



Les nombres complexes

Yves Granjon

CONSTRUCTION DE L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

MANIPULATION ET RÈGLES DE CALCUL

REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

APPLICATIONS EN TRIGONOMÉTRIE

APPLICATIONS EN PHYSIQUE

DUNOD

Création graphique intérieur et couverture : Nicolas Wiel

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>	<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
	

© Dunod, 2022

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-083625-3

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

- FICHE 1** ▶ Rappels sur les ensembles de nombres
- FICHE 2** ▶ Construction de l'ensemble des complexes
- FICHE 3** ▶ Représentation graphique
- FICHE 4** ▶ Formule de Moivre
- FICHE 5** ▶ Nombre complexe conjugué
- FICHE 6** ▶ Applications des nombres complexes au calcul vectoriel
- FICHE 7** ▶ Résolution d'équations
- FICHE 8** ▶ Racines carrées d'un nombre complexe
- FICHE 9** ▶ Racines du trinôme du second degré
- FICHE 10** ▶ Racines n -ièmes de l'unité
- FICHE 11** ▶ Applications des nombres complexes en trigonométrie
- FICHE 12** ▶ Applications des nombres complexes en électricité
- FICHE 13** ▶ Applications des nombres complexes en modélisation des ondes mécaniques

1 RAPPELS SUR LES ENSEMBLES DE NOMBRES

Les ensembles \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} et \mathbb{R} nous sont relativement bien connus.

- L'ensemble \mathbb{N} est celui des nombres **entiers naturels** positifs ou nuls.
- L'ensemble \mathbb{Z} est celui des **entiers relatifs**, positifs, négatifs ou nuls. L'ensemble \mathbb{N} est bien sûr inclus dans \mathbb{Z} .
- L'ensemble \mathbb{Q} est celui des nombres **rationnels**, c'est-à-dire pouvant s'écrire sous la forme p/q où p et q sont des entiers relatifs avec $q \neq 0$. L'ensemble \mathbb{Z} est bien sûr inclus dans \mathbb{Q} .
- L'ensemble \mathbb{R} est encore plus vaste. Il contient tous les nombres de \mathbb{Q} , ainsi que tous ceux qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'un rationnel p/q et que l'on appelle des **nombres irrationnels**. Par exemple, $\sqrt{2}$, π et e ne sont pas des nombres rationnels.

REMARQUE

On peut écrire: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Si nous analysons quelques équations simples, il est assez facile de déterminer dans quels ensembles elles ont ou non des solutions. Le tableau ci-dessous en est l'illustration.

Ensemble	Équation	Solution	Exemple d'équation sans solution
\mathbb{N}	$x - 2 = 0$	$x = 2$	$x + 2 = 0$
\mathbb{Z}	$x + 2 = 0$	$x = -2$	$3x + 2 = 0$
\mathbb{Q}	$3x + 2 = 0$	$x = -\frac{2}{3}$	$x^2 - 2 = 0$
\mathbb{R}	$x^2 - 2 = 0$	$x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$	$x^2 + 1 = 0$

On notera qu'on peut toujours trouver des équations qui ne possèdent pas de solution dans un ensemble donné, mais qui en ont dans un ensemble plus vaste. Si on considère l'équation $x^2 + 1 = 0$ qui n'a pas de solution dans \mathbb{R} , on peut se poser la question de l'existence d'un ensemble plus vaste que \mathbb{R} dans lequel cette équation aurait une ou plusieurs solutions.

C'est la réflexion qui a présidé à la construction de l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes avec $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. C'est au xvi^e siècle que les mathématiciens italiens Jérôme Cardan, Nicolo Fontana et Ludovico Ferrari les ont introduits afin d'exprimer les solutions générales de l'équation du troisième degré et, d'une manière plus générale, afin de disposer d'un ensemble dans lequel chaque équation de degré n posséderait n solutions. Dans les textes de l'époque, de tels nombres, avant de s'appeler « complexes », s'appelaient « **imaginaires** ». Ce terme persiste encore aujourd'hui.

EXERCICE

Pour chacune des équations suivantes, indiquer le nombre de solutions appartenant respectivement à \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} et \mathbb{R} .

a) $2x^2 - x - 1 = 0$

c) $x^3 + 2x^2 - 8x = 0$

b) $x^2 + 7x - 1 = 0$

d) $x^4 - 1 = 0$

Corrigé

Recherchons dans un premier temps toutes les solutions réelles de ces équations.

a) On a $\Delta = 1 + (4 \times 2) = 9 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 3}{4}$, soit: $S = \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$.

b) On a $\Delta = 49 \pm (4 \times 1) = 53 \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{53}}{2}$, soit:

$$S = \left\{ \frac{-7 + \sqrt{53}}{2}, \frac{-7 - \sqrt{53}}{2} \right\}.$$

c) $x^3 + 2x^2 - 8x = x(x+4)(x-2)$, soit: $S = \{0, -4, 2\}$.

d) $x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x^2 = 1$, soit: $S = \{1, -1\}$.

Résumons à présent ces résultats dans un tableau indiquant le nombre de solutions appartenant aux différents ensembles.

Équation	Dans \mathbb{N}	Dans \mathbb{Z}	Dans \mathbb{Q}	Dans \mathbb{R}
$2x^2 - x - 1 = 0$	1	1	2	2
$x^2 + 7x - 1 = 0$	0	0	0	2
$x^3 + 2x^2 - 8x = 0$	2	3	3	3
$x^4 - 1 = 0$	1	2	2	2