Les nombres complexes

Yves Granjon

CONSTRUCTION DE L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

MANIPULATION ET RÈGLES DE CALCUL

REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

APPLICATIONS EN TRIGONOMÉTRIE

APPLICATIONS EN PHYSIQUE

DUNOD

Création graphique intérieur et couverture : Nicolas Wiel

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-083625-3

SOMMAIRE

1 RAPPELS SUR LES ENSEMBLES DE NOMBRES

Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ nous sont relativement bien connus.

- L'ensemble $\mathbb{N}$ est celui des nombres **entiers naturels** positifs ou nuls.
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ est celui des **entiers relatifs**, positifs, négatifs ou nuls. L'ensemble $\mathbb{N}$ est bien sûr inclus dans $\mathbb{Z}$.
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ est celui des nombres **rationnels**, c'est-à-dire pouvant s'écrire sous la forme p/q où p et q sont des entiers relatifs avec $q \neq 0$. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est bien sûr inclus dans $\mathbb{Q}$.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ est encore plus vaste. Il contient tous les nombres de $\mathbb{Q}$, ainsi que tous ceux qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'un rationnel p/q et que l'on appelle des **nombres irrationnels**. Par exemple, $\sqrt{2}$, π et e ne sont pas des nombres rationnels.

REMARQUE

On peut écrire : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Si nous analysons quelques équations simples, il est assez facile de déterminer dans quels ensembles elles ont ou non des solutions. Le tableau ci-dessous en est l'illustration.

Ensemble	Équation	Solution	Exemple d'équation sans solution
$\mathbb{N}$	$x - 2 = 0$	$x = 2$	$x + 2 = 0$
$\mathbb{Z}$	$x + 2 = 0$	$x = -2$	$3x + 2 = 0$
$\mathbb{Q}$	$3x + 2 = 0$	$x = -\frac{2}{3}$	$x^2 - 2 = 0$
$\mathbb{R}$	$x^2 - 2 = 0$	$x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$	$x^2 + 1 = 0$

On notera qu'on peut toujours trouver des équations qui ne possèdent pas de solution dans un ensemble donné, mais qui en ont dans un ensemble plus vaste. Si on considère l'équation $x^2 + 1 = 0$ qui n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, on peut se poser la question de l'existence d'un ensemble plus vaste que $\mathbb{R}$ dans lequel cette équation aurait une ou plusieurs solutions.

C'est la réflexion qui a présidé à la construction de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes avec $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. C'est au XVIe siècle que les mathématiciens italiens Jérôme Cardan, Nicolo Fontana et Ludovico Ferrari les ont introduits afin d'exprimer les solutions générales de l'équation du troisième degré et, d'une manière plus générale, afin de disposer d'un ensemble dans lequel chaque équation de degré n posséderait n solutions. Dans les textes de l'époque, de tels nombres, avant de s'appeler « complexes », s'appelaient « **imaginaires** ». Ce terme persiste encore aujourd'hui.

EXERCICE

Pour chacune des équations suivantes, indiquer le nombre de solutions appartenant respectivement à $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

a) $2x^2 - x - 1 = 0$

b) $x^2 + 7x - 1 = 0$

c) $x^3 + 2x^2 - 8x = 0$

d) $x^4 - 1 = 0$

Corrigé

Recherchons dans un premier temps toutes les solutions réelles de ces équations.

a) On a $\Delta = 1 + (4 \times 2) = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{1 \pm 3}{4}$, soit : $S = \left\{1, -\dfrac{1}{2}\right\}$.

b) On a $\Delta = 49 \pm (4 \times 1) = 53 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{53}}{2}$, soit :

$$S = \left\{\frac{-7 + \sqrt{53}}{2}, \frac{-7 - \sqrt{53}}{2}\right\}.$$

c) $x^3 + 2x^2 - 8x = x(x + 4)(x - 2)$, soit : $S = \{0, -4, 2\}$.

d) $x^4 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1$, soit : $S = \{1, -1\}$.

Résumons à présent ces résultats dans un tableau indiquant le nombre de solutions appartenant aux différents ensembles.

Équation	**Dans $\mathbb{N}$**	**Dans $\mathbb{Z}$**	**Dans $\mathbb{Q}$**	**Dans $\mathbb{R}$**
$2x^2 - x - 1 = 0$	1	1	2	2
$x^2 + 7x - 1 = 0$	0	0	0	2
$x^3 + 2x^2 - 8x = 0$	2	3	3	3
$x^4 - 1 = 0$	1	2	2	2