LES MATHS FONT LEUR CINÉMA

Jérôme Cottanceau

LES MATHS FONT LEUR CINÉMA

De *Will Hunting* à *Imitation Game*

DUNOD

Direction artistique : Élisabeth Hébert
Maquette intérieure : Maud Warg
Illustrations : Rachid Maraï

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-081489-3

PROLOGUE

En décembre 2016, pour fêter les dix ans de mon blog *Choux romanesco, vache qui rit et intégrales curvilignes*, j'avais demandé à plusieurs membres de la communauté des vidéastes et podcasteurs francophones de répondre à la question : « À quoi ça sert les maths ? ». La réponse de Viviane Lalande, animatrice sur YouTube de la chaîne de vulgarisation scientifique *Scilabus*, m'a alors interpellé :

« [...] Quand j'étais petite et que je regardais des films, je voyais toujours des équations sur les tableaux quand c'était un film qui voulait être sérieux, un peu scientifique. Ça me semblait inatteignable de pouvoir les comprendre. J'avais envie d'apprendre à décoder ce nouveau langage. Maintenant que j'ai appris les maths (du moins une toute petite partie), quand je vois ces mêmes tableaux à la télé, dans les films ou n'importe où, je comprends ce qui est écrit, et les rares fois où je ne comprends pas, au moins je sais pourquoi je ne comprends pas. Je me dis que les scénaristes ont bien fait leur travail, et qu'ils sont vraiment allés voir de vrais mathématiciens pour trouver des équations qui ont un sens un petit peu plus profond. »

Cette réponse a fait écho à l'une de mes habitudes. Depuis longtemps, lorsque je regarde un film où une scène montre en arrière-plan des équations sur un tableau noir, je n'hésite jamais à le mettre en pause afin de vérifier leur authenticité. Pour peu que je regarde le film seul, cette manie n'est pas si gênante. Et quand bien même, me direz-vous, les fictions mettant des mathématiques à l'honneur ne sont pas si nombreuses. Détrompez-vous : ce sujet est très souvent traité sur petit ou grand écran ! Les mathématiques sont parfois très discrètes, lorsqu'elles figurent en fond sonore d'une scène de cours un peu ennuyeux, ou bien en arrière-plan, sur un tableau noir dans le laboratoire secret d'un scientifique ; mais elles sont bel et bien présentes. Je qualifie tous ces films et séries où intervient ma discipline préférée d'œuvres « mathématiques ».

Bien sûr, il ne faut pas se limiter à une vision binaire du cinéma : il n'y a pas de frontière franche entre les œuvres mathématiques et les autres. Elles forment en effet un continuum allant du film sans la moindre trace de chiffre à la série 100 % mathématique. Pour évaluer ce caractère, je vous propose une échelle allant de 0 jusqu'à 5.

Un film de catégorie 0 est un film ne parlant à aucun moment de mathématiques. La quasi-totalité des longs-métrages sortant chaque année au cinéma est à ranger dans cette classe.

Poussons le curseur. Les films de catégorie 1 sont ceux dont le titre donne l'espoir d'y croiser des mathématiques, alors que cela ne sera jamais le cas. Ainsi, dans le film *Pentagon Paper*, Meryl Streep et Tom Hanks ne s'intéressent jamais aux polygones à cinq côtés, contrairement à ce que le titre pourrait faire croire.

Les films et séries de catégorie 2 sont un peu plus intéressants : ils mettent en scène au moins une fois des mathématiques, sans pour autant que celles-ci en soient le sujet principal. Le dessin animé pour enfant *Peppa Pig* est de niveau 2, puisqu'une équation est visible au cours d'un épisode. Le film catastrophe *Phénomènes* (2008) de M. Night Shyamalan l'est également, car l'un des personnages est un professeur de mathématiques.

Les « véritables » films mathématiques débutent à la catégorie 3. Celles-ci y occupent une place très importante, bien que l'essentiel de l'intrigue reste ailleurs. Dans *Le monde de Nathan*, on suit l'histoire d'amitié d'un jeune garçon autiste avec une fille rencontrée en Chine, le tout sur fond d'olympiades de mathématiques. La série *Futurama,* créée par les auteurs des *Simpsons*, est également de niveau 3, car elle regorge de gags et de clins d'œil au monde de l'algèbre et de la géométrie.

Dans la catégorie supérieure, on retrouve les fictions dont le propos principal est lié aux mathématiques. Elles sont au cœur de l'intrigue quand le film retranscrit l'histoire vraie d'un mathématicien qui a marqué l'histoire, ou encore celle d'un personnage particulièrement doué avec les chiffres. Par exemple, le scénario de *L'homme qui défiait l'infini* en fait un film de niveau 4, puisqu'il tourne autour de l'importance des démonstrations dans l'activité mathématique. La série policière *Numb3rs* met en scène un mathématicien travaillant comme consultant pour le FBI ; chaque enquête est l'occasion d'utiliser les concepts des mathématiques appliquées.

Enfin, la catégorie 5 rassemble les films 100 % mathématiques, dont l'intrigue traite de mathématiques et où même les personnages sont des concepts mathématiques. À ma connaissance, une seule œuvre entre dans cette catégorie : le livre *Flatland* et ses adaptations animées. On y suit en effet les aventures d'un carré qui découvre la troisième dimension. Malheureusement, aucune de ces adaptations n'a encore été distribuée en France.

Les œuvres mathématiques n'admettent aucune frontière et couvrent tous les genres : on y trouve des drames, des comédies, des séries policières, des films d'horreur, des blockbusters, des comédies franchouillardes, des biopics, des dessins animés pour adultes comme pour enfants, des séries destinées aux adolescents, etc. Je ne chercherai pas, dans ces pages, à en dresser la liste exhaustive. Le lecteur friand d'œuvres mathématiques trouvera son bonheur sur la *Mathematical Movie Database* et la *Mathematical TV Database*, deux bases de données des mathématiques au cinéma et à la télé compilées par les mathématiciens Burkard Polster et Marty Ross, et accessibles en ligne.

Dans ce livre, nous allons nous pencher sur quatorze films de catégorie 3 et 4 qui ont été à l'affiche de nos cinémas ces dernières décennies, et que j'ai sélectionnés parmi les plus populaires. Pour chacune de ces œuvres, nous nous arrêterons sur les scènes emblématiques où les mathématiques sont en première ligne – tout comme je le fais en appuyant sur la touche pause ! – et nous prendrons le temps d'analyser leur contenu, en le croisant avec la réalité et en s'intéressant aux coulisses du tournage. Comment un scénario mathématiquement exact s'est-il transformé en un charabia incompréhensible au montage ? Pourquoi les génies des mathématiques s'épuisent-ils à écrire sur les murs et les fenêtres dans les films ? Est-ce l'acteur Russel Crowe qui trace si élégamment des formules complexes au tableau ? Ce problème présenté comme insurmontable est-il véritablement difficile pour un étudiant en mathématiques ? En creusant un peu, nous découvrirons la richesse et la diversité de cette discipline. D'un film à l'autre, nous sauterons des propriétés du nombre 1 729 aux règles de la géométrie à quatre dimensions, en passant par les machines de Turing et la théorie des jeux de John Nash. Alors n'attendez plus : attrapez un sachet de pop-corn et une calculatrice, la première séance va bientôt commencer !

1

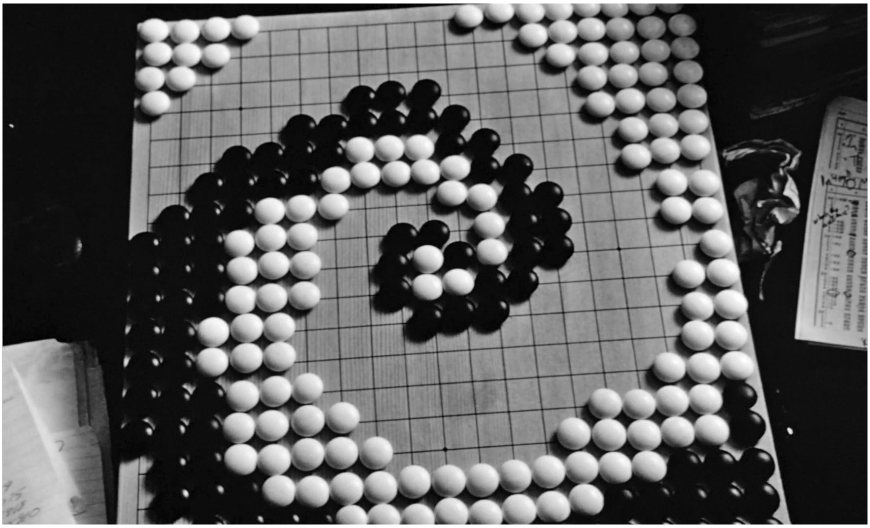
LE SENS DE LA VIE S'ÉCRIT-IL DANS LES DÉCIMALES DE Π ?

Pi de Darren Aronofsky (1998), avec Sean Gullette, Mark Margolis, Ben Shenkman…

Mathématicien spécialiste de la théorie des nombres, Max Cohen est obsédé par les fluctuations de la Bourse. Il y recherche des « séquences » qui lui permettraient de prédire son comportement. Son objectif n'est pas la spéculation, mais plutôt de prouver sa théorie: la nature, et donc la Bourse, peuvent être analysées mathématiquement. Malgré des migraines extrêmes et des troubles psychiatriques grandissants (paranoïa, hallucinations…), il progresse dans ses recherches, jusqu'à ce qu'un « bug » vienne l'arrêter. Son programme « Euclid », chargé d'analyser des séquences, affiche un nombre étrange composé de 216 chiffres qui semble être la réponse à toutes ses questions. Alors que son ancien professeur Sol Robeson lui ordonne d'arrêter ses recherches, plusieurs organisations s'intéressent de très près au travail de Max. Il est approché par Marcy Dawson, agente à Wall Street, qui lui donne accès à du matériel de haute technologie, mais aussi par Lenny Meyer, juif orthodoxe qui s'attelle à l'analyse mathématique de la Torah. Chacun semble en savoir plus que Max sur ce nombre à 216 chiffres…

Le film *Pi* (orthographié « π ») est le premier long-métrage de Darren Aronofsky (qui a par la suite réalisé *Black Swan*, *Mother !*, *The Wrestler*, *Requiem for a dream*…). Malgré un budget extrêmement limité (60 000 $, soit environ 53 000 €), obtenu en faisant la quête auprès de sa famille et de ses amis, il remportera le prix de la meilleure mise en scène au festival des films indépendants de Sundance grâce à sa réalisation jusqu'au-boutiste. Pour certains spectateurs, le film sera probablement pénible à visionner : l'image est en noir et blanc et ultra-saturée, l'ambiance sonore minimaliste est souvent gênante, les scènes représentant les migraines de Max sont particulièrement suggestives, sans compter certains passages incommodants où le héros, victime d'une hallucination, observe son propre cerveau.

Contrairement à ce que le titre laisse entendre, il est à peine question du nombre π dans le film. En fait, malgré quelques thèmes intéressants abordés, il n'y est même pas vraiment question de mathématiques, mais plutôt de numérologie ou de gématrie (l'étude mathématique de la Bible hébraïque), et donc de mysticisme et de religion. Aronofsky le reconnaît lui-même, la seule connaissance mathématique nécessaire pour apprécier le film est de savoir calculer $41 + 3$, puisqu'il s'est contenté d'introduire diverses théories mathématiques entendues de-ci, de-là. Les mathématiques de *Pi* n'ont donc pas de réelle consistance. Elles sont plutôt utilisées pour ce qu'elles évoqueront au public, comme métaphore des dégâts causés par les idées fixes de son personnage. Le thème de l'obsession est d'ailleurs un fil rouge de la filmographie de Darren Aronofsky.



La figure de la spirale revient régulièrement tout le long du film, dans une volute de fumée, un nuage de lait dans un café ou sur le goban d'un jeu de go.

Le monde est mathématique

Max : « 12 h 45. Je reformule ma théorie. Un : le langage de la nature est mathématique. Deux : tout ce qui nous entoure peut être mis en équation. Trois : toute représentation graphique d'une équation met en évidence une séquence. Donc la nature est faite de séquences.

Preuve : le cycle des maladies épidémiques, les fluctuations de la population animale, la récurrence des taches solaires, la crue et la décrue du Nil. Et que dire de la Bourse ? Un univers de chiffres qui régit l'économie mondiale. Des millions de mains à l'œuvre. Des milliards de cerveaux. Un immense cerveau grouillant de vie. Un organisme… un organisme naturel. Mon postulat : les variations boursières dépendent aussi d'une séquence. Elle est devant moi, cachée derrière les chiffres. Elle a toujours été là. »

« Le langage de la nature est mathématique. » Max paraphrase ici Galilée qui écrivait en 1623, dans *Il saggiatore*, que l'Univers est un livre écrit en langue mathématique, dont les caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques. Pour le physicien italien, la meilleure façon d'appréhender le réel passe donc par les mathématiques. Cette idée d'une nature essentiellement mathématique peut être attribuée à l'école pythagoricienne. Pour cette confrérie scientifique et religieuse fondée au VIe siècle avant notre ère, toute chose est nombre (sous-entendu, nombre entier) ou rapport de nombres ; et cela s'applique aussi bien à la physique qu'à la musique ou à la justice.

Savoir si les objets décrits par la physique (champs magnétiques, forces, atomes…) sont fondamentalement différents des objets mathématiques est une question philosophique que je préfère ne pas aborder. Toujours est-il que cette réalité se laisse assez bien approcher par des modèles mathématiques, et permet de faire des prévisions.

En général, pour modéliser un phénomène physique, on procède par étape. On commence par caractériser les éléments qui le composent, on identifie ce qui les modifie, puis on met le tout en équations avant de chercher à les résoudre. Prenons l'exemple de la marche à suivre pour étudier l'évolution d'une maladie épidémique, comme il en est question dans l'extrait. On peut utiliser l'un des modèles les plus simples de l'épidémiologie : le modèle SIR (sains, infectés, rétablis). On s'intéressera alors à la proportion d'individus d'une population touchés par une maladie. Celle-ci évolue en fonction des taux d'individus sains, malades ou rétablis, ainsi que des taux d'infection ou de guérison. Ce modèle peut se poser sous la forme d'une équation « différentielle » (voir chapitre 12, p. 191), que l'on pourra résoudre de façon approchée avec de bons algorithmes. Cette résolution permettra alors d'estimer la proportion de la population touchée par l'épidémie en fonction du temps. Cependant, ces solutions obtenues ne rendront alors compte que d'une version très simplifiée du problème initial, celui-ci demandera à être complexifié pour apporter davantage de nuances (un individu peut être malade mais non infectieux, la maladie peut être mortelle, etc.).

Pour aborder ces questions de modélisations, Max utilise une tout autre approche, bien plus contestable, puisqu'il s'agit d'une approche de numérologiste[1]. Elle consiste à intégrer un maximum de données et à y chercher des motifs ou des récurrences, appelés « séquences »[2] dans le film. Max s'applique à faire cela sur les cours d'un grand nombre d'actions de la Bourse, ce qui se traduira par le tracé d'une spirale sur un journal. Bien évidemment, le film ne cherche à aucun moment à représenter fidèlement le travail d'un mathématicien : mathématiquement, cela n'a aucun sens, il est donc très improbable que Max puisse tirer quoi que ce soit de cette spirale.

Le nombre π

Sol : « Quand je te regarde, j'ai l'impression de me voir il y a 30 ans. Mon élève le plus doué. Publié à 16 ans, un doctorat d'État à 20 ans. Mais la vie ne se nourrit pas de mathématiques. J'ai passé 40 ans à examiner π à la recherche d'une séquence. Je n'en ai pas trouvé une seule. »

Max : « Mais tu n'as pas fait ça pour rien. »

Sol : « Non, j'ai avancé. Mais pari perdu, pas de séquence. »

Max : « Pas de séquence… »

Au palmarès des nombres les plus célèbres, π a une place de choix, puisqu'il se manifeste dans de nombreuses formules impliquant la plus simple des figures géométriques, le cercle. Plus précisément, le diamètre d'un cercle et son périmètre sont proportionnels : si l'un est doublé, l'autre le sera aussi, si l'un est triplé, l'autre le sera aussi, et ainsi de suite. La constante de proportionnalité, c'est-à-dire le nombre par lequel multiplier le diamètre pour obtenir le périmètre, vaut un peu plus que 3. Au XVII[e] siècle, cette constante de proportionnalité sera baptisée « π », initiale du mot « περιφέρεια » (périmètre). Ainsi, on obtient la formule reliant la circonférence C et le diamètre d d'un cercle : $C = \pi \times d$. De même, on peut montrer que l'aire A d'un disque est proportionnelle au carré de son

Max griffonne sur la page du journal consacrée aux cours de la Bourse quelques propriétés du nombre π, comme ici la formule reliant l'aire A d'un disque, son rayon r et le nombre π.

rayon r, et que la constante de proportionnalité est à nouveau π, ce qui donne $A = \pi \times r^2$.

Cette constante π est un peu plus grande que 3 :

$$\pi \approx 3{,}14159265358979323846\ldots$$

La majorité des gens sont capables de citer les deux premières décimales, soit autant que lorsque Archimède en donnait une approximation il y a 2 200 ans. Au XVI[e] siècle, le mathématicien arabe Al-Kashi (connu des lycéens français pour son théorème généralisant le théorème de Pythagore) améliore le calcul d'Archimède et détermine ses 16 premières décimales. Depuis l'arrivée de l'informatique, le nombre de décimales de π ayant été calculées a explosé : 1 000 en 1949, 1 000 000 en 1973, 1 000 000 000 en 1989… Darren Aronofsky, cependant, semble n'en connaître que 8, puisque les décimales de π qui apparaissent à l'écran durant le générique d'introduction sont incorrectes à partir de la neuvième.

Depuis le 14 mars 2019 (cette date est le Pi-day, puisqu'il s'agit du 03/14 en notation anglaise), on connaît 31 415 milliards de décimales de la constante π, calculées par le programme informatique d'Emma Haruka Iwao, une ingénieure japonaise de Google. Avouons-le tout de même, calculer autant de décimales d'un nombre n'a aucun intérêt du point de vue mathématique, il faut plutôt voir cela comme une prouesse informatique. Cependant, ces listes de chiffres toujours plus longues ont permis de vérifier expérimentalement que les décimales de π paraissent n'obéir à aucune règle, si ce n'est celle d'être les décimales de π. Aucun motif particulier n'a pu y être décelé. Bien que parfaitement définies, elles semblent donc être tirées au hasard. Naturellement, cela laisse la porte ouverte à tous les numérologistes qui veulent y débusquer un sens caché, des motifs qui se répètent ou des « séquences », non sans y incorporer une dose de mysticisme, comme le fait Aronofsky avec son film. Ce sont ces recherches que Sol, l'ancien professeur de Max, avoue avoir dû abandonner faute de résultats.

Il faut dire que les mathématiques d'aujourd'hui gardent encore quelques conjectures ouvertes à propos des décimales de la constante π : on sait qu'il s'agit d'un nombre irrationnel et transcendant, mais on ignore s'il est univers. Détaillons.

Un nombre est dit « rationnel » s'il peut être exprimé par une fraction de deux entiers, comme 2/3 ou 73/22. La particularité de ces nombres, c'est que leur développement décimal devient périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire que les décimales finissent par se répéter. En revanche, si les décimales ne se répètent jamais, le nombre ne sera pas rationnel mais « irrationnel ». Dans la première scène du film, Jenna, la jeune voisine de Max, lui demande de calculer mentalement 73 divisé par 22. Il lui donne alors la réponse : 3,318 181 8… Puisqu'il s'agit d'un nombre rationnel, les décimales 1 et 8 se répètent indéfiniment. Le nombre π, quant à lui, est irrationnel, ce qui signifie que non seulement il possède une infinité de décimales, mais que celles-ci ne se répètent jamais. Historiquement, les premières approximations de π étaient données sous forme de fractions rationnelles. Par exemple, pour Archimède, on avait l'approximation $\pi \approx 22/7$. Un clin d'œil est fait à cette fraction, lorsque Jenna, dans la dernière scène du film, demande à Max de calculer 748 divisé par 238. Ce calcul, après simplification, est équivalent à 22/7.

Venons-en à la deuxième caractéristique connue du nombre π. Un nombre est dit « algébrique » lorsqu'il s'agit de la solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers, c'est-à-dire d'une équation n'impliquant que des opérations simples (+, –, ×, ÷, puissances entières positives) et des nombres entiers. Par exemple, une solution de l'équation $x^2 - 2 = 0$ est le nombre $\sqrt{2}$, la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1. Le nombre $\sqrt{2}$ est donc algébrique, comme l'est aussi le nombre d'or sur lequel nous allons revenir. Dans le cas contraire, on dira que le nombre est « transcendant » (aucun rapport donc avec une quelconque divinité). Puisqu'aucune équation polynomiale ne peut avoir pour résultat π, comme cela a été démontré au cours du XIXe siècle, c'est que la constante est transcendante. C'est d'ailleurs cette propriété qui rend impossible le fameux problème de la quadrature du cercle, qui demande de tracer à la règle non graduée et au compas un cercle et un carré d'aire identique.

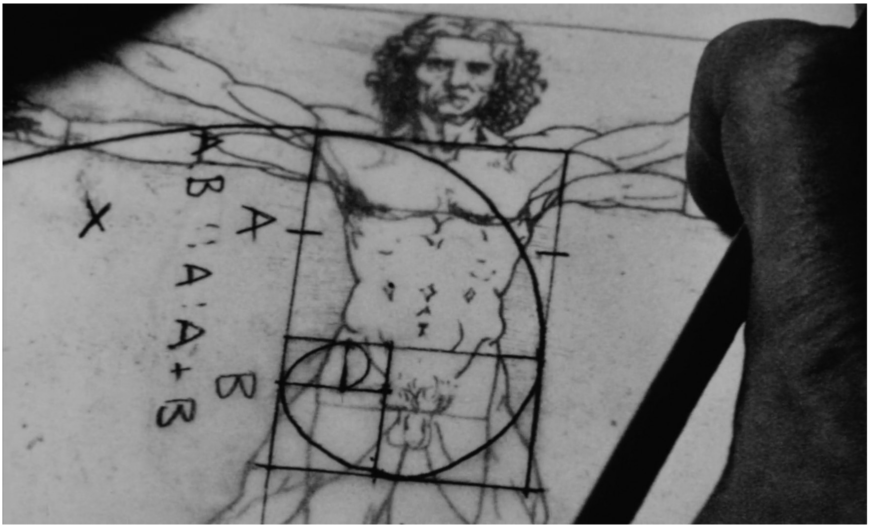
Pour finir, un nombre est dit « univers » si n'importe quelle suite finie de chiffres apparaît quelque part dans son développement décimal. Vous pourrez donc toujours trouver dans un nombre univers la suite de chiffres de votre choix, qu'il s'agisse de « 42 » ou « 1111111111111 ». Le plus simple des nombres univers est la constante de Champernowne, qui vaut C = 0,123 456 789 101 112 131 4… et que l'on fabrique en accolant tous les entiers positifs. Par construction, il est clair que l'on peut y retrouver n'importe quelle suite finie de chiffres. Bien que cela n'ait pas encore été formellement démontré, on a de bonnes raisons aujourd'hui de penser que le nombre π est lui aussi univers, au vu des milliers de milliards de décimales déjà calculées. Cela implique donc que toute suite de chiffres imaginable est encodée quelque part dans les décimales de π : votre date de naissance (la mienne se montre à partir de la 117 900 450e décimale), votre numéro de téléphone (le mien n'apparaît pas dans les 200 000 000 premières décimales), votre numéro de sécurité sociale, les chiffres de votre dernier relevé de compte, l'intégralité de ce livre (encodé en décimal), l'histoire de votre vie racontée minute par minute dans toutes les langues existant aujourd'hui sur Terre… Bien sûr, plus la séquence est longue, plus celle-ci sera difficile à retrouver au sein de π. Le fameux nombre à 216 chiffres (qui d'ailleurs en possède 218 quand on le voit à l'écran) s'affiche donc nécessairement quelque part dans les décimales de π.

Le nombre d'or

> Max : « 16 h 42. Nouvelle preuve. Pythagore. Mathématicien, chef religieux. Athènes. Environ 500 ans avant notre ère. Conviction majeure : l'Univers est composé de nombres. Contribution majeure : le nombre d'or, fidèlement représenté géométriquement par le rectangle d'or. Visuellement, il offre un équilibre harmonieux entre longueur et largeur. Quand on forme un carré, la partie restante est un autre rectangle d'or, aux mêmes proportions que le précédent, et ainsi de suite, de plus en plus petit, jusqu'à l'infini.
>
> 11 h 18. Nouvelle preuve. Léonard de Vinci. Peintre, sculpteur, savant, architecte, naturaliste. Italie. XVe siècle. Redécouvrit la perfection du rectangle d'or, et la mit en évidence dans ses chefs-d'œuvre. En traçant une courbe reliant les rectangles d'or, on obtient la légendaire spirale d'or. Pythagore se passionnait pour cette forme omniprésente dans la nature. Coquille de nautile, corne de bélier, tourbillon de tornade, empreinte digitale, notre ADN, et même la Voie lactée. »

Sa recherche de séquences dans les décimales de π ayant échoué, Max se tourne vers celles de φ, le nombre d'or, à qui l'on prête parfois une dimension mystique. La célébrité de φ dépasse très largement son utilité en mathématiques, où il a bien sûr quelques propriétés intéressantes, mais n'est pas aussi omniprésent que π. Détaillons un peu de quoi il s'agit.

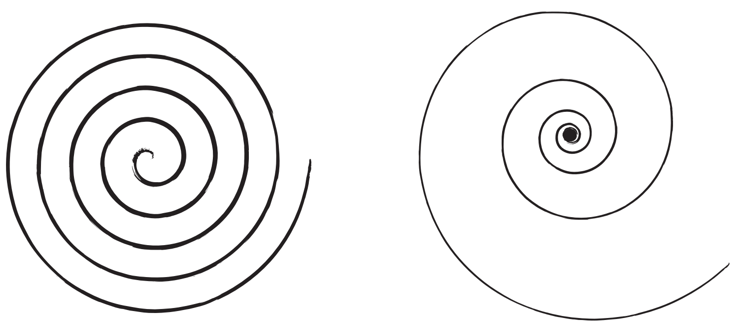
Le nombre d'or, c'est le nombre $(1 + \sqrt{5})/2$, qui vaut environ 1,618 03, mais c'est plutôt à son aspect géométrique que l'on s'intéresse généralement, et ce depuis l'Antiquité. À l'instar du nombre $\sqrt{2}$, qui correspond à la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, le nombre d'or est la longueur des diagonales d'un pentagone régulier (polygone à 5 côtés dont tous les angles et tous les côtés sont égaux) de côté 1. La construction de ces pentagones réguliers étant connu des pythagoriciens, on pourrait leur attribuer les origines de φ. Cependant, c'est plutôt sous la plume d'Euclide, au IIIe siècle avant notre ère, que l'on trouve les premières traces explicites du nombre d'or.[3]



Max trace sur un papier-calque un rectangle d'or et une spirale d'or, qu'il repose sur l'*Homme de Vitruve* de Léonard de Vinci. On peut voir l'équation A:B::A:A+B, qui définit (de façon erronée) le format du rectangle d'or.

Revenons au film. Durant la scène évoquée plus haut, Max trace et décrit un rectangle d'or, un rectangle dont le format, c'est-à-dire le rapport entre sa longueur et sa largeur, est égal au nombre d'or. Le cadre du film s'approche d'ailleurs d'un rectangle d'or, format rarement utilisé au cinéma. Un tel rectangle possède une propriété intéressante : lorsqu'on lui prélève un carré dont le côté est la largeur, le rectangle restant conserve le même format que le rectangle initial. Dans le film, Max griffonne un rectangle d'or, dont la largeur est notée A, et la longueur est A+B. Lorsque le carré de côté A est ôté, il reste un rectangle de côtés A et B. Puisque ces deux rectangles doivent avoir le même format, cela implique que A/B (le format du rectangle restant), est égal à (A+B)/A, celui du grand rectangle. Cette égalité peut aussi se noter A:B::A+B:A, la formule qui apparaît à l'écran est donc incorrecte (les éléments ne sont pas dans le bon ordre).

Puisque le rectangle obtenu après avoir retiré un carré du rectangle d'or a toujours les mêmes proportions, on peut poursuivre la construction. On obtient alors des rectangles de plus en plus petits, dont le format reste le même et qui, lorsque l'on relie les sommets opposés, forment une spirale : la « spirale d'or ». De nombreuses courbes, en mathématiques, portent le nom de « spirales » : c'est le cas par exemple des spirales d'Archimède, obtenues en repliant une corde le long d'elle-même, ou des spirales dites « logarithmiques », qui s'enroulent à l'infini autour de leur centre.



À gauche, une spirale d'Archimède. À droite, une spirale logarithmique

La spirale d'or entre dans cette dernière catégorie. Les formes respectives de la Voie lactée, des tornades ou des coquilles d'escargot sont bien des spirales logarithmiques, mais pour qu'elles soient « d'or », il est nécessaire qu'elles grandissent d'un facteur φ pour chaque quart de tour. C'est bien le cas, de façon approximative, pour certaines coquilles de mollusques, mais contrairement aux idées reçues, ce n'est pas du tout le cas des bras de notre Galaxie.

L'histoire du nombre d'or est elle aussi malmenée dans le film. Contrairement à ce qu'explique Max, les Grecs de l'Antiquité ne s'intéressaient pas aux spirales logarithmiques, mais plutôt à celles d'Archimède. Il faut attendre le XVII[e] siècle pour trouver des études de ces spirales qui s'enroulent sur elles-mêmes à l'infini.

À la Renaissance, c'est chez le moine franciscain Luca Pacioli (env. 1445–1517) que la dimension mystique du nombre d'or apparaît véritablement, dans le livre *De divina proportione*. Il reprend le problème étudié par Euclide, celui du « partage en extrême et moyenne raison », qui consiste à découper un segment en respectant certaines proportions. Pour lui, ce partage ne peut être que l'œuvre de Dieu, et ne peut être qualifié autrement que par le terme « divin ». Pour accompagner ses textes, Pacioli fait appel à un illustrateur plutôt reconnu : Leonard de Vinci. Cependant, l'*Homme de Vitruve* que l'on voit sur la figure p. 15 n'est pas une illustration de ce livre, et n'a en réalité aucun lien avec φ. De Vinci s'appuie pour l'œuvre citée sur le travail de l'architecte de l'Antiquité Vitruve, pour qui les proportions parfaites de l'humain ne sont pas fondées sur la proportion divine φ, mais plutôt sur un découpage en quarts et huitièmes. Les critères de beauté de l'époque sont donc des rapports rationnels. Dans le film, Max superpose une spirale d'or avec l'*Homme de Vitruve*. Ce que l'on peut alors voir, c'est que les deux figures ne coïncident pas du tout, contredisant l'hypothèse de la « perfection du nombre d'or ».

Au fil du temps, l'intérêt porté au nombre d'or décroît. Mais au XIX[e] siècle, Adolf Zeising (1810–1876), professeur de philosophie à Leipzig et Munich, le redécouvre et fonde une théorie de l'esthétisme centrée sur φ, qu'il applique à la morphologie, l'architecture, la peinture… Sa théorie se résume plus ou moins à la phrase suivante : « si tu ne trouves pas le nombre d'or dans [telle œuvre], c'est que tu as mal cherché ». C'est ainsi que l'on retrouve, après ajustement, le nombre d'or dans les plans du Parthénon ou dans l'œuvre de Mozart. Dès qu'une peinture, une sculpture ou un bâtiment présente un minimum de complexité, la présence d'une proportion fixée à l'avance (qu'il s'agisse du nombre d'or ou d'une autre) est presque certaine. Bref : quand on cherche, on trouve !

Quant à savoir si le nombre d'or est effectivement harmonieux, aucune réponse ne fait vraiment consensus. La première étude emblématique de la question date de 1874, par le psychologue allemand Gustav Fechner (1801–1887). Il présente à ses sujets dix rectangles de différents formats f, allant du carré jusqu'à un rectangle 2,5 fois plus long que large. Ceux-ci sont blancs, posés sur un tableau noir, et rangés dans l'ordre de leur format. Fechner demande individuellement aux sujets de choisir le rectangle qu'ils préfèrent, et celui qu'ils aiment le moins. Sur ses 347 réponses, 35 % ont préféré le nombre d'or (f = 1,618), 20,6 % le format f = 1,5, et 20 % le format f = 16/9. Au contraire, personne n'a choisi le rectangle d'or comme rectangle le moins aimé, et seulement 1,4 % ont choisi un des deux rectangles adjacents. Depuis Fechner, de nombreux psychologues ont étudié la question en variant les protocoles expérimentaux (en demandant aux sondés de tracer naturellement un rectangle, par exemple). En 1995, le psychologue canadien Christopher Green (né en 1959) a compilé une quarantaine d'études, de 1874 jusqu'à 1992. Les différents résultats sont loin d'être unanimes. Bien qu'ils tournent pour la plupart autour du format f = 1,6, la préférence n'est jamais très marquée, et jamais précisément sur le rapport d'or.

D'un point de vue arithmétique, on peut affirmer que φ est un nombre irrationnel, mais qu'il n'est cependant pas transcendant, ce que l'on peut trouver étonnant pour un nombre qualifié de « divin ». En effet, le nombre d'or est un nombre algébrique, puisqu'il est une solution[4] de l'équation $x^2 = x + 1$. Tout comme π, on soupçonne fortement φ d'être un nombre univers, mais aucune démonstration ne permet aujourd'hui de l'affirmer.

Gematria et suite de Fibonacci

> Lenny : « D'ailleurs, l'hébreu, c'est des maths. Regarde. Y a que des nombres. Tu le savais pas ? Tiens, regarde. Les anciens l'utilisaient comme système numérique. Chaque lettre est un chiffre. Par exemple, le A hébreu, aleph (א), c'est le 1 ; B, beth (ב), c'est le 2. Et ainsi de suite. Mais le plus étonnant, c'est qu'il y a une corrélation

entre les chiffres. Exemple, le mot "père", en hébreu, *Ab* (אב), c'est aleph plus beth, 1 + 2 = 3. D'accord ? Le mot "mère" en hébreu, *Haim* (אם), aleph [et] mem. 1 + 40 = 41. 3 + 41 = 44. D'accord ? Maintenant, le mot "enfant", en hébreu *Yelev* (דלי), c'est 10, 30 et 4… 44 !… Toute la Torah n'est qu'une suite de chiffres. C'est peut-être un code que Dieu nous aurait envoyé. »

Max : « Ça a l'air intéressant. »

Lenny : « Ouais. Et ça, c'est gentil, mais il y a plus complexe. L'hébreu pour le jardin d'Eden, *Kadem* (םדק), équivalent numérique 144, la valeur de l'Arbre du savoir qui se trouve dans le jardin, *Aat Ha Haim*, 233… 144, 233. Maintenant, si tu prends ces deux nombres… »

Max : « … c'est les nombres de Fibonacci. »

Lenny : « Pardon ? »

Max : « C'est la séquence de Fibonacci. »

Lenny : « Fibonacci ? »

Max : « Fibonacci était un mathématicien italien du XIIIe siècle. Quand tu divises 144 par 233, le résultat approche de thêta (θ). »

Lenny : « Thêta ? »

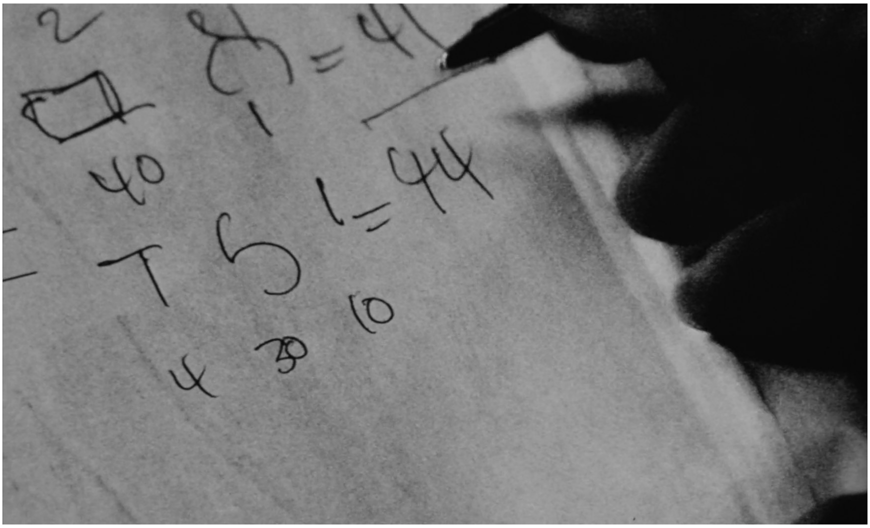
Max : « Oui. Thêta. Le symbole grec. Le nombre d'or. La spirale d'or. »

Lenny : « Waw. Je n'avais jamais fait le rapprochement. C'est comme ces motifs qu'on trouve dans la nature. Comme la fleur de tournesol. »

Max : « Ainsi que dans toutes les spirales. »

Lenny : « Comme quoi, tout est mathématique. »

La gematria (ou « gématrie ») est la numérologie hébraïque, qui consiste en l'analyse numérique de la Torah. Sur ce sujet, Aronofsky a fait appel à plusieurs consultants (alors qu'il n'y en a aucun pour les parties mathématiques du film). La coïncidence numérique qu'il présente, père + mère = enfant, est donc tout à fait valide. Pour les pratiquants de



En associant à chaque lettre une valeur numérique, Lenny démontre à Max que père + mère = enfant.

cette numérologie, chacune des 22 lettres de l'alphabet hébreu est en effet associée à un nombre, et l'on peut additionner les valeurs des lettres d'un mot pour donner une valeur au mot.

On ne peut cependant pas tirer de conclusions de telles coïncidences numériques. Dans un texte énorme comme la Torah, il est impensable que de telles correspondances n'existent pas. Pour le prouver, l'informaticien Brendan McKay (né en 1951) a montré en 1997 que n'importe quel livre suffisamment grand peut contenir des messages cachés. Il a ainsi retrouvé dans *Moby Dick* la prédiction de l'accident de Lady Di, de l'exécution de Trotsky ou des assassinats de Gandhi, Martin Luther King, Kennedy et Lincoln.

Dans le film, Lenny poursuit, en mettant en avant 144 et 233, deux nombres qui apparaissent dans la suite de Fibonacci. Cette suite de nombres est la suivante :

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, etc.

Pour la construire, on débute avec 1 et 1, puis chaque nouveau terme se calcule en ajoutant les deux précédents[5]. Ces nombres étaient déjà connus durant l'Antiquité, notamment en Inde où ils apparaissaient dans des questions liées à la versification des poèmes sanscrits. La suite tient son nom du mathématicien italien Leonardo Fibonacci (env. 1175–1250). Dans une énigme liée à la reproduction des lapins que ce dernier a résolue, la solution implique cette suite de nombres :

Un cuniculteur élève un couple de lapereaux. Il s'aperçoit qu'un couple devient adulte après trois mois, et qu'une fois adulte, un couple de lapin met tous les mois au monde un nouveau couple de bébés lapins. Sachant qu'un lapin ne meurt jamais, combien y aura-t-il de couples après un an ?

Cette suite possède un lien avec le nombre d'or φ (la notation « θ » évoquée par Max existe bien, mais demeure extrêmement rare) : lorsque l'on divise un terme de la suite par le terme précédent, on obtient en effet des approximations de plus en plus précises du nombre d'or[6]. Ainsi, 89/55 donne une valeur approchée de φ au dix-millième, tandis que 233/144 la donne au cent-millième. On peut même démontrer que la suite de Fibonacci produit la « meilleure » façon d'approcher le nombre d'or par une suite de fractions.

Grâce à ce lien avec φ, la suite de Fibonacci hérite du mysticisme que l'on prête au nombre d'or. L'obsession pour ces concepts mathématiques se retrouve dans bien d'autres œuvres que le film cité. Côté cinéma, on peut évoquer le *Da Vinci Code*, roman de Dan Brown adapté au cinéma en 2006 par Ron Howard, ou bien *Nymphomaniac* (2013), de Lars Von Trier, où la suite de Fibonacci revient régulièrement. À la télévision, la série *Esprits criminels* (épisode 8 de la saison 4), par exemple, met en scène un tueur qui a planifié des meurtres selon une spirale d'or et la suite de Fibonacci. Les suites logiques, et plus particulièrement celle de Fibonacci, sont aussi au cœur du prochain film qui va nous intéresser : *Crimes à Oxford*.