

Table des matières

Préface	xlii
Auteurs et rédacteurs	xv
Leçon 1. Jean-Pierre Kahane. Le théorème de Pythagore, l'analyse multifractale et le mouvement brownien	1
Pythagore et son théorème	1
La courbe de Pólya, et l'analyse multifractale	5
Un autre aspect de la courbe de Pólya	11
Le mouvement brownien	13
Discussion	18
Bibliographie	25
Leçon 2. Pierre Cartier. L'intégrale de chemins de Feynman : d'une vue intuitive à un cadre rigoureux	27
Première partie : les intégrales de Daniell et de Wiener	27
L'intégrale de Daniell	27
Les chaînes de Markov	31
L'intégrale de Wiener	33
La notation de Feynman	37
Seconde partie : l'intégrale de Feynman	40
L'équation de la chaleur et l'intégrale de Wiener	41
La formule de Feynman-Kac	42
La mesure et l'intégrand, ou le mathématicien et le mécanicien	46
L'intégrale de chemins de Feynman	47
Un cadre axiomatique	52
Discussion	56
Bibliographie	57
Leçon 3. Vladimir I. Arnold. Nombres d'Euler, de Bernoulli et de Springer pour les groupes de Coxeter et les espaces de morsification : le calcul des serpents	59
Première partie : la suite classique d'Euler-Bernoulli	59
Le triangle d'Euler-Bernoulli	59

Le calcul des serpents	62
Morsification	66
Seconde partie : les nombres d'Euler-Bernoulli des groupes de Coxeter	74
Les groupes de Coxeter	74
Les nombres de Springer	77
Comment mettre les serpents dans les chambres	82
Le cas des autres groupes de Coxeter	87
Discussion	93
Bibliographie	95
Leçon 4. Don Zagier. Quelques conséquences surprenantes de la cohomologie de $SL_2(\mathbb{Z})$	97
Premier exemple : valeurs de $\zeta(2n)$	98
Deuxième exemple : fonction cotangente	100
Troisième exemple : fonctions θ	101
Le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ et sa cohomologie	102
Les « relations de périodes »	104
Formes modulaires	106
Périodes des formes modulaires	108
La fonction $C_7(X, Y; T)$ et les périodes	111
Fonctions zêta doubles	113
Les périodes des formes modulaires de Maass	117
Autres applications	118
Bibliographie	120
Leçon 5. Haïm Brézis. Tourbillons de Ginzburg-Landau, énergie renormalisée et effets de quantification	123
Un problème impossible	123
L'énergie de Ginzburg-Landau et la question de Matano	127
Un analogue tridimensionnel	129
Retour à la dimension 2 : conversation avec un physicien	132
Solution du « problème impossible »	134
Première méthode de renormalisation	134
Autres méthodes de renormalisation : comment elles s'éclairent mutuellement	136
Un phénomène de quantification	138
Discussion	139
Bibliographie	140

Leçon 6. Bernard Malgrange. Monodromie, phase stationnaire et polynôme de Bernstein-Sato	143
Introduction	143
Le polynôme de Bernstein-Sato	143
Monodromie	149
Premier ingrédient : homologie singulière	150
Deuxième ingrédient : la construction de Milnor	154
La définition de la monodromie. Le théorème de monodromie	156
« Idée » de la démonstration. Connexion de Gauss-Manin	160
Questions	165
Bibliographie	166
Leçon 7. John Coates. Courbes elliptiques	169
Les nombres congruents	169
Courbes elliptiques	172
Quelques séries formelles	175
Cohomologie de la courbe elliptique E_D	176
Arithmétique des courbes elliptiques	179
Le carré symétrique d'une courbe elliptique	181
Les fonctions L	185
Bibliographie	188
Leçon 8. Yves Meyer. Approximation par ondelettes et approximation non-linéaire	191
Motivation	191
Compression/restauration	191
Débruitage	192
Exemple historique en dimension 1	193
Le point de vue de Peller	195
Signification du théorème de Peller	196
Définition des espaces de Besov. Analyse de Littlewood-Paley	196
Le contexte de la dimension 2	200
La généralisation du théorème de Peller par DeVore	203
Un problème d'actualité : la schématisation d'une image par un petit nombre de contours (Mumford-Shah, Blake,...)	209
Le théorème de Peller en dimension n	211
Les cadres L^2 et L^p	212
Théorème de Yuri Netrusov pour l'algèbre des bosses	214

Définition de l'espace BMO (Bounded mean oscillation)	214
Définition de l'algèbre des bosses	214
Le débruitage optimal de David Donoho	216
Discussion	217
Appendice	218
Bibliographie	219
Leçon 9. Henry Helson. Et les séries de Fourier devinrent Analyse harmonique	221
De Fréchet à Hartman.	221
De Beurling à Kahane.	224
Angle entre le passé et le futur	231
Bibliographie	233
Leçon 10. Yves Colin de Verdière. Réseaux électriques planaires	235
Introduction	235
Première partie. Réseaux électriques généraux	236
Notations et définitions	236
Réponse du réseau électrique	238
Propriétés spéciales de la matrice L	239
Deuxième partie. Réseaux planaires	242
Les réseaux planaires et leurs réponses	242
Le problème inverse, le problème de l'équivalence	246
Transformations électriques élémentaires	247
Troisième partie. Grandes lignes de la preuve du théorème 2	251
La stratégie	251
Le graphe médial	255
Preuve de l'existence de chemins entre un graphe et un graphe minimal	258
Preuve que la réponse impose la classe d'équivalence combinatoire	264
Graphes médiaux électriques	268
L'injectivité de Φ_{Γ_1}	270
Discussion	272
Bibliographie	274
Leçon 11. Frédéric Pham. Caustiques : aspects géométriques et ondulatoires	275
Introduction	275
Premier exemple	275

Deuxième exemple	277
Première partie : aspect géométrique	277
Troisième exemple	278
Quatrième exemple	279
Enveloppes et généricité	280
Caustiques et catastrophes	285
Seconde partie : aspect ondulatoire	287
Le principe de Huygens-Fresnel	287
La géométrie et l'onde exacte	292
Résurgence	296
Discussion	298
Bibliographie	301

Leçon 12. Pierre-Louis Lions. Problèmes mathématiques de la mécanique des fluides compressibles	305
Introduction, modèles, historique	305
Introduction	305
Modèles	305
Historique	309
Remarques	310
Euler	312
De Leonhard Euler à Peter Lax	312
Résultats pour $N = 1$	316
Compacité par compensation	317
Formulation cinétique	319
Et les dimensions 2, 3, ... ? Spéculations	320
Équations de Navier-Stokes	322
Généralités	322
Perte de régularité	323
Existence globale	324
Compacité	324
Résumé et conclusion	328
Questions	329
Bibliographie	329