SOMMAIRE

1 INTRODUCTION - LOGIQUE ET DÉMONSTRATION

STELLA BARUK, *DICTIONNAIRE DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.*

> « Une démonstration est destinée à convaincre un interlocuteur réel ou imaginaire de la vérité d'une proposition[.] »

Dans cet ouvrage, nous allons vous apprendre, à partir de solides bases logiques, comment faire exactement cela. Considérez la phrase suivante.

> Là-bas au loin, j'ai vu un éléphant avec mon télescope sur la colline.

Ambiguïté

Ai-je utilisé mon télescope pour observer l'éléphant, ou lui ai-je prêté mon télescope pour qu'il aille observer les étoiles ? En mathématiques, nous cherchons à éviter ces ambiguïtés d'interprétation, surtout lorsqu'il s'agit de convaincre un ami ou un professeur de la véracité d'une démonstration.
En langue naturelle, c'est-à-dire celle utilisée par les humains, le **contexte** permet de conclure (la plupart des éléphants ne savent pas régler un télescope) ; mais les mathématiciens n'ont eu de cesse de dévoiler et de clarifier les ambiguïtés du langage afin de communiquer leurs idées mathématiques nouvelles qui ne seraient, sans cela, peut-être pas appréciées à leur juste valeur. En effet, si je ne vous avais pas proposé l'interprétation selon laquelle j'avais prêté un télescope à mon ami pachyderme astronome, vous auriez peut-être interprété cette phrase différemment.
Outre cette fonction communicative, l'étude des ambiguïtés et du langage adéquat pour les détecter et les éliminer, que nous pourrions appeler logique formelle, comprend également l'étude de structures de raisonnement telles que le **syllogisme** :

> Socrate est un homme. Tous les hommes sont mortels. **DONC**, Socrate est mortel.

EXERCICE 1 :

Quelle est la relation entre les concepts d'humanité et de mortalité ? Imaginez un autre syllogisme qui met en jeu deux concepts selon la même relation.

Courte histoire de la logique

La logique est intimement liée à l'étude de la langue naturelle. En Occident, nous pouvons faire commencer l'histoire de la **logique formelle**, qui se rapporte à la structure des raisonnements, avec l'*Organon* d'Aristote qui, au IV^{e} siècle avant Jésus Christ, conçoit la logique comme l'étude des syllogismes. Très tôt apparaît l'idée d'utiliser des langages artificiels pour enquêter sur les phénomènes logiques : Aristote utilise des variables et des lettres (grecques) pour faire référence à ses formules. Dans l'*Art de la Découverte* (1685), Leibniz, aussi connu pour son calcul infinitésimal, propose une étude mathématique de la logique basée sur la manipulation de symboles comme on peut le faire en arithmétique :

LEIBNIZ, *L'ART DE LA DÉCOUVERTE*

« La seule manière de rectifier notre raisonnement est de rendre [les symboles] aussi tangibles que ceux des mathématiciens, afin que nous puissions trouver notre erreur d'un seul coup d'œil et, lorsqu'il y aura quelque dispute entre deux personnes, nous pourrons simplement dire : **calculons** sans délai pour voir qui a raison. »

À la fin du XIX^{e} siècle et au début du XX^{e}, des logiciens tels que Frege, Péano, puis Russell inventent des notations formelles et des règles pour les manipuler, en liant encore plus profondément les mathématiques et la logique ; la logique moderne est née.

Logique mathématique et démonstration

On peut avoir l'impression, lors d'une démonstration, que les notations (et les idées) ont toujours existé ; mais, ne serait-ce qu'au niveau du vocabulaire, les mathématiques ont énormément évolué, comme la langue dite naturelle. Pascal, dans ses démonstrations, utilise le symbole † (l'obèle) pour l'addition. En France, on peut faire remonter l'harmonisation du vocabulaire mathématique à Bourbaki, c'est-à-dire seulement à partir des années 1940 !

Pas d'inquiétude

Il est facile d'être débordé par la somme de théorèmes géniaux en mathématiques dont les démonstrations et les concepts mêmes semblent sortir de nulle part. Il faut se souvenir que les démonstrations sont l'aboutissement de longs travaux, que l'enseignement en mathématiques rend rarement explicites. Les résultats y sont, par nécessité, présentés comme des faits, sans nécessairement mentionner les erreurs, les explorations, les essais infructueux ou non des chercheuses et chercheurs qui les ont trouvés.

Comment savoir quel type de démonstration utiliser ?

Il est toujours possible d'utiliser plusieurs types de démonstration jusqu'à ce que l'une d'entre elles fonctionne, mais cela peut demander beaucoup de temps, d'énergie, et de café. Cette technique de « force brute » est parfois utilisée par les « prouveurs » de théorèmes automatiques qui peuvent tester des milliers de démonstrations différentes par seconde sans s'arrêter. À notre propre niveau humain, nous avons besoin d'indices plus subtils, peut-être d'imagination, voire même de méthode (une méthode pour trouver des méthodes) pour savoir quelles techniques utiliser. Pour

cela, nous pouvons examiner la structure logique de ce qu'il faut démontrer. Cela motive l'étude de la logique formelle pour connaître et reconnaître ces structures.
Notez qu'il est parfaitement possible que personne ne sache, avant de l'avoir démontrée, si une proposition est vraie ou pas, même si l'on peut avoir une **intuition** du résultat. Ce sont des problèmes ouverts, dont on ne sait s'ils sont vrais ou faux. Les chercheurs rédigent ainsi des conjectures ou des hypothèses dans lesquelles ils expriment leur intuition, motivée ou pas, sur le résultat. À l'heure de l'écriture de cet ouvrage, la conjecture de Syracuse (ou de Collatz, ou d'Ulam), par exemple, stipule que la suite de Syracuse de n'importe quel entier strictement positif n contient 1. Cette suite est définie ainsi : partant de ce nombre n, s'il est pair, on le divise par 2 ; sinon, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. Ensuite, on répète l'opération sur le nombre obtenu. Par exemple, en partant de 24, la suite de Syracuse est 24, 12, 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ... Comme souvent en théorie des nombres, la conjecture est aisée à expliquer, mais plus difficile à démontrer.
De manière générale, il est plus difficile de démontrer un théorème si l'on ne sait pas s'il est vrai ou faux. Se former une intuition au départ et formuler une hypothèse ou une conjecture peuvent simplifier la tâche.

EXEMPLE

Comparez les énoncés suivants :

1. Montrez que l'ensemble des nombres premiers est infini.
2. L'ensemble des nombres premiers est-il infini ?

Le premier énoncé indique explicitement que l'ensemble des nombres premiers est infini. Pour répondre au second énoncé, nous pouvons nous former une intuition en vérifiant qu'il existe de très grands nombres premiers. Ce n'est pas une preuve car, même si nous trouvons un nombre premier plus grand qu'un milliard de milliards, rien ne nous dit que ce n'est pas le plus grand ; mais cela permet de se faire une idée sur l'existence de nombres premiers de taille arbitrairement grande.

Dans cet ouvrage, chaque technique de preuve s'accompagne d'exemples de problèmes usuels en mathématique dans le but de déterminer la technique de preuve la plus adaptée.

Guide de lecture

- **Aspects techniques** (« Montrez-moi des exemples de démonstration mathématique tout de suite ») : Fiches qui commencent par le mot « Démonstration ».
- **Aspects théoriques et logiques** (« Je veux une introduction à la logique mathématique ») : Fiches qui commencent par le mot « Logique ». Les chapitres sur la notion d'*interprétation* sont plutôt avancés et peuvent être sautés en première lecture.