL}_{\mathtt{f}}$ et logique du premier ordre, théorème de Kamp 240
13.4 Aller plus loin . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 241

**14 Bases de données et logique 243**
14.1 Voir une base de données comme un modèle . . . . . . . . . . . . 244
14.1.1 Domaine . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 244
14.1.2 Signature . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 244
14.1.3 Tuple . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 245
14.1.4 Base de données . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 246
14.2 Calcul relationnel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 246
14.2.1 Requête du calcul relationnel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 247
14.2.2 Le domaine est-il important ? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 248
14.2.3 Indépendance au domaine . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 249
14.2.4 Domaine actif . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 249
14.2.5 Calcul conjonctif . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 250

14.3 Algèbre relationnelle . . . 251
14.3.1 Opérations . . . 251
14.3.2 Syntaxe . . . 251
14.3.3 Sémantique . . . 254
14.3.4 Jointure naturelle . . . 255
14.3.5 Requête satisfaisable . . . 256
14.3.6 Algèbre SPC . . . 256
14.4 Théorèmes de Codd . . . 256
14.4.1 Calcul conjonctif ⇔ Algèbre SPC satisfaisable . . . 256
14.4.2 Logique du premier ordre ⇔ Algèbre relationnelle . . . 261
14.5 Aller plus loin . . . 263

**IV Annexe** **265**

**15 Calculabilité et complexité** **267**
15.1 Calculabilité . . . 267
15.1.1 Problème de décision . . . 267
15.1.2 Décidabilité, indécidabilité . . . 267
15.1.3 Ensemble récursif et récursivement énumérable . . . 268
15.2 Théorie de la complexité . . . 269
15.2.1 Classe P . . . 269
15.2.2 Classe NP . . . 270
15.2.3 NP-complétude . . . 271
15.3 Machine de Turing . . . 271

**Dictionnaire des synonymes** **274**

**Bibliographie** **275**

**Index** **281**

# Avant-propos

Ce livre est le fruit de plusieurs années passées à enseigner la logique à l'Université de Rennes 1 et à l'ENS Rennes, au niveau L3 informatique et en préparation à l'agrégation de mathématiques, option informatique.

Il s'impose comme un manuel très attendu par les enseignants, mais surtout par les étudiants qui souvent rencontrent des difficultés à consulter profitablement les nombreux ouvrages principalement en anglais et dont l'ambition dépasse souvent celle d'une connaissance mûre, mais non experte, de la logique classique.

Ainsi cet ouvrage se veut-il sans prétention mais, comme nous, auteurs, l'espérons, un document de référence pour comprendre les fondements de la logique mathématique. Il est conçu pour être utilisé dans les universités francophones et dans les classes préparatoires MP2I et MPI, du niveau L2 jusqu'à la préparation à l'agrégation d'informatique.

Nous avons élaboré le contenu de ce livre sur la base d'une vaste littérature sur le sujet, tels que des ouvrages déjà publiés (voir Bibliographie), des polycopiés de collègues, et notamment celui d'Hubert Comon de l'ENS Paris-Saclay, ainsi que sous l'éclairage de notre expérience d'enseignants.

Nous proposons des exercices à la fin de chaque chapitre pour permettre aux lecteurs et lectrices de s'approprier les notions.

En flashant le QR-code ci-contre ou en allant sur le site `http://livrelogique.github.io/`, on pourra trouver des documents en lien avec ce livre. Notamment il y a un lien pour accéder à *Pravda*, assistant de preuves logiques développé pour ce livre (voir Chapitres 4 et 10). On pourra trouver sur ce site les solutions des exercices proposés à chaque fin de chapitre ainsi qu'une liste des potentielles corrections à apporter au livre pour sa bonne compréhension.

D'ailleurs, il ne faut pas hésiter à nous prévenir d'erreurs présentes dans ce livre en nous envoyant un mail à l'adresse suivante :

livrelogique@gmail.com

Dans tout le livre, nous utilisons les pictogrammes suivants dans les marges afin de donner des précisions aux lectrices et lecteurs :

un savoir-faire pour l'agrégation

un exercice portant sur la notion étudiée

un passage difficile mais optionnel

un passage difficile qu'il faut maîtriser

**Agrégation d'informatique** Le livre offre aux candidats préparant l'agrégation d'informatique une solide connaissance en logique. Concernant la première épreuve orale (d'admission), appelée *leçon d'informatique*, la leçon de logique de cette épreuve est :

> *28. Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.*

Les pictogrammes de savoir-faire seront ainsi utiles. Cependant, d'autres savoir-faire que nous proposons peuvent trouver leur place dans d'autres leçons. Par exemple, la décidabilité de l'arithmétique de Presburger (page 202) qui clairement ne convient pas à la leçon 28, serait tout à fait pertinente pour les leçons *27 Décidabilité et indécidabilité. Exemples* et *29 Langages rationnels et automates finis. Exemples et applications*. Les pictogrammes de savoir-faire recensent aussi des aspects techniques utiles aux candidates et candidats préparant l'épreuve écrite (d'admissibilité) 3b : *fondements de l'informatique*. Ces remarques s'appuient sur la version 2022 de l'agrégation, il faudra les adapter en fonction de son évolution.

**Remerciements** Nous remercions l'équipe éditoriale de Dunod, en particulier Vanessa Beunèche et Laetitia Jammet, ainsi que Jean-Baptiste Gugès pour sa relecture. Nous tenons à remercier Pierre Le Scornet pour son aide sur les exercices, Rémi Moreau, Mathias Déhais, Léo Ackermann, Jean-Michel Gorius, Alexandre Terefenko, Ocan Sankur et Grégory Gobin pour leurs relectures tant sur le fond que sur la forme. Merci à François Ernoult pour son aide sur les pictogrammes. Nous remercions également David Gross-Amblard pour la relecture du chapitre sur la théorie des bases de données, Hubert Comon pour ses excellentes notes de cours, Julien Grange pour les discussions, et enfin et surtout les étudiants de L3 du département informatique de l'ENS Rennes, de la L3 informatique de l'Université Rennes 1, et de la préparation à l'agrégation de mathématiques (option informatique) à l'ENS Rennes.

Pierre Le Barbenchon, Sophie Pinchinat et François Schwarzentruber

# Introduction

La logique est aux mathématiques ce que le solfège est à la musique, ce que la grammaire est au langage, ce que l'architecture est à la construction d'édifice, ou encore ce que le fil d'Ariane est au labyrinthe...

Elle est un champ interdisciplinaire qui traite des principes formels du raisonnement, c'est-à-dire des inférences et des démonstrations que l'on peut mener en partant d'énoncés.

Il existe de nombreuses branches de la logique, dont la nature est guidée par les concepts que l'on veut exprimer et par le type de raisonnement que l'on veut pouvoir mener. Pour une première approche, comme dans ce livre, c'est la logique dite *classique*, une théorie de la vérité, qui offre un spectre large de notions et dont les fondements restent assez simples puisqu'elle repose sur des postulats : le *tiers exclu* qui considère qu'un énoncé est soit vrai soit faux, le *raisonnement par l'absurde*, la *contraposition*,... Dans toute logique, les énoncés sont appelés des *formules* qui s'interprètent dans un *modèle*, de manière à définir leur *valeur de vérité* ; c'est ce qu'on appelle leur *sémantique*.

Pour comprendre la logique classique, il est conseillé de commencer par une logique simple, la *logique propositionnelle* (que nous traitons en Partie I), puis d'ajouter de l'expressivité à celle-ci en considérant la *logique du premier ordre* (étudiée en Partie II).

En logique propositionnelle, les formules sont obtenues à partir de variables propositionnelles de base qui décrivent des faits, de connecteurs qui reflètent les conjonctions de coordination de la langue naturelle (en langue française *mais, ou, et, donc, or, ni, car*) et de la forme négative d'une phrase (en langue française *ne pas*). Un modèle est une *valuation* qui fixe la valeur de vérité des variables propositionnelles.

La Partie I sur la logique propositionnelle se décompose en cinq chapitres, avec la progression suivante.

**Chapitre 1 - Formules** Dans ce chapitre, on définit la logique propositionnelle pour un ensemble fixé $Prop$ de variables propositionnelles. La syntaxe des formules s'appuie sur les variables propositionnelles de $Prop$ pour les énoncés élémentaires, et sur l'ensemble de *connecteurs* $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ permettant de combiner ces énoncés ;

par exemple, le connecteur $\wedge$ reflète la conjonction de coordination « et ». La valeur de vérité d'une formule dépend uniquement de la valeur de vérité des variables propositionnelles qui la composent. La donnée d'une valeur pour chaque variable propositionnelle s'appelle une *valuation*. La sémantique d'une formule repose sur l'ensemble de ses modèles que sont les valuations.

**Chapitre 2 - Fragments syntaxiques** Notre choix d'utiliser les connecteurs $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ est questionnable, mais il est surtout lié à une volonté de proposer un cadre où toutes les conjonctions de coordinations de la langue naturelle sont représentées explicitement. Toutefois, comme nous l'étudions dans ce chapitre, il est possible de restreindre l'ensemble des connecteurs sans pour autant perdre en expressivité, c'est-à-dire renoncer à certains énoncés. Ensuite, nous étudions d'autres types de restrictions syntaxiques, dont certaines qui préservent l'expressivité, alors que d'autres l'amoindrissent mais ont l'avantage de se prêter plus efficacement aux traitements automatiques (comme établi dans le chapitre suivant). Parmi les restrictions qui n'entachent pas l'expressivité, la *forme normale conjonctive* joue un rôle central.

**Chapitre 3 - Problème** SAT Ce chapitre traite le problème de satisfaisabilité d'une formule de la logique propositionnelle, c'est-à-dire de l'existence d'un modèle. En parcourant l'ensemble fini des valuations, il est facile de chercher un candidat. Cet algorithme naïf est coûteux puisque l'espace des candidats est vaste, mais nous montrons que cette inefficacité est intrinsèque au problème. En revanche, certaines restrictions syntaxiques décrites au chapitre précédent, qui amoindrissent l'expressivité, offrent de bons algorithmes.

**Chapitre 4 - Problème** VALIDE Ce chapitre traite le problème de validité d'une formule, c'est-à-dire le fait qu'elle correspond à un énoncé infalsifiable. Il est clair que ce problème est le dual du problème de satisfaisabilité, puisque la négation d'une formule vraie dans tous les modèles est insatisfaisable. Ainsi pouvons-nous tirer parti de nombreux développements du chapitre précédent. Néanmoins, ce chapitre nous offre l'opportunité de découvrir l'univers des *systèmes de preuves*. Ces systèmes formels reposent sur des règles de déduction qui reflètent les démonstrations mathématiques. Nous présentons en détail le cas particulier du *système de résolution* dont la philosophie repose sur une démonstration par *réfutation*. Nous terminons le chapitre en explorant d'autres systèmes de preuves qui décrivent des démonstrations par allégation, c'est-à-dire par argumentation directe comme couramment en mathématiques.

**Chapitre 5 - Compacité** Dans ce chapitre, nous utilisons un ensemble infini de variables propositionnelles, de manière à considérer des ensembles infinis de formules non équivalentes deux à deux. De tels ensembles de formules permettent de décrire les propriétés d'une structure mathématique infinie, telle que la grille du plan, ou plus généralement un graphe infini. Nous établissons le théorème de compacité qui énonce que l'on peut indifféremment aborder le problème de satisfaisabilité d'un ensemble donné infini de formules, ou aborder celui de la satisfaisabilité de chacun de ses sous-ensembles finis. Nous montrons une application de ce théorème sur les graphes infinis et revenons sur celui-ci dans la Partie II, puisqu'il est la clé de voûte d'un second théorème de compacité pour la logique du premier ordre.

La logique propositionnelle est très limitée puisqu'elle ne permet pas de décrire certaines situations réelles mettant en jeu des individus ou des objets, comme par exemple l'énoncé générique « Si $x$ est le père de $y$ et si $z$ est le père de $x$ alors $z$ est un grand-père de $y$ », ou l'énoncé universel « Toute personne a un père », ou encore une propriété mathématique telle que « une relation est réflexive et euclidienne si, et seulement si, elle est une relation d'équivalence ».

Pour pallier cette limitation de la logique propositionnelle, on introduit la logique du premier ordre, dont les énoncés se rapprochent encore plus de la langue naturelle. On utilise alors des *termes* pour dénoter les objets, des *symboles de relation* pour les énoncés de base qui relient des objets, et enfin, pour construire des énoncés élaborés, et en plus des connecteurs déjà introduits en logique propositionnelle, les *quantificateurs*, « pour tout » et « il existe », classiques en mathématiques. La syntaxe des formules de la logique du premier ordre se veut donc plus complexe que celle de la logique propositionnelle, et il en est de même pour leur sémantique : en logique du premier ordre, un modèle d'une formule est une *structure* (au sens mathématique, comme un groupe, un anneau, etc.).

Il faut noter que la logique propositionnelle est un fragment de la logique du premier ordre, dans le cas particulier où les symboles de relation utilisés dans les formules s'interprètent comme des relations dégénérées d'arité nulle. D'ailleurs, certains ouvrages comme [End72], ne présentent essentiellement que la logique du premier ordre avant d'en dégager le fragment plus faible inhérent à la logique propositionnelle.

Aussi, il existe une différence importante entre les deux logiques. Alors que la classe des modèles d'une formule de la logique propositionnelle est finie, celle d'une formule du premier ordre est infinie. Cet état de fait a des répercussions sévères au niveau algorithmique. En particulier, il n'existe pas d'algorithme pour répondre à la question de la *validité*, c'est-à-dire « étant donné une formule de logique du premier ordre, est-elle vraie dans tous les modèles ? », alors que c'est le cas pour la logique propositionnelle. On dit succinctement que *la logique du premier ordre est indécidable*.

La Partie II, consacrée à la logique du premier ordre, est composée des chapitres suivants.

**Chapitre 6 - Termes** Ce chapitre explique comment dénoter des éléments d'une structure mathématique, sur la base d'objets syntaxiques appelés *termes*. Les termes sont obtenus en partant de *symboles de variables* et de *symboles de fonctions*; les derniers étant piochés dans un ensemble fixé $\mathcal{F}$. Les structures mathématiques obtenues sont les $\mathcal{F}$-*algèbres*. On aborde à la fin de ce chapitre un fragment naturel de la logique du premier ordre, appelé *logique équationnelle*, qui repose uniquement sur des énoncés d'égalité entre termes.

**Chapitre 7 - Formules** Pour obtenir des énoncés plus généraux que ceux de la logique équationnelle du chapitre précédent, on équipe les $\mathcal{F}$-algèbres de relations entre les éléments. Ainsi, en plus des symboles de fonction, on se fixe un ensemble $\mathcal{R}$ de *symboles de relations*. Chaque paire $\mathcal{S} = (\mathcal{F}, \mathcal{R})$, appelée *signature*, induit la classe des $\mathcal{S}$-*structures*. Pour former les formules, on part des formules *atomiques* fondées sur les symboles de relations, puis on s'autorise les connecteurs de la logique propositionnelle et les *quantificateurs*. Les modèles d'une formule sur la signature $\mathcal{S}$ sont les $\mathcal{S}$-*structures*.

Ce chapitre et le précédent terminent la syntaxe et la sémantique de la logique du premier ordre, qu'on rappelle dans le tableau ci-dessous.

| | **Syntaxe** | **Sémantique** |
|---|---|---|
| Chapitre 6 | Terme | $\mathcal{F}$-algèbre |
| Chapitre 7 | Formule | $\mathcal{S}$-structure |

**Chapitre 8 - Cardinalité des modèles** Dans ce chapitre, nous montrons une grande proximité entre la logique du premier ordre et la logique propositionnelle ; une proximité dont on peut tirer parti à de nombreux égards. Une étape importante pour y parvenir consiste à considérer les *formes normales de Skolem* qui sont des formules sans quantificateur existentiel. La *skolémisation* est la transformation des formules pour obtenir des formes de Skolem. Elle se base sur une explicitation, dans la signature, d'une relation fonctionnelle entre éléments, et est induite par les alternances de quantificateurs des formules. La forme de Skolem obtenue est en général non équivalente à la formule dont on part, mais les deux formules sont équisatisfaisables – elles ont toutes deux au moins un modèle ou aucun modèle – avec des modèles de même cardinal.

Pour les formes de Skolem, nous exhibons des modèles particuliers dits *de Herbrand*, d'une nature très syntaxique, qui suffisent à statuer sur la satisfaisabilité des formes de Skolem. Ces modèles établissent un lien explicite entre les modèles d'une forme de Skolem et ceux d'un ensemble infini de formules de la logique propositionnelle. C'est d'ailleurs par ce biais que nous établissons le théorème de *compacité* et la complétude du système de preuves de résolution pour la logique du premier ordre.

Nous montrons que le théorème de compacité est un outil précieux pour prouver l'inexpressibilité de certaines propriétés en logique du premier ordre ; par exemple, il n'existe pas de formule de la logique du premier ordre pour exprimer le caractère fini d'un modèle. Toujours sur la base des modèles de Herbrand, nous explorons, en lien avec le cardinal de la signature utilisée, des garanties sur le cardinal des modèles d'une forme de Skolem, et conséquemment d'une formule arbitraire de la logique du premier ordre.

**Chapitre 9 - Problème** VALIDE Ce chapitre traite le problème VALIDE, qui consiste à se demander si une formule est vraie dans toute structure. Puisque cet ensemble de structures est infini, il n'est pas envisageable de les considérer une par une ; d'ailleurs, nous rappelons l'argument pour l'absence d'algorithme y répondant. Toutefois, nous disposons de l'alternative qui repose sur des systèmes de preuves. Nous présentons ici le cas du système de résolution, une extension de celui vu au Chapitre 4 pour la logique propositionnelle.

**Chapitre 10 - Systèmes de preuves** Ce chapitre présente d'autres systèmes de preuves qui essentiellement sont tous équivalents, mais dont le style varie significativement. Contrairement au système de résolution étudié au chapitre précédent, ces systèmes proposent une démonstration de la validité d'une formule par allégation (un argument direct).

**Chapitre 11 - Théories du premier ordre** Pour se rapprocher de la démarche mathématique, il est important de circonscrire des classes de structures particulières, comme les groupes ou les corps, et d'en étudier les propriétés universelles. La notion de *théorie* en logique en est un moyen : on peut caractériser une classe de structures comme celle des modèles d'un ensemble fixé de formules, les *axiomes*, de sorte que toute formule conséquence logique de ces axiomes énonce un « théorème » de la classe. Il est alors intéressant de savoir si on dispose d'algorithmes pour identifier, ou au moins énumérer, ces théorèmes.

Pour aller plus loin en logique du premier ordre, nous proposons une Partie III, dans laquelle nous avons choisi une écriture plus avancée s'adressant à un lecteur averti.

**Chapitre 12 - Théorie des modèles finis et Jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé** Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la sous-classe des modèles finis de la logique du premier ordre. Cette sous-classe est importante, elle sert par exemple dans la théorie des bases de données, mais plus généralement en informatique puisque les objets que les ordinateurs contiennent et gèrent sont toujours finis [1]. Nous établissons que dans cette classe, le théorème de compacité ne tient plus, ce qui nous prive de cet outil pour démontrer qu'une propriété sur les modèles finis n'est pas exprimable en logique du premier ordre. Nous décrivons alors l'outil des *jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé* et une méthode qui les exploite pour recouvrer une technique de preuve d'inexpressivité de la logique du premier ordre. Nous terminons par deux applications de ladite méthode.

**Chapitre 13 - Automates et logique** Il nous semble important de donner des exemples d'intrication entre la logique et la théorie des automates, deux outils fondamentaux en informatique. Le premier exemple est aux antipodes du contexte du chapitre précédent sur les modèles finis. Il décrit une manière de représenter finiment des modèles infinis de la logique du premier ordre, au moyen d'automates finis. Cette possibilité confère aux modèles ainsi représentables, appelés *structures automatiques*, une régularité parfaite. Bien que ces structures puissent être infinies, nous présentons un algorithme qui détermine si une structure automatique est modèle d'une formule arbitraire de la logique du premier ordre. Le second exemple fait usage des automates d'une façon radicalement différente puisque nous les utilisons pour décrire les formules au lieu de décrire les modèles. Nous considérons la sous-classe des modèles composée des ordres linéaires finis discrets équipés de la logique du premier ordre sur une signature uniquement composée de symboles de relations unaires. Nous rappelons que la sémantique de cette logique coïncide avec la logique temporelle du temps linéaire sur les traces finies $\mathrm{LTL}_{\mathtt{f}}$, et que pour toute formule de cette logique, il est possible de construire effectivement un automate qui reconnaît exactement les modèles de cette formule.

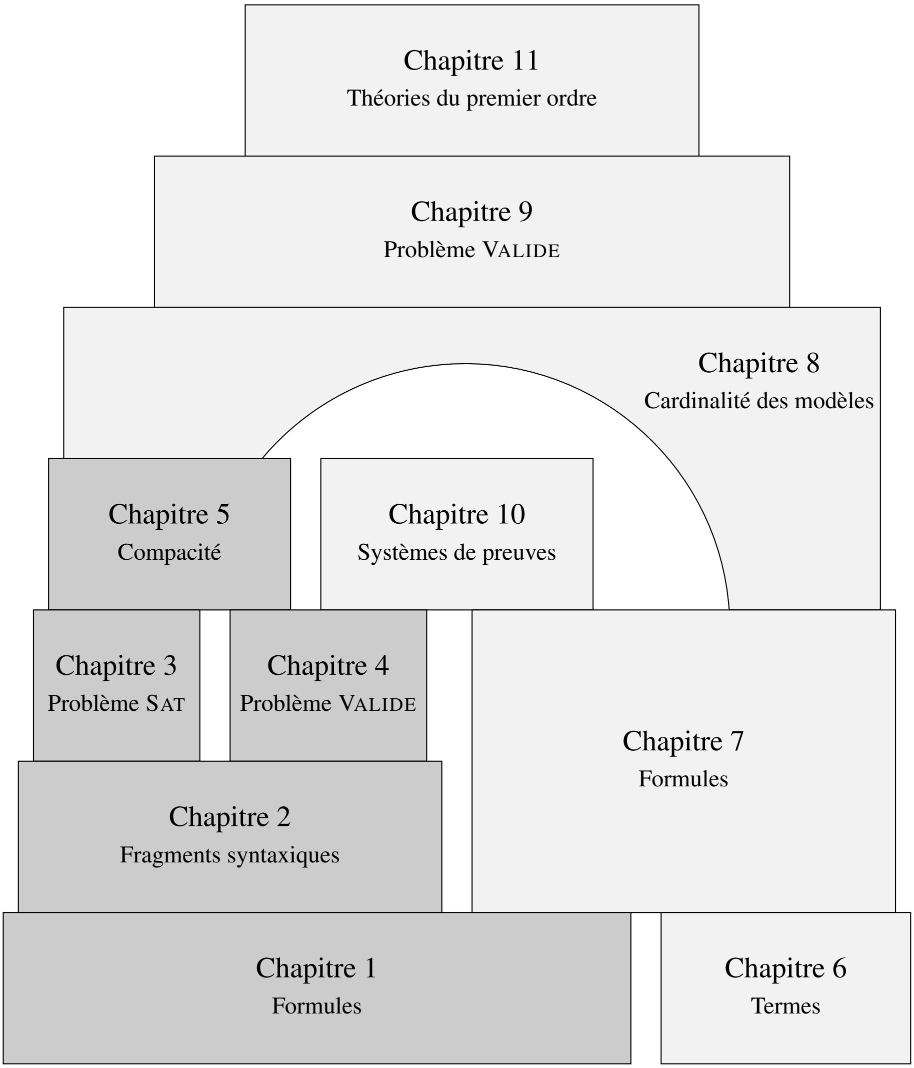
**Chapitre 14 - Bases de données et logique** Dans ce dernier chapitre, nous nous intéressons au lien entre la logique du premier ordre et les bases de données. Notamment, nous expliquons comment on peut voir une base de données (souvent représentée par des tableaux, appelés *tables*) comme un modèle de la logique du premier ordre. On peut alors interroger la base de données à l'aide de *requêtes* que l'on écrit soit avec des formules du calcul relationnel, soit avec des opérations algébriques de l'algèbre relationnelle. Enfin, nous démontrons le théorème de Codd qui permet de justifier l'équivalence entre les deux approches.

Nous proposons une annexe en Partie IV qui assoit les fondements de calculabilité et de complexité, dont nous avons besoin dans certains de nos chapitres.

1. La théorie des modèles finis est aussi utile en complexité descriptive et en théorie des langages formels, deux sujets qui sortent du champ de cet ouvrage.

Nous expliquons l'interdépendance des chapitres du livre en associant une brique à chaque chapitre dans l'édifice dessiné ci-dessous. Autrement dit, avant de lire un chapitre, il faut avoir lu les chapitres sur lesquels reposent sa brique.

Les chapitres de la Partie I sur la logique propositionnelle sont en gris foncé et les chapitres de la Partie II sur la logique du premier ordre sont en gris clair.



# Liste des notations

### Symboles

| | |
|---|---|
| $\wedge$ | connecteur logique « et » |
| $\vee$ | connecteur logique « ou » |
| $\neg$ | connecteur logique négation |
| $\rightarrow$ | connecteur logique implication |
| $\leftrightarrow$ | connecteur logique équivalence |
| $\uparrow$ | connecteur de Sheffer |
| $\exists$ | quantificateur « il existe » |
| $\forall$ | quantificateur « pour tout » |
| $\top$ | symbole toujours `vrai` |
| $\bot$ | symbole toujours `faux` |
| $\equiv$ | symbole d'équivalence entre deux formules |
| $\varphi$, $\psi$, $\theta$, $\phi$ | une formule |
| $\Gamma, \Delta$ | un ensemble de formules |
| $p$, $q$, $r$ | une variable propositionnelle |
| $\ell$ | un littéral |
| $C$ | une clause |
| $\mathcal{E}$ | un ensemble de clauses |
| $x$, $y$, $z$ | une variable |
| $\bar{x}$ | un tuple de variables de la forme $(x_1, \ldots, x_n)$ |
| $f$, $g$, $h$ | un symbole de fonction |
| $R$, $Q$, $P$ | un symbole de relation |

| | |
|---|---|
| $\mathcal{T}$ | une théorie |
| $\models$ | satisfait (sémantiquement) |
| $\not\models$ | ne satisfait pas |
| $\vdash$ | système de preuves (syntaxiquement) |
| $A$ | ensemble d'arêtes d'un graphe |
| $S$ | ensemble de sommets d'un graphe |
| $\Sigma$ | alphabet |
| $\bowtie$ | symbole de jointure |
| $\stackrel{def}{=}$ | se définit par |

**Mathématiques**

| | |
|---|---|
| $\cup$ | union |
| $\cap$ | intersection |
| $\#A$ | cardinal de l'ensemble $A$ |
| $A^{\complement}$ | complémentaire de l'ensemble $A$ |
| $A \setminus B$ | $A$ privé de $B$ |
| $A \times B$ | produit cartésien de $A$ avec $B$ |
| $[\![n; m]\!]$ | ensemble des entiers de $n$ à $m$ (inclus) |
| $2^E$ | ensemble des parties de $E$ |
| $\pi_k$ | projection sur la $k^{\text{ième}}$ coordonnée |
| $\pi_{\neq k}$ | projection sur toutes les coordonnées sauf la $k^{\text{ième}}$ |
| $\mathbb{C}$ | ensemble des complexes |
| $\mathbb{N}$ | ensemble des entiers positifs |
| $\mathbb{Q}$ | ensemble des rationnels |
| $\mathbb{R}$ | ensemble des réels |
| $\mathbb{Z}$ | ensemble des entiers relatifs |
| *i.e.* | *id est* |
| ssi | si et seulement si |

**Logique propositionnelle**

| | |
|---|---|
| $\|\varphi\|$ | taille de la formule $\varphi$ |
| $h(\varphi)$ | hauteur de la formule $\varphi$ |
| $\mathrm{SF}(\varphi)$ | ensemble des sous-formules de $\varphi$ |
| $\mathrm{SF}\textsc{st}(\varphi)$ | ensemble des sous-formules strictes de $\varphi$ |
| $\|\omega\|_\alpha$ | nombre de caractères $\alpha$ de l'expression $\omega$ |
| $Prop$ | ensemble des variables propositionnelles |
| $Prop(\varphi)$ | ensemble des variables propositionnelles de la formule $\varphi$ |
| $Prop(\nu)$ | domaine de définition de la valuation $\nu$ |
| $\nu$ | valuation |
| $\eta$ | valuation partielle |
| $Val$ | ensemble des valuations |
| $Mod(\varphi)$ | ensemble des modèles d'une formule $\varphi$ |
| $\mu$ | assignation |
| $\nu \models \varphi$ | $\varphi$ est vraie pour la valuation $\nu$ |
| $\models \varphi$ | $\varphi$ est valide |
| $\Gamma \models \varphi$ | $\varphi$ est conséquence logique de $\Gamma$ |
| $\varphi\{p \mapsto \psi\}$ | substitution de $p$ par la formule $\psi$ dans la formule $\varphi$ |
| $\mathsf{A}(\mathcal{E})$ | arbre sémantique de l'ensemble de clauses $\mathcal{E}$ |
| $G_\varphi$ | graphe d'implication de la formule $\varphi$ |
| FNC | forme normale conjonctive |
| FND | forme normale disjonctive |

**Logique du premier ordre**

| | |
|---|---|
| $\mathcal{S}$ | une signature |
| $\alpha[n]$ | symbole $\alpha$ d'arité $n$ |
| $\mathcal{F}$ | ensemble des symboles de fonction |
| $\mathcal{F}_n$ | ensemble des symboles de fonction d'arité $n$ |
| $\mathcal{R}$ | ensemble des symboles de relation |

| | |
|---|---|
| $\mathcal{R}_n$ | ensemble des symboles de relation d'arité $n$ |
| $Var(\varphi)$ | ensemble des variables de la formule du premier ordre $\varphi$ |
| $\mathsf{libre}(\varphi)$ | ensemble des variables libres de $\varphi$ |
| $\mathsf{liée}(\varphi)$ | ensemble des variables liées de $\varphi$ |
| $X$ | ensemble des variables |
| $\mathcal{T}(\mathcal{F}, X)$ | ensemble des termes sur $\mathcal{F}$ et $X$ |
| $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ | ensemble des termes clos sur $\mathcal{F}$ |
| $\mathsf{AtomesClos}(\mathcal{F}, \mathcal{R})$ | ensemble des formules atomiques closes |
| $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ | $\mathcal{F}$-algèbre, $\mathcal{S}$-structure ou modèle |
| $D_{\mathcal{M}}$ | domaine du modèle $\mathcal{M}$ |
| $Mod(\varphi)$ | ensemble des modèles d'une formule $\varphi$ |
| $\lambda$ | une affectation |
| $[x := a]$ | affectation de $a$ à la variable $x$ |
| $\mathsf{Affec}_{\mathcal{M}}$ | ensemble des affectations sur le domaine de $\mathcal{M}$ |
| $\sigma$ | une substitution |
| $\varphi\{x \mapsto t\}$ | substitution de $x$ par le terme $t$ dans la formule $\varphi$ |
| $\mathcal{M} \models \varphi$ | $\varphi$ est vraie dans la structure $\mathcal{M}$, *i.e.* $\mathcal{M}$ est un modèle de $\varphi$ |
| $\mathcal{M}, \lambda \models \varphi$ | $\mathcal{M}$ pour l'affectation $\lambda$ satisfait $\varphi$ |
| $\models \varphi$ | $\varphi$ est valide |
| $\Gamma \models \varphi$ | $\varphi$ est conséquence logique de $\Gamma$ |
| $[\![ t ]\!]_{\mathcal{M},\lambda}$ | valeur d'un terme $t$ dans la $\mathcal{F}$-algèbre $\mathcal{M}$ pour l'affectation $\lambda$ |
| $f^{\mathcal{M}}$ | interprétation de la fonction $f$ dans la structure $\mathcal{M}$ |
| $R^{\mathcal{M}}$ | interprétation de la relation $R$ dans la structure $\mathcal{M}$ |
| $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$ | relation induite par la formule $\varphi$ dans la structure $\mathcal{M}$ |
| $Sk(\varphi)$ | forme de Skolem de $\varphi$ |
| $f_{x,\varphi}$ | symbole de Skolem associé à la variable $x$ et la formule $\varphi$ |
| $\mathcal{H}$ | structure de Herbrand |
| $I(C)$ | ensemble des instances de Herbrand de la clause $C$ |

| | |
|---|---|
| $t \overset{?}{=} u$ | problème d'unification du terme $t$ et du terme $u$ |
| $\varphi_{\geqslant n}$ | formule qui exprime que le domaine a au moins $n$ éléments distincts |
| $\begin{array}{\|c\|}\hline u \\ \hline v \\ \hline\end{array}$ | un domino contenant le mot $u$ en haut et $v$ en bas |
| $\begin{array}{c} u \\ v \end{array}$ | succession de dominos telle que le mot $u$ apparaisse en haut et $v$ apparaisse en bas |
| $\mathfrak{C}$ | une classe de structures |
| $\mathtt{Ax}$ | axiomatisation, *i.e.* ensemble d'axiomes récursif |
| $\mathtt{Th}(\Gamma)$ | théorie induite par $\Gamma$ |

**Systèmes de preuves**

| | |
|---|---|
| $\Gamma \vdash \varphi$ | séquent (de déduction naturelle ou de calcul des séquents) |
| $\vdash_{\mathbf{cs1}}$ | preuve en calcul des séquents en logique du premier ordre |
| $\vdash_{\mathbf{cs}}$ | preuve en calcul des séquents en logique propositionnelle |
| $\vdash_{\mathbf{dn1}}$ | preuve par déduction naturelle en logique du premier ordre |
| $\vdash_{\mathbf{dn}}$ | preuve par déduction naturelle en logique propositionnelle |
| $\vdash_{\mathbf{R1}}$ | preuve par résolution en logique du premier ordre |
| $\vdash_{\mathbf{R}}$ | preuve par résolution en logique propositionnelle |

**Partie III**

| | |
|---|---|
| $im(g)$ | image de la fonction $g$ |
| $dm(g)$ | domaine de définition de la fonction $g$ |
| $\equiv_n$ | symbole d'équivalence pour les formules de $\mathcal{L}^1_{\leqslant n}$ |
| $\mathbf{L}_m$ | ordre linéaire de longueur $m$ |
| $\mathcal{L}^1_{\leqslant n}$ | ensemble des formules de rang au plus $n$ |
| $EF_n(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ | voir page 219 |
| $EF_\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ | voir page 219 |
| $\mathrm{LTL}_{\mathtt{f}}$ | logique temporelle du temps linéaire sur les traces finies |
| $\mathbf{Pair}$ | propriété d'avoir un domaine de cardinal pair |
| $\mathtt{rq}(\varphi)$ | rang d'une formule $\varphi$ |