

Table des matières

Préface	vii
Auteurs et rédacteurs	xv
Leçon 1. Michèle Audin. Systèmes hamiltoniens intégrables	1
Introduction : l'exemple de la toupie	1
Rotation, précession, nutation	1
Les équations d'Euler-Poisson (équations du mouve- ment du solide)	4
Une courbe elliptique	6
Systèmes hamiltoniens, intégrabilité	9
Définition d'un système hamiltonien	9
Définition d'un système hamiltonien intégrable	11
Exemples	12
Le théorème de Liouville	14
Énoncé géométrique	14
Version algébrique du théorème de Liouville	16
Comment montrer qu'un système hamiltonien est ou n'est pas intégrable ?	19
Motivation : Euler, Lagrange, Kowalevski, le solide et l'at- titude d'un satellite	20
La théorie de Galois et le théorème de Morales-Ramis	22
Application : non-intégrabilité de l'attitude d'un satellite	26
Questions	31
Bibliographie	31
Leçon 2. Alain Guichardet. La méthode des orbites : historique, principes, résultats	33
Introduction	33
Petite chronologie	38
Quelques généralités	41
Orbites coadjointes et représentations $T_f(\tau)$	41
Caractères des représentations $T_f(\tau)$	42

La formule de Plancherel	44
Cas des groupes nilpotents	45
Cas des groupes résolubles	46
Cas des groupes semi-simples compacts	47
Cas des groupes semi-simples non compacts	49
Exemples	49
Exemple 1 : groupe de Heisenberg (nilpotent, simple- ment connexe)	50
Exemple 2 : groupe euclidien du plan (résoluble)	51
Exemple 3 : groupe $SU(2)$ (simple, compact, simplement connexe)	53
Exemple 4 : groupe $G = SL(2, \mathbb{R})$	54
Bibliographie	57

Leçon 3. Philippe Biane. Matrices aléatoires : propriétés spectrales et convolution libre **61**

Introduction : spectre probable d'une somme de grandes matrices hermitiennes	61
Des algèbres de von Neumann au produit libre	65
Algèbres de von Neumann et facteurs	65
Algèbre de von Neumann d'un groupe dénombrable	67
Algèbre de von Neumann d'un produit libre de groupes	68
Probabilités libres	71
Trace et espérance	71
Familles d'algèbres libres	72
Convolution libre et transformée de Fourier libre	73
Théorème limite central libre	75
Liberté asymptotique des matrices aléatoires.	77
La combinatoire de la liberté	79
Questions	81
Bibliographie	82

Leçon 4. André Galligo. Factorisation absolue de polynômes à plusieurs variables **85**

Introduction	85
Stratégie pour une factorisation	86
Se ramener de plusieurs variables à 1 ou 2 variables	89
Factorisation absolue des polynômes à 2 variables	91
Bibliographie	102

Leçon 5. Ilia Itenberg. Géométrie tropicale et dénombrement de courbes	107
Introduction	107
Amibes de variétés algébriques	107
Amibes complexes	107
Amibes non archimédiennes	111
Convergence d'amibes complexes vers des amibes non archi- médiennes	115
Variétés tropicales	116
Le monde tropical	116
Dualité et pondération	117
Éléments de géométrie tropicale	119
Applications à la géométrie énumérative	121
Géométrie énumérative complexe	121
Géométrie énumérative réelle	122
Bibliographie	124
Leçon 6. Jean-Éric Pin. Automates réversibles :	
 combinatoire, algèbre et topologie	127
Les automates	128
Mots, langages et automates	128
Automates déterministes	129
Langages rationnels	131
L'approche algébrique	132
Automates déterministes et monoïdes de transition	132
Reconnaissance par morphisme	134
Monoïde syntactique	136
Automates réversibles	138
Définition et exemples	138
Une première description des langages réversibles	140
Une première condition nécessaire	143
Le groupe libre	143
Définition	143
Automates réversibles dans le groupe libre	144
Sous-groupes rationnels du groupe libre	145
Parties réversibles du groupe libre	148
Retour au monoïde libre	149
Topologie pro-groupe	150

Un lemme d'itération	154
Caractérisation algébrique	155
Synthèse des résultats	159
Pour aller plus loin.	161
Sur la topologie du groupe libre	161
Problèmes ouverts	162
Bibliographie	165
Leçon 7. Bruno Courcelle. Structuration des graphes et logique	167
Extension aux graphes de la théorie des langages formels	167
Grammaires	168
Automates	170
Transductions	171
Composition de graphes, largeur arborescente	172
Grammaires de graphes	177
Algorithmes polynomiaux pour des problèmes NP-complets	179
Algorithmes polynomiaux; problèmes NP et NP-complets	179
Problèmes restreints à des graphes de largeur arbores-	
cente bornée; exemple du 3-coloriage	181
Logique du second ordre monadique	183
Configurations interdites et théorie des mineurs de graphes .	189
Décidabilité de la logique du second ordre monadique	192
Conclusion	193
Bibliographie	193
Leçon 8. David Ruelle. La théorie ergodique des systèmes dyna-	
miques d'Anosov	195
Systèmes de spins sur un réseau	196
Premières définitions	196
Notions ergodiques	199
Mesure d'équilibre et mesure de Gibbs	201
Théorème DLR	203
Réseau à une dimension	204
Commentaires et références	207
Dynamique hyperbolique	208
Ensemble hyperbolique, variétés stable et instable	208
Difféomorphismes d'Anosov et axiome A	210
Commentaires et références	213
Dynamique symbolique	213

Structure produit locale	213
Partition de Markov	215
Représentation symbolique	217
Mesure de Gibbs et mesure SRB	220
Commentaires et références	221
Opérateurs de transfert	222
Outils pour le formalisme thermodynamique	222
Références	224
Questions	224
Bibliographie	225

Leçon 9. François Laudenbach. De la transversalité de Thom au h -principe de Gromov

	227
La transversalité de Sard à Thom	227
La transversalité sous contrainte $\mathcal{F} \subset C^\infty(M, N)$	234
Le h -principe de Gromov	241
Le théorème d'approximation d'Eliashberg-Mishachev	247
Le retournement de la sphère	251
Bibliographie	257

Leçon 10. Patrick Dehornoy. Le problème d'isotopie des tresses

<i>Une</i> solution au problème d'isotopie des tresses	259
Le problème	260
À quoi bon résoudre ce problème ?	262
Une première remarque	264
Des invariants naïfs	264
Première étape : introduire une structure de groupe	267
Deuxième étape : trouver une présentation	269
Troisième étape : passer au monoïde	272
Quatrième étape : introduire la tresse Δ_n	273
Cinquième étape : utiliser le théorème de Ore	275
<i>Des</i> solutions au problème d'isotopie des tresses	277
La représentation d'Artin	277
Les représentations linéaires	280
La forme normale gloutonne	283
Le retournement de sous-mot	286
La réduction des poignées	289
Les coordonnées de Dynnikov	291
La forme normale de Fromentin	296

La forme normale de Bressaud	298
Conclusion	299
Bibliographie	299
Leçon 11. Cédric Villani. Transport optimal	301
Les débuts du transport optimal	301
Monge	301
Kantorovich	304
La redécouverte des années 1980	307
Brenier	308
Cullen	312
Mather	314
Un théorème typique de la théorie	316
Le transport optimal pour démontrer des inégalités	318
Une inégalité isopérimétrique	318
D'autres inégalités	320
Le transport optimal et la courbure de Ricci	321
Philosophie	321
Pourquoi Ricci ?	322
L'approche par la formule de Bochner	325
L'approche par le transport optimal	326
Pourquoi faire cela ?	329
Quoi de neuf depuis la leçon ?	337
Bibliographie	338
Leçon 12. Étienne Ghys. Géodésiques sur les surfaces à courbure négative	339
Hadamard et Poincaré : la découverte du chaos	339
Morse et Thue : la combinatoire des mots infinis	345
Anosov et la stabilité structurelle	348
Gromov et les groupes hyperboliques	350
Les réseaux dans le plan et le flot modulaire	351
Lorenz et son papillon	358
Nœuds de Lorenz et nœuds modulaires	361
Bibliographie	365