

# Table des matières

Préambule	vii
Notations	ix
<b>1 Notions de probabilités</b>	<b>1</b>
1.1 Lois de probabilités	1
1.1.1 Fréquence et probabilité	1
1.1.2 Exemples élémentaires de lois de probabilités	2
1.1.3 Lois de probabilités sur $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}^n$	2
1.2 Variables aléatoires	4
1.2.1 Exemples de calcul de lois de variables aléatoires	4
1.2.2 Probabilités conditionnelles	5
1.2.3 Indépendance de variables aléatoires	6
1.3 Loi binomiale. Marches aléatoires	7
1.3.1 Loi binomiale	7
1.3.2 Approximation normale de la loi binomiale	7
1.4 Valeurs moyennes	8
1.4.1 Valeur moyenne	9
1.4.2 Écart quadratique moyen	10
1.4.3 Variable centrée réduite	10
1.4.4 Inégalité de Bienaymé Tchebycheff	10
1.4.5 Fonction erreur	11
1.4.6 Coefficient de corrélation.	12
1.5 Sommes de variables aléatoires indépendantes	12
1.5.1 Formule du produit	12
1.5.2 Variance d'une somme de v.a. indépendantes	12
1.5.3 Loi des grands nombres	13
1.6 Vérification expérimentale d'une loi de probabilité	14
1.7 Exercices	15

<b>2</b>	<b>« Fonction » <math>\delta</math> - Distributions</b>	<b>17</b>
2.1	Distribution de Dirac ou « fonction » $\delta$	17
2.1.1	Fonction $\delta$	17
2.1.2	Propriétés de $\delta(x)$	18
2.1.3	Exemples de fonctions tendant vers $\delta$	18
2.2	Distributions	19
2.2.1	L'espace de base $\mathcal{S}$ de Schwartz	20
2.2.2	Fonctionnelles linéaires	20
2.2.3	Exemples	20
2.2.4	Dérivation d'une distribution	21
2.2.5	Produit de convolution	23
2.3	Exercices	23
<b>3</b>	<b>Transformation de Fourier</b>	<b>25</b>
3.1	Définition	25
3.1.1	L'intégrale de Fourier	25
3.1.2	Transformée de Fourier d'une gaussienne	26
3.2	Inversion de la transformation de Fourier	26
3.2.1	Transformation inverse	26
3.2.2	Isométrie : théorème de Parseval-Plancherel	27
3.2.3	Dérivation	28
3.2.4	Relations d'incertitude	29
3.2.5	Fonctions de $r$ , distance à l'origine	31
3.3	Transformée de Fourier d'une distribution	32
3.3.1	Définition	32
3.3.2	Transformée de Fourier d'un produit de convolution	33
3.3.3	Dérivée d'un produit de convolution. Équation de Poisson	34
3.3.4	Table succincte de transformées de Fourier	35
3.4	Exercices	35
<b>4</b>	<b>Espace de Hilbert</b>	<b>39</b>
4.1	L'espace de Hilbert	39
4.1.1	Espace hermitien de dimension 2	40
4.1.2	Fonctions de carré sommable	40
4.2	Formalisme de Dirac, vecteurs et opérateurs	43
4.2.1	Vecteurs, « Kets »	43
4.2.2	Espace dual, « Bras »	44
4.2.3	Base hilbertienne	44
4.3	Opérateurs	45
4.3.1	Éléments de matrice	45
4.3.2	Adjoint d'un opérateur	45
4.3.3	Opérateur hermitien ou autoadjoint	46
4.3.4	Règles de syntaxe	46

4.3.5	Projecteurs ; décomposition de l'identité	46
4.3.6	Propriétés algébriques	47
4.3.7	Opérateurs unitaires ; transformations unitaires	48
4.4	Vecteurs propres et valeurs propres, spectre	49
4.4.1	Vecteurs propres et valeurs propres d'une observable	49
4.4.2	Résultats de la mesure de la grandeur $A$	50
4.4.3	Probabilités	51
4.4.4	Théorème spectral (version simplifiée)	52
4.5	Opérateurs en dimension infinie	52
4.5.1	Domaine d'un opérateur	53
4.5.2	Opérateurs bornés	53
4.5.3	Opérateurs non-bornés	55
4.5.4	Bases continues ; Distributions propres	55
4.5.5	Spectre d'un opérateur autoadjoint	58
4.5.6	Théorème spectral de Frédéric Riesz	60
4.5.7	Curiosités et pathologies	60
4.6	Représentations matricielles	61
4.6.1	Représentation sur une base discrète	61
4.6.2	Exemple : fonctions orthogonales	62
4.6.3	Représentation sur une base continue	63
4.7	Ensemble complet d'observables qui commutent	64
4.8	Structure de l'espace de Hilbert	66
4.8.1	Produits tensoriels d'espaces	66
4.8.2	L'espace de Hilbert d'un système	67
4.8.3	Propriétés du produit tensoriel	67
4.8.4	Opérateurs dans l'espace produit tensoriel	67
4.8.5	Exemples simples	68
<b>5</b>	<b>Fonctions spéciales ; harmoniques sphériques</b>	<b>71</b>
5.1	Fonctions d'Hermite	71
5.1.1	Polynômes d'Hermite	71
5.1.2	Fonctions propres de l'oscillateur harmonique	72
5.2	Harmoniques sphériques	72
5.2.1	Coordonnées sphériques	72
5.2.2	Fonctions propres de $\hat{L}^2$ et $\hat{L}_z$ ; Harmoniques sphériques	74
5.3	Polynômes de Laguerre ; atome d'hydrogène	76
5.3.1	Polynômes de Laguerre	76
5.3.2	Fonctions propres des atomes hydrogénoïdes	77