Les MATHS faciles

de 14 à 99 ans

Olivier Garde

ellipses

1 Ce que sont un multiple et un diviseur

Multiple et diviseur

On considère trois nombres entiers non nuls a, b et c qui vérifient la relation :

$$a = b \times c$$

On peut en déduire que :

- a est un **multiple** de b. (*a est également un multiple de c*)
- b divise a, donc b est un **diviseur** de a. (*c est également un diviseur de a*)
- a est **divisible** par b. (*a est également divisible par c*)

Par exemple, on sait que $28 = 7 \times 4$. On peut donc dire que :

- *28 est un multiple de 7 et aussi de 4.*
- *7 est un diviseur de 28.*
- *4 est également un diviseur de 28.*
- *28 est divisible par 7 et par 4.*

Diviseurs évidents

Tout nombre entier (différent de 0 et de 1) possède 2 diviseurs évidents : ***1 et lui-même****.*
Par exemple, le nombre 12 est divisible par 1 et par 12, car $12 = 1 \times 12$.
Le nombre 12 possède également d'autres diviseurs : 2, 3, 4 et 6.

Exemple 1

On sait que $30 = 6 \times 5$ et que $48 = 12 \times 4$.
À partir de ces deux égalités, former des phrases avec les mots « multiple » et « diviseur ».

$30 = 6 \times 5$ donc : 30 est un multiple de 6 et de 5.
6 est un diviseur de 30.
5 est un diviseur de 30.

$48 = 12 \times 4$ donc : 48 est un multiple de 12 et de 4.
12 est un diviseur de 48.
4 est un diviseur de 48.

Critères de divisibilité

Les critères de divisibilité nous permettent de savoir rapidement si un nombre est divisible par 2, par 3 ou bien par 5.

*Un nombre est **divisible par 2** s'il est pair.*

*Un nombre est **divisible par 3** si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.*

*Un nombre est **divisible par 5** s'il se termine par 0 ou par 5.*

Exemple 2 : utilisation des critères de divisibilité

Les nombres 28, 45, 132 et 247 sont-ils divisibles par 2, par 3 ou par 5 ?

- 28 est pair, donc 28 est divisible par 2.
  $2+8=10$.
  10 n'est pas un multiple de 3, donc 28 n'est pas divisible par 3.
  28 ne se termine ni par 0 ni par 5, donc 28 n'est pas divisible par 5.
- 45 est impair, donc 45 n'est pas divisible par 2.
  $4+5=9$.
  9 est un multiple de 3, donc 45 est divisible par 3.
  45 se termine par 5, donc 45 est divisible par 5.
- 132 est pair, donc 132 est divisible par 2.
  $1+3+2=6$.
  6 est un multiple de 3, donc 132 est divisible par 3.
  132 ne se termine ni par 0 ni par 5, donc 132 n'est pas divisible par 5.
- 247 est impair, donc 247 n'est pas divisible par 2.
  $2+4+7=13$.
  13 n'est pas un multiple de 3, donc 247 n'est pas divisible par 3.
  247 ne se termine ni par 0 ni par 5, donc 247 n'est pas divisible par 5.

☑ Exercice 1

On sait que $36=3\times12$ et que $65=5\times13$. À partir de ces deux égalités, former des phrases avec les mots « multiple » et « diviseur ».

☑ Exercice 2

En utilisant les critères de divisibilité, dire si les nombres 63, 315, 193 et 294 sont divisibles par 2, par 3 ou par 5 ?

2 Ce qu'est un nombre premier

Un **nombre premier** est un nombre entier positif qui ne possède **que 2 diviseurs** : 1 et lui-même.

Par exemple, le nombre 6 se divise par 1, par 2, par 3 et par 6.
Il possède 4 diviseurs. Le nombre 6 n'est pas un nombre premier.

En revanche, le nombre 7 ne se divise que par 1 et par 7.
Il ne possède que 2 diviseurs. Le nombre 7 est un nombre premier.

Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 30. Il est utile de la connaitre par cœur :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 et 29

Le nombre 1 n'est pas premier car il ne possède qu'un seul diviseur : 1.

Méthode pour déterminer si un nombre est premier ou ne l'est pas

Soit un nombre *n*. On souhaite savoir si ce nombre *n* est premier ou ne l'est pas.

- On utilise les critères de divisibilité pour déterminer si le nombre *n* se divise par 2, par 3 ou par 5.
- Si le nombre *n* n'est pas divisible par 2, 3 et 5, on teste alors si les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$ divisent *n*, en utilisant la liste des nombres premiers.

*N'hésitez pas à revoir la **fiche 1** sur les diviseurs et les critères de divisibilité.*

« on teste alors si les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$ divisent n »

Cela signifie qu'il n'est pas utile de tester avec tous les nombres de la liste des nombres premiers. Par exemple, avec le nombre 127, on teste jusqu'à $\sqrt{127} \simeq 11,3$. 127 n'est pas divisible par 2, par 3 ou par 5. Il reste à tester si 127 est divisible par 7 ou par 11, en utilisant la calculatrice.

Les exemples suivants vont vous permettre de bien comprendre la méthode.

Exemple 1

Les nombres 63 et 299 sont-ils des nombres premiers ?

- 63 est impair, donc 63 n'est pas divisible par 2.
  $6+3=9$.
  9 est un multiple de 3, donc 63 est divisible par 3.
  63 n'est donc pas un nombre premier.
- 299 est impair, donc 299 n'est pas divisible par 2.
  $2+9+9=20$.
  20 n'est pas un multiple de 3, donc 299 n'est pas divisible par 3.
  299 ne se termine ni par 0 ni par 5, donc 299 n'est pas divisible par 5.
  Il faut alors tester avec la liste des nombres premiers.
  $\sqrt{299} \simeq 17{,}29$. Il suffit de tester si 299 est divisible par 7, 11, 13 ou 17.
  On utilise la calculatrice et on remarque que 299 n'est divisible ni par 7, ni par 11. Cependant, 299 est divisible par 13, car $\dfrac{299}{13}=23$.
  299 n'est donc pas un nombre premier.

Exemple 2

Les nombres 1236 et 821 sont-ils des nombres premiers ?

- 1236 est pair, donc 1236 est divisible par 2.
  1236 n'est donc pas un nombre premier.
- 821 est impair, donc 821 n'est pas divisible par 2.
  $8+2+1=11$.
  11 n'est pas un multiple de 3, donc 821 n'est pas divisible par 3.
  821 ne se termine ni par 0 ni par 5, donc 821 n'est pas divisible par 5.
  Il faut alors tester avec la liste des nombres premiers.
  $\sqrt{821} \simeq 28{,}65$. Il faut tester si 821 est divisible par 7, 11, 13, 17, 19 ou 23.
  On utilise la calculatrice et on remarque que 821 n'est divisible par aucun de ces nombres.
  821 est donc un nombre premier.

☑ **Exercice**

Les nombres 861, 83, 558, 473, 225 et 827 sont-ils des nombres premiers ?

3 Comment décomposer un nombre en produit de facteurs premiers ?

« Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers » signifie écrire ce nombre comme un **produit de nombres**, qui sont **tous des nombres premiers**.

Par exemple, le nombre 42 peut s'écrire aussi $2 \times 3 \times 7$.

Les nombres 2, 3 et 7 sont tous des nombres premiers.
La décomposition en produit de facteurs premiers du nombre 42 est $2 \times 3 \times 7$.

Pour rappel, voici la liste des nombres premiers inférieurs à 30 :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 et 29

*N'hésitez pas à revoir la **fiche 1** sur les critères de divisibilité et la **fiche 2** sur les nombres premiers.*

Méthode pour décomposer un nombre en produit de facteurs premiers

Soit un nombre *n*.

On souhaite décomposer ce nombre *n* en un produit de facteurs premiers.

- On tire un trait vertical : on place à droite du trait les diviseurs premiers et à gauche le nombre *n*, ainsi que les résultats des divisions successives par les diviseurs premiers.
- On utilise les critères de divisibilité (**fiche 1**) pour déterminer si les différents nombres situés à gauche se divisent par 2, par 3 ou par 5.
- On poursuit en utilisant la calculatrice et la liste des nombres premiers pour trouver des diviseurs premiers aux différents nombres situés à gauche.

La méthode pour décomposer un nombre peut paraître complexe, mais vous verrez au travers des différents exemples que c'est assez simple.

*Dans l'**exemple 2**, on regroupera les diviseurs identiques sous la forme de puissances. N'hésitez pas à voir la **fiche 10** sur les puissances.*

Exemple 1

Décomposer le nombre 2730 en produit de facteurs premiers.

2730 est pair, il est divisible par 2 et on a $\frac{2730}{2}=1365$.

$1+3+6+5=12$. 1365 est divisible par 3 et on a $\frac{1365}{3}=455$.

455 se termine par 5, il est divisible par 5 et on a $\frac{455}{5}=91$.

On poursuit avec la liste des nombres premiers et on remarque que $\frac{91}{7}=13$. De plus, 13 est un nombre premier.

2730	2
1365	3
455	5
91	7
13	13
1	

La décomposition de 2730 en produit de facteurs premiers est $2\times3\times5\times7\times13$.

Exemple 2 : avec des puissances

Décomposer le nombre 5940 en produit de facteurs premiers.

5940 est pair, il est divisible par 2 et on a $\frac{5940}{2}=2970$.

2970 est pair, il est divisible par 2 et on a $\frac{2970}{2}=1485$.

$1+4+8+5=18$. 1485 est divisible par 3 et on a $\frac{1485}{3}=495$.

$4+9+5=18$. 495 est divisible par 3 et on a $\frac{495}{3}=165$.

$1+6+5=12$. 165 est divisible par 3 et on a $\frac{165}{3}=55$.

5940	2
2970	2
1485	3
495	3
165	3
55	5
11	11
1	

55 se termine par 5, il est divisible par 5 et on a $\frac{55}{5}=11$.

De plus, 11 est un nombre premier.

La décomposition de 5940 en produit de facteurs premiers est $2^2\times3^3\times5\times11$.

☑ **Exercice**

Déterminer les décompositions en produit de facteurs premiers des nombres suivants : 2835, 2261, 1868, 618 et 5481.

4

Comment rendre une fraction irréductible ?

Rendre une **fraction irréductible**, c'est faire en sorte qu'elle soit simplifiée au maximum, qu'on ne puisse plus la réduire, d'où le terme « irréductible ».

Tout d'abord, on peut utiliser les **critères de divisibilité** pour réduire cette fraction.

Par exemple, si on souhaite réduire $\frac{8}{6}$*, les nombres 8 et 6 sont tous les deux pairs et donc divisibles par 2. On a donc :* $\frac{8}{6}=\frac{\cancel{2}\times 4}{\cancel{2}\times 3}=\frac{4}{3}$.

Pour les fractions les plus complexes, on peut utiliser les **décompositions en produit de facteurs premiers** pour rendre cette fraction irréductible.

*Par exemple, on a vu dans les exemples de la **fiche 3** que la décomposition du nombre 5940 est* $2^2\times 3^3\times 5\times 11$ *et celle du nombre 2730 est* $2\times 3\times 5\times 7\times 13$.

Il est possible de rendre la fraction $\frac{5940}{2730}$ *irréductible avec ces décompositions, en retirant les facteurs identiques au numérateur et au dénominateur :*

$$\frac{5940}{2730}=\frac{2^2\times 3^3\times 5\times 11}{2\times 3\times 5\times 7\times 13}=\frac{\cancel{2}\times 2\times \cancel{3}\times 3\times 3\times \cancel{5}\times 11}{\cancel{2}\times \cancel{3}\times \cancel{5}\times 7\times 13}=\frac{2\times 3\times 3\times 11}{7\times 13}=\frac{198}{91}.$$

> *N'hésitez pas à revoir la **fiche 1** sur les critères de divisibilité et la **fiche 3** sur la décomposition en produit de facteurs premiers.*

Exemple 1

Simplifier la fraction $\frac{330}{315}$.

330 et 315 se terminent par 0 ou par 5, donc 330 et 315 sont divisibles par 5 et on a $\frac{330}{5}=66$ et $\frac{315}{5}=63$.

On peut donc simplifier une première fois cette fraction : $\frac{330}{315}=\frac{\cancel{5}\times 66}{\cancel{5}\times 63}=\frac{66}{63}$.

$6+6=12$ et $6+3=9$, donc 66 et 63 sont divisibles par 3 et on a $\frac{66}{3}=22$ et $\frac{63}{3}=21$. On a donc $\frac{330}{315}=\frac{66}{63}=\frac{\cancel{3}\times 22}{\cancel{3}\times 21}=\frac{22}{21}$.

On ne peut pas aller plus loin, $\frac{330}{315}$ se simplifie en $\frac{22}{21}$.

*Pour l'**exemple 2**, n'hésitez pas à voir la **fiche 10** sur les puissances.*

Exemple 2

Voici les décompositions en produit de facteurs premiers de 25500 et 22275 : $25500=2^2\times 3\times 5^3\times 17$ et $22275=3^4\times 5^2\times 11$.

À l'aide de ces décompositions, rendre la fraction $\frac{25500}{22275}$ irréductible.

On peut simplifier cette fraction en retirant les facteurs identiques au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{25500}{22275}=\frac{2^2\times 3\times 5^3\times 17}{3^4\times 5^2\times 11}=\frac{2\times 2\times \cancel{3}\times \cancel{5}\times \cancel{5}\times 5\times 17}{\cancel{3}\times 3\times 3\times 3\times \cancel{5}\times \cancel{5}\times 11}.$$

On obtient alors $\frac{25500}{22275}=\frac{2\times 2\times 5\times 17}{3\times 3\times 3\times 11}=\frac{340}{297}$. Ainsi, $\frac{25500}{22275}$ se simplifie en $\frac{340}{297}$.

☑ Exercice 1

Simplifier la fraction $\frac{126}{138}$.

☑ Exercice 2

Voici les décompositions en produit de facteurs premiers de 2520 et 450 : $2520=2^3\times 3^2\times 5\times 7$ et $450=2\times 3^2\times 5^2$.

À l'aide de ces décompositions, rendre la fraction $\frac{2520}{450}$ irréductible.