

LES MATHÉMATIQUES

AUX CONCOURS

X-Mines-Centrale

MP/MP* MPI/MPI*

En 300 énoncés d'oraux
et 100 thèmes classiques pour les écrits et les oraux



Florent Nicaise
Philippe Lauron

$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall u \in \mathbb{R}, |f(u)| \leq M e^{k|x|}$

$$\int_{a-x}^x f = 2 \left(\int_0^x f - \int_0^{a-x} f \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$n = |G| = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

$$B_m = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^m \frac{a^k}{k!} & \sum_{k=0}^m \frac{b^k}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^m \frac{c^k}{k!} \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} e^a & \frac{e^a - e^c}{a-c} b \\ 0 & e^c \end{pmatrix} \quad \text{si } a \neq c$$

$$\begin{pmatrix} e^a & \frac{e^a - e^c}{a-c} b \\ 0 & e^c \end{pmatrix} \quad \text{si } a = c$$

$$E_{i,j} E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$$

$$\left| \sum_{0 \leq i, j \leq n} \frac{a_i a_j}{i+j+1} \right| \leq \pi \sum_{k=0}^n a_k^2$$

$$\sigma = (v_1, v_2, \dots, v_k) \circ (w_1, w_2, \dots, w_k)$$

$$0 \leq x f(x) = 2 \int_0^x f(x) \leq 2 \int_0^x f = 2 \left(\int_0^x f - \int_0^0 f \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Table des matières

1	Arithmétique, groupes et anneaux	13
	<i>Classique.</i> Action d'un groupe sur un ensemble, Burnside et Cayley	14
	<i>Classique.</i> Réduction d'une équation diophantienne modulo 7	16
	<i>Classique.</i> Structure de groupe quotient par un sous-groupe distingué	17
	<i>Centrale.</i> Un théorème de Legendre dans un groupe abélien	19
	<i>Mines.</i> Une question de divisibilité	20
	<i>X.</i> Formule de Legendre par Fubini	21
	<i>X.</i> Nombres de Fermat	22
	<i>Mines.</i> Stabilité dans un anneau	23
	<i>Mines.</i> Sur les groupes cycliques	23
	<i>Classique.</i> Racines d'un rationnel	24
	<i>X.</i> Idéaux maximaux	25
	<i>Mines.</i> Maximisation sur les permutations	26
	<i>Classique.</i> Sous-groupes additifs de \mathbb{R}	26
	<i>Mines.</i> Groupe fini et dénombrement	27
	<i>Classique.</i> Fonction et inversion de Möbius	28
	<i>X.</i> Morphismes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans (\mathbb{Q}^*, \times)	29
	<i>X.</i> Une équation fonctionnelle sur \mathbb{Z}	30
	<i>Mines.</i> Entiers divisibles par leur indicatrice d'Euler	31
	<i>Mines.</i> Etude d'un corps de rupture	32
	<i>Classique.</i> Polynômes cyclotomiques	33
	<i>X.</i> Groupes multiplicatifs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	34
	<i>X.</i> Sous-groupe compact de $(\mathcal{G}l_n(\mathbb{R}), \times)$ contenant $\mathcal{O}(n)$	35
	<i>X.</i> Nombre moyen de point fixes d'une permutation	36
	<i>Centrale.</i> Une algèbre isomorphe à \mathbb{C}	38
	<i>X.</i> Matrice d'un sous-groupe fini de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\text{tr}(M) = n$	40
	<i>X.</i> Sous-groupes bornés de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$	40
	<i>X.</i> Sommes des carrés dans un anneau	42
	<i>X.</i> Etude du PGCD d'une partie de \mathbb{N}	43
	<i>Classique.</i> Groupe formé d'éléments involutifs	46
	<i>X.</i> Caractère cyclique de $(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^\times$	46
	<i>X.</i> Invariants d'une action de groupe	48
	<i>X.</i> Etude des p -groupes	50
2	Polynômes et fractions	53
	<i>Mines.</i> Deux polynômes couplés	54
	<i>Mines.</i> Somme des inverses des pentes	54
	<i>Mines.</i> Famille libre de polynômes	54
	<i>X.</i> Racines et coefficients	55
	<i>Mines.</i> Construction d'un polynôme	56
	<i>Centrale.</i> Irrationalité de l'exponentielle d'un rationnel non nul	57
	<i>Centrale.</i> Représentation intégrale des coefficients	58
	<i>X.</i> Une conséquence du théorème de Lucas	59
	<i>X.</i> Equation polynomiale	59
	<i>X.</i> Polynômes scindés 1	60
	<i>Mines.</i> Polynômes scindés 2	61
	<i>Mines.</i> Stabilité de \mathbb{Q} par un polynôme	63
	<i>Centrale.</i> Une égalité polynomiale obtenue par des fractions	64
	<i>Classique.</i> Polynômes de Tchebycheff	66
	<i>Centrale.</i> Polynômes stables	68
	<i>Classique.</i> Polynômes de Legendre	69
	<i>X.</i> Polynômes de Hilbert, fractions associées	70
	<i>Mines.</i> Application des déterminants de Vandermonde	72
	<i>X.</i> Polynômes et dérivées itérées	73
	<i>Classique.</i> Continuité des racines d'une suite de polynômes	75
	<i>Classique.</i> Discriminant généralisé	76

3	Espaces vectoriels et matrices	79
	<i>Classique.</i> Transvections, parties génératrices de $Gl_n(K)$, de $Sl_n(K)$	80
	<i>Centrale.</i> Trace d'un endomorphisme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	82
	<i>Mines.</i> Supplémentaire commun	82
	<i>Mines.</i> Sous-espaces stables	83
	<i>Mines.</i> Calcul matriciel	85
	<i>X.</i> Inégalité de Frobenius	85
	<i>Mines.</i> Caractérisation de la nilpotence par les traces	86
	<i>Mines.</i> Utilisation des matrices de rang 1	86
	<i>Centrale.</i> Un produit qui est un projecteur	87
	<i>Classique.</i> Noyaux itérés	88
	<i>Mines.</i> Vecteur propre commun à deux projecteurs	89
	<i>Centrale.</i> Projecteur défini par une moyenne arithmétique	90
	<i>Centrale.</i> Sur les hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	91
	<i>Mines.</i> Si $AB - BA = B\dots$	92
	<i>Centrale.</i> Dimension d'un commutant	93
	<i>Classique.</i> Matrices compagnon, application aux entiers algébriques	94
	<i>Mines.</i> Semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	96
	<i>X.</i> Somme nilpotente de matrices	96
	<i>X.</i> Matrices de même noyau	97
	<i>Centrale.</i> Etude des matrices de trace nulle	98
	<i>X.</i> Matrices à diagonale dominante	100
	<i>Classique.</i> Sous-espaces stables par un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (dualité)	101
	<i>X.</i> Etude du groupe spécial linéaire	102
	<i>Centrale.</i> Propriétés de la comatrice	105
	<i>Classique.</i> Enveloppe convexe, théorème de Carathéodory	106
	<i>Centrale.</i> Supplémentaires anticommétant dans $\mathcal{L}(E)$	107
	<i>Centrale.</i> Equation $A = \text{com}(A)$	108
	<i>X.</i> Automorphismes d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	109
4	Déterminants et groupe symétrique	111
	<i>X.</i> Déterminant de la transposition	112
	<i>Mines.</i> Sous-groupes de \mathcal{S}_{n+1}	112
	<i>Centrale.</i> Spectre et déterminant	113
	<i>X.</i> Recherche des carrés dans l'ensemble des permutations	113
	<i>Classique.</i> Déterminant tridiagonal	114
	<i>Mines.</i> Déterminant à paramètres et expression d'un inverse	114
	<i>Mines.</i> Déterminants et dualité	116
	<i>X.</i> Bases de même orientation	117
	<i>Centrale.</i> Calcul d'un déterminant lié à un polynôme	117
	<i>Classique.</i> Déterminant des $ a_i - a_j $	119
	<i>Mines.</i> Déterminant et dérivation	120
	<i>Classique.</i> Déterminant circulant	121
	<i>Centrale.</i> Déterminants dans des ensembles particuliers de matrices	122
	<i>X.</i> Somme des cofacteurs d'une matrice antisymétrique	123
	<i>X.</i> Déterminants de Cauchy, de Hilbert	124
	<i>X.</i> Déterminant résultant de deux polynômes	126
5	Réduction	129
	<i>Classique.</i> Décomposition de Dunford	130
	<i>Mines.</i> Antécédent d'une matrice diagonalisable par un polynôme	131
	<i>Mines.</i> Une caractérisation de la diagonalisabilité	131
	<i>Mines.</i> Un sous-espace stable par un endomorphisme sur \mathbb{R}	132
	<i>Mines.</i> Dimension d'un commutant et réduction	132
	<i>Classique.</i> Diagonalisation ou trigonalisation simultanée	133
	<i>X.</i> Diagonalisabilité et supplémentaires stables	134
	<i>Mines.</i> Trigonalisation simultanée 1	134
	<i>X.</i> Trigonalisation simultanée 2	135

<i>Mines.</i> Etude d'une diagonalisabilité par blocs	136
<i>Mines.</i> Sous-espaces stables par un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$	137
<i>Mines.</i> Equation aux éléments propres	138
X. Polynômes annulateurs	140
X. Matrice hermitienne	140
<i>Classique.</i> Critère de non-diagonalisabilité sur \mathbb{C}	141
X. Espaces de polynômes stables par la dérivation	142
<i>Mines.</i> Existence d'un polynôme annulateur fonction du rang	143
X. Etude de projecteurs de même rang	143
<i>Mines.</i> Vecteurs propres et transposée de la comatrice	144
X. Un spectre non trivial	144
X. Un endomorphisme sur les endomorphismes	146
<i>Mines.</i> Si un polynôme en M est diagonalisable...	147
<i>Mines.</i> Etude d'une diagonalisabilité sur $\mathbb{R}_{2n}[X]$	148
<i>Classique.</i> Réduction d'une matrice creuse	148
<i>Mines.</i> Spectre de $Id_E - uv$ et $Id_E - vu$	149
<i>Mines.</i> Que dire si $u \circ u$ est diagonalisable?	150
<i>Mines.</i> Diagonalisation d'une matrice par blocs 1	151
<i>Classique.</i> Diagonalisabilité d'un produit tensoriel d'ordre 2	152
X. Diagonalisation d'une matrice par blocs 2	152
<i>Centrale.</i> Trigonalisation simultanée 3 (par dualité)	153
X. Diagonalisation d'une matrice par blocs 3	154
<i>Classique.</i> Surjectivité de l'exponentielle de matrices dans \mathbb{C}	156
<i>Classique.</i> Diagonalisabilité de u , de $P(u)$ si $P'(u) \in GL(E)$	158
6 Espaces préhilbertiens ou euclidiens	161
<i>Classique.</i> Critère de Sylvester pour les matrices positives	162
<i>Classique.</i> Réduction des endomorphismes normaux	163
<i>Classique.</i> Formes quadratiques	166
<i>Centrale.</i> Réduction simultanée de matrices symétriques	167
<i>Classique.</i> Inégalité de Hadamard	168
<i>Mines.</i> Une caractérisation des bases orthonormales	169
X. Module d'une somme vs. somme des modules	169
<i>Classique.</i> Caractérisation des projecteurs orthogonaux	170
<i>Mines.</i> Racine carrée d'un endomorphisme autoadjoint positif	171
<i>Centrale.</i> Un problème de minimisation	172
X. Une partie finie de la sphère unité d'un espace euclidien	173
<i>Classique.</i> Polynômes orthogonaux associés à un poids	174
<i>Mines.</i> Caractérisation des similitudes	177
<i>Centrale.</i> Matrice de Hilbert	178
X. Sur les endomorphismes autoadjoints	180
<i>Mines.</i> Optimisations de sommes sur $\mathcal{O}(n)$	181
<i>Mines.</i> Somme normalisée des endomorphismes de permutation	183
<i>Mines.</i> Matrice de rotation	183
X. Minimisation d'une intégrale à paramètre	184
<i>Classique.</i> Décomposition polaire d'une matrice	185
<i>Centrale.</i> Constructions d'endomorphismes remarquables	187
<i>Classique.</i> Décomposition d'Iwasawa	188
<i>Classique.</i> Décomposition de Cholesky	189
X. Déterminant et matrices antisymétriques	190
<i>Classique.</i> Endomorphismes et matrices antisymétriques	191
<i>Classique.</i> Matrices de Gram	193
X. Itérées d'une composée de deux projecteurs	195
<i>Classique.</i> Polynômes de Legendre	197
X. Polynômes de Tchebycheff, un problème de minimisation	198
<i>Classique.</i> Polynômes d'Hermite	200
<i>Centrale.</i> Rayon spectral	202
<i>Classique.</i> Polynômes de Laguerre	203

X.	Trace d'un produit de matrices symétriques positives	205
<i>Centrale.</i>	Somme orthogonale de deux matrices symétrique/antisymétrique	206
<i>Mines.</i>	Approximations d'un vecteur propre	207
X.	Ordre sur les matrices symétriques définies positives	208
<i>Mines.</i>	Majoration du déterminant par la norme sup	209
<i>Mines.</i>	Une inégalité de convexité	210
X.	Comparaison des sphères unité associées à deux produits scalaires	211
X.	Théorème du minimax de Courant-Fischer	212
<i>Mines.</i>	Comparaison trace-rang d'une matrice symétrique réelle	213
X.	Une matrice symétrique définie positive	213
7	Suites et espaces vectoriels normés	215
<i>Classique.</i>	Preuve de l'irrationalité de e	216
<i>Classique.</i>	Normes de Hölder	216
<i>Classique.</i>	Lemme de Cesàro, application à $u_{n+1} = \sin(u_n)$	219
<i>Classique.</i>	Cesàro (variante)	220
<i>Centrale.</i>	« Technique de la puissance α » pour les suites récurrentes	221
<i>Centrale.</i>	Suite récurrente et intégrales à paramètre	222
<i>Mines.</i>	Normes subordonnées d'une forme linéaire	225
<i>Mines.</i>	Fonction pseudo-contractante	227
<i>Centrale.</i>	Limite d'une suite matricielle	227
X.	Semi-norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	228
<i>Mines.</i>	Limite de $\sin(2\pi n!e)$	230
<i>Mines.</i>	Série matricielle	231
<i>Mines.</i>	Une autre expression de l'exponentielle de matrices	232
<i>Centrale.</i>	Méthode de Jacobi	233
<i>Mines.</i>	Méthode de Newton pour une racine carrée de matrice	235
X.	Formes linéaires continues sur $\ell^1(\mathbb{N})$, norme triple	236
<i>Classique.</i>	Calcul de norme subordonnée	237
<i>Mines.</i>	Etude de l'équivalence de deux normes	238
8	Topologie	241
<i>Classique.</i>	Suites de Cauchy	242
<i>Classique.</i>	Caractérisation des compacts par Borel-Lebesgue	244
<i>Centrale.</i>	Dyadiques, caractérisation de la convexité par dichotomie	246
<i>Classique.</i>	Partie dense dénombrable de $\mathcal{C}^0([a, b], K)$	247
<i>Classique.</i>	Topologie de $O(n)$ et $SO(n)$	248
X.	Topologie de la convergence simple	250
<i>Mines.</i>	Parties compactes de $GL_n(\mathbb{C})$ stables par produit	251
X.	Séparation d'un point et d'un compact convexe	252
<i>Centrale.</i>	Lemme de Riesz	253
<i>Centrale.</i>	Les applications linéaires surjectives forment un ouvert	254
X.	Moyenne des itérés d'un endomorphisme	255
X.	Topologie du rang	256
X.	Valeurs d'adhérence de $(\cos(\ln(n)))_n$	257
<i>Classique.</i>	Adhérence des matrices inversibles, diagonalisables	257
X.	Densité des quotients d'une suite	259
<i>Centrale.</i>	Problèmes de distance	259
<i>Classique.</i>	Intérieur d'une classe de similitude	261
<i>Mines.</i>	Fonction faiblement contractante	261
<i>Mines.</i>	Projeté sur un compact	263
<i>Classique.</i>	Théorème de Baire	263
<i>Classique.</i>	Théorème de Banach-Steinhaus	264
<i>Classique.</i>	Lemme de la puce, application	265
X.	Dichotomie radicale	267
<i>Centrale.</i>	Croissance locale du rang	268
X.	Intérieur des matrices diagonalisables	269
X.	Topologie des classes de similitudes	269

9 Fonctions d'une variable	273
<i>X.</i> Majoration de dérivée	274
<i>Classique.</i> Rolle à l'infini	274
<i>X.</i> Lemme de Gronwall sur \mathbb{R}	275
<i>Centrale.</i> Fonction régulières et idempotentes	276
<i>Classique.</i> Lemme de Gronwall	277
<i>X.</i> Majoration des trapèzes	277
<i>Mines.</i> Rolle et Vandermonde généralisé	278
<i>Classique.</i> Théorème de Darboux	279
<i>X.</i> Fonction sous-additive	280
<i>X.</i> Minimisation d'intégrales	281
<i>Mines.</i> Une minoration d'intégrale	282
<i>Classique.</i> Point fixe d'une fonction $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$	283
<i>Mines.</i> Fonction implicitement définie par une intégrale	284
<i>Classique.</i> Théorème de factorisation	285
<i>Mines.</i> Intégration et périodicité	286
<i>Centrale.</i> Etude d'un maximum	287
<i>Mines.</i> Changements de signes	287
<i>Centrale.</i> Une équation fonctionnelle	288
<i>X.</i> Lemme de Croft	289
<i>Centrale.</i> Compléments sur la convexité d'une fonction	291
<i>Centrale.</i> Utilisation de Taylor-Young	293
10 Intégration	295
<i>Classique.</i> Théorème de convergence monotone	296
<i>Classique.</i> Sommes de Riemann généralisées 1	298
<i>Centrale.</i> Transformée de Laplace et calcul de l'intégrale de Dirichlet	298
<i>Mines.</i> Inégalité de Hardy	301
<i>Centrale.</i> Nature d'une intégrale à paramètre	301
<i>X.</i> Fonction intégrable et décroissante sur \mathbb{R}^+	303
<i>Centrale.</i> Existence, calcul d'intégrales	303
<i>X.</i> Intégrabilité et uniforme continuité sur \mathbb{R}^+	304
<i>Centrale.</i> Une identité sur les intégrales	305
<i>Classique.</i> Une propriété géométrique de l'intégrale	306
<i>Mines.</i> Etude d'une suite d'intégrales 1	306
<i>Centrale.</i> Etude d'une suite d'intégrales 2	308
<i>Mines.</i> Calcul d'une intégrale impropre	309
<i>Mines.</i> Etude d'une intégrale à paramètre	310
<i>X.</i> Une propriété des fonctions entières	312
<i>X.</i> Etude d'une intégrabilité	313
<i>Centrale.</i> Théorème de Bohr-Mollerup (caractérisation de la fonction Γ)	314
<i>Mines.</i> Sommes de Riemann généralisées 2	316
<i>X.</i> Sommes inverses de Riemann	316
<i>Mines.</i> Calcul d'une intégrale par ses sommes de Riemann	317
<i>Classique.</i> Sommes de Riemann généralisées 3	319
<i>Mines.</i> Une inégalité intégrale	320
<i>Classique.</i> Un développement asymptotique par l'intégration des relations	321
<i>Centrale.</i> Une somme équivalente aux intégrales partielles	321
<i>X.</i> Calcul d'une intégrale à deux paramètres	323
<i>Mines.</i> Calcul d'une intégrale à paramètre	324
<i>Mines.</i> Intégration des relations de comparaison : application	325
<i>Centrale.</i> Théorèmes abélien, taubérien et transformée de Laplace	326
<i>X.</i> Continuité d'une intégrale à paramètre	327
<i>Classique.</i> Transformée de Fourier de la loi normale	328
<i>Mines.</i> Intégrale à paramètre dans les bornes	330
<i>Mines.</i> Calcul de l'intégrale de Gauss	332
<i>X.</i> Equivalent d'une intégrale à paramètre	333
<i>Centrale.</i> Calcul d'une intégrale par convergence dominée	334

X. Une preuve analytique du théorème de d'Alembert-Gauss	336
<i>Classique.</i> Convolution et approximation de l'unité	338
11 Séries numériques	341
<i>Classique.</i> Transformation d'Abel	342
<i>Classique.</i> Preuve de la formule de Stirling par Wallis	344
<i>Classique.</i> Constante γ d'Euler	345
<i>Mines.</i> Une série divergente	347
<i>Mines.</i> Produit de Cauchy et décomposition en éléments simples	347
<i>Mines.</i> Nature de séries à paramètre	348
<i>Mines.</i> Equivalent d'une somme partielle	349
X. Suites récurrentes et séries	350
<i>Mines.</i> Sommes nulles d'une série numérique	351
<i>Mines.</i> Séries et fonctions à décroissance rapide	351
<i>Centrale.</i> Calcul d'une somme grâce à Stirling	352
<i>Centrale.</i> Transformées d'une série numérique	353
<i>Mines.</i> Famille sommable	354
<i>Mines.</i> Série double	355
X. Exponentielles de matrices d'ordre 2	355
<i>Mines.</i> Terme général intégral	357
<i>Centrale.</i> Série et fonction Γ	359
<i>Centrale.</i> Utilisation d'une série double	360
<i>Mines.</i> Produit infini : convergence, calcul	362
<i>Mines.</i> Calcul d'une somme	363
<i>Classique.</i> Règle de Raabe	364
X. Sommatation par paquets	365
X. Série à termes positifs	366
X. Autour d'une somme alternée	366
<i>Centrale.</i> Regroupements dans une série	368
X. Inégalité de Carleman	369
X. Décomposition en série factorielle d'un réel	371
X. Approximations d'un réel par des séries pseudo-alternées	373
X. Equivalents de sommes	375
X. Séries enveloppantes	377
X. Transformation de Toeplitz	379
12 Suites et séries de fonctions	383
<i>Classique.</i> Un théorème de Dini : convergence simple donc uniforme	384
<i>Classique.</i> Un autre théorème de Dini : convergence simple donc uniforme	384
<i>Classique.</i> La fonction zeta alternée	385
X. Convergence uniforme d'une suite de fonctions polynomiales	387
<i>Mines.</i> Calcul explicite d'une somme	388
<i>Centrale.</i> Produit de fonctions	389
X. Convergence simple d'une suite de fonctions équilipschitziennes	390
<i>Mines.</i> Suite de fonction définie par une relation intégrale	391
X. Construction d'une suite de fonctions	392
X. Convergence simple \implies uniforme dans un espace de dimension finie	393
<i>Centrale.</i> Weierstrass par convolution	394
<i>Mines.</i> Equivalent d'une somme	395
<i>Classique.</i> Noyaux de Fejer et Weierstrass trigonométrique	397
<i>Centrale.</i> Relation fonctionnelle et série de fonctions	399
X. Développements asymptotiques d'une intégrale à paramètre	400
<i>Mines.</i> Dérivabilité d'une somme	401
<i>Mines.</i> Régularité d'une somme	402
<i>Classique.</i> Intégration d'une série de fonctions	404
<i>Centrale.</i> Vers le développement eulérien du sinus	405
<i>Mines.</i> Intégrale à paramètre vs. série de fonctions	407

13 Séries entières	411
<i>Classique.</i> Une fonction différente de son développement de Taylor	412
<i>Mines.</i> Rayon de convergence 1	413
<i>Mines.</i> Développement en série entière et intégrale	413
<i>X.</i> Rayon de convergence 2	414
<i>Mines.</i> Développement en série entière et équation différentielle	415
<i>Classique.</i> Série génératrice des polynômes d'Hermitte	417
<i>X.</i> Fonctions analytiques et principe des zéros isolés	419
<i>Classique.</i> Série génératrice exponentielle du nombre d'involutions	420
<i>Classique.</i> Règles de Cauchy et d'Hadamard	422
<i>X.</i> Etude d'une somme au bord du disque de convergence	423
<i>Classique.</i> Formule de Cauchy et applications	424
<i>Centrale.</i> Calcul d'une série entière par une équation différentielle	425
<i>Mines.</i> Série entière p -lacunaire	426
<i>Classique.</i> Produit de séries entières	427
<i>Centrale.</i> Fonction de Bessel et intégrales de Wallis	428
<i>Classique.</i> Théorèmes taubériens	430
<i>X.</i> Développement en série entière d'une série de fonctions	431
<i>Centrale.</i> Développement en série entière via une équation fonctionnelle	433
<i>Classique.</i> Théorème de Paoli	435
<i>Classique.</i> Equivalent au bord d'une série entière lacunaire	436
<i>X.</i> Nombres de Catalan	438
<i>Classique.</i> Nombres de Stirling de deuxième espèce, nombres de Bell	441
14 Équations différentielles	443
<i>Classique.</i> Une preuve du théorème de Cauchy linéaire	444
<i>Classique.</i> Système différentiel en $z = x + iy$	446
<i>Centrale.</i> Etude qualitative d'une équation différentielle 1	446
<i>Mines.</i> Prolongement \mathcal{C}^n d'une fonction \mathcal{C}^n sur un segment	447
<i>Classique.</i> Propriété des systèmes fondamentaux	448
<i>X.</i> Stabilité des solutions d'un système différentiel	449
<i>Mines.</i> Système différentiel associé à une matrice antisymétrique	450
<i>Classique.</i> Equation linéaire d'ordre 1 avec raccordement	451
<i>X.</i> Une inéquation différentielle	452
<i>Centrale.</i> Une résolution guidée	453
<i>X.</i> Une équation non linéaire	454
<i>Mines.</i> Variation des constantes 1	455
<i>Mines.</i> Variations des constantes 2	456
<i>X.</i> Solutions à support compact d'une équation différentielle	457
<i>Classique.</i> Méthode de Lagrange avec raccordement	458
<i>Centrale.</i> Equation comportant une valeur absolue	460
<i>Classique.</i> Equation différentielle linéaire d'ordre 2 avec raccordement	461
<i>Mines.</i> Equation différentielle linéaire d'ordre 2 avec séries entières	463
<i>X.</i> Etude qualitative d'une équation différentielle 2	464
<i>X.</i> Intégrale de Dirichlet via une équation différentielle	466
15 Calcul différentiel	471
<i>Classique.</i> Preuve du théorème spectral par les extremas liés	472
<i>Classique.</i> Maximisation de l'entropie de Shannon	472
<i>Centrale.</i> Une étude de différentiabilité	474
<i>Mines.</i> Optimisation impliquant une matrice de S_n^{++}	475
<i>X.</i> Conditions de Cauchy-Riemann	476
<i>Classique.</i> Equation associée à un champ de gradient	477
<i>X.</i> Fonctions concaves à plusieurs variables	478
<i>Classique.</i> Dérivation sous l'intégrale à plusieurs variables	479
<i>Centrale.</i> Régularité d'une fonction de plusieurs variables	481
<i>Classique.</i> Changement de variable polaire	482
<i>Centrale.</i> Recherche d'extrema 1	483

<i>Mines.</i> Probabilités et optimisation	484
<i>Centrale.</i> Recherche d'extrema 2	485
<i>Mines.</i> Sinus complexe	486
<i>Centrale.</i> Principe du maximum	487
X. Sur la règle de la chaîne	489
<i>Mines.</i> Equation aux dérivées partielles 1	490
<i>Centrale.</i> Signe du Laplacien	491
<i>Centrale.</i> Equation aux dérivées partielles 2	492
<i>Classique.</i> Une étude de différentiabilité	493
X. Principe du maximum pour une fonction harmonique	495
X. Plusieurs variables pour une application en algèbre	497
<i>Centrale.</i> Suite et fonction lipschitzienne	499
<i>Centrale.</i> Optimisation d'intégrales avec contrainte au bord	500

16 Probabilités 503

<i>Mines.</i> Le problème des ascenseurs	504
<i>Classique.</i> La ruine du joueur	504
<i>Mines.</i> Loi des records sur \mathcal{S}_n	505
<i>Mines.</i> Espérance de la somme d'une poignée de jetons	505
<i>Classique.</i> Problème du scrutin électoral	506
<i>Classique.</i> Lemme de Fatou probabiliste	507
<i>Classique.</i> Méthode de rejet	508
<i>Centrale.</i> Autour de la matrice des covariances	509
<i>Mines.</i> Espérance du polynôme caractéristique	510
<i>Classique.</i> Le coup du chapeau	510
<i>Classique.</i> Théorème de Borel-Cantelli, applications	512
<i>Classique.</i> Les allumettes de Banach	514
X. Loi forte des grands nombres	515
<i>Classique.</i> Marche aléatoire sur \mathbb{Z} , récurrente ou transiente?	518
<i>Classique.</i> Marche aléatoire symétrique sur \mathbb{Z}	520
<i>Classique.</i> Modes de convergence, convergence monotone	522
<i>Centrale.</i> Matrices aléatoires 1	524
<i>Classique.</i> Loi zeta, application à l'étude d'une série	525
<i>Mines.</i> Matrices aléatoires 2	526
<i>Mines.</i> Somme de binomiales \sim binomiales	527
<i>Centrale.</i> Loi de Poisson ponctionnée	528
<i>Mines.</i> Réalisation d'un tirage dans l'ordre	530
<i>Mines.</i> Comportement asymptotique d'une queue de distribution	530
X. Lois uniformes sur un groupe privé de son neutre	531
<i>Centrale.</i> Loi des deux premières séries	533
<i>Mines.</i> Sup essentiel	535
<i>Centrale.</i> Problème des secrétaires	536
<i>Mines.</i> Sommabilité et covariance	538
<i>Mines.</i> Une loi définie par des intégrales impropres	539
X. Loi binomiale et indépendance	541
<i>Classique.</i> Lois décomposables	542
<i>Mines.</i> Une loi modulo	544
X. Probabilité qu'une droite soit de pente donnée	546
X. Distance entre deux lois sur \mathbb{N}	548
X. Probabilités et cycles de permutation	550
X. Occurrences	552
X. Inégalité de concentration de Hoeffding	554