CHAPITRE 3

Intégration

La théorie de l'intégration naquit avec la recherche du calcul de l'aire d'une surface. Archimède savait déjà évaluer l'aire d'une surface délimitée par une parabole et une droite. Ses calculs furent repris au neuvième siècle par les savants arabes. Dès 1636, Pierre de Fermat carra les courbes $x \mapsto ax^m$ où m est un entier naturel.

Au cours de la seconde moitié du XVII^e siècle, Newton et Leibniz fondèrent le calcul infinitésimal. Newton calcula l'aire d'une courbe $y = f(x)$ en inversant les opérations de dérivation (aujourd'hui on dirait : en utilisant la notion de primitive). A l'inverse, Leibniz interpréta les aires comme des sommes de rectangles infinitésimaux.

En 1823, Cauchy rassembla leur résultats et donna le premier une définition précise de l'intégrale. C'est surtout Riemann qui, en 1854, développa la théorie de l'intégration. Il définit son intégrale à l'aide des fameuses “sommes de Riemann”.

Enfin, Lebesgue, dans sa thèse de 1902, présenta des idées révolutionnaires sur le concept d'intégrale. Il éclaira bien des difficultés des discussions du XIX^e siècle, et fournit un cadre général simplifié à de nombreux théorèmes, alors que la théorie de Riemann multipliait les hypothèses et les conditions restrictives.

L'intégrale de Lebesgue n'est pas au programme des classes préparatoires scientifiques, et nous étudierons ici l'intégrale de fonctions continues par morceaux.

1. Intégrale sur un segment de $\mathbb{R}$

Nous traiterons directement le cas des fonctions à valeurs dans un espace de Banach (c'est-à-dire un e.v.n complet), la théorie étant presque identique à celle des fonctions à valeurs réelles. Dans cette section, la lettre E désigne un espace de Banach sur $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton.

1.1. Définition de l'intégrale sur un segment de $\mathbb{R}$

Intégrale des fonctions en escalier.

Définition 1. On appelle *subdivision* de $[a, b]$ toute partie finie de $[a, b]$ contenant a et b. Si σ est une subdivision de $[a, b]$, on peut écrire $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ avec $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. C'est en général la notation employée pour désigner une subdivision.

On appelle *pas* (ou *module*) de la subdivision σ et on note $|\sigma|$ le réel $\sup_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1})$.

Définition 2. Une application $\varphi : [a, b] \to E$ est dite *en escalier* s'il existe une subdivision de $[a, b]$

$$\sigma : \; a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, φ soit constante sur $]x_{i-1}, x_i[$. Une telle subdivision σ est dite alors *bien adaptée* à φ.

Définition 3 (Intégrale d'une fonction en escalier). Soit $\varphi : [a, b] \to E$ une fonction en escalier. Soit $\sigma : \; a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de $[a, b]$ bien adaptée à φ, de sorte que pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, il existe $c_i \in E$ telle que $\varphi(x) = c_i$ sur $]x_{i-1}, x_i[$. La valeur

$$I(\sigma,\varphi) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) c_i$$

est indépendante de la subdivision σ adaptée à φ. On la note alors $I(\varphi)$ ou encore $\int_{[a,b]} \varphi$ ou $\int_a^b \varphi(x)\,dx$, et on l'appelle *intégrale* de φ.

Remarque 1. — Toute fonction en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de segments contenus dans $[a,b]$.
— L'ensemble $\mathcal{E}([a,b],E)$ des fonctions en escalier sur $[a,b]$ est un $\mathbb{K}$-e.v, et l'application $\mathcal{E} \to E \quad \varphi \mapsto I(\varphi)$ est linéaire.
— Pour toute fonction en escalier φ, $\|\varphi\|$ est une fonction en escalier et $\|I(\varphi)\| \leq I(\|\varphi\|)$.
— Si φ et ψ sont en escalier, à valeurs réelles, et si $\varphi \leq \psi$, alors $I(\varphi) \leq I(\psi)$.

Intégrale d'une fonction continue par morceaux.

Bien qu'on puisse définir l'intégrale de classes de fonctions beaucoup plus générales, nous nous limiterons à l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ dont la définition se trouve page 98.

→ Définition 4 (Intégrale d'une fonction continue par morceaux). Soit une fonction $f : [a,b] \to E$ continue par morceaux. Alors tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction en escalier $\varphi_n : [a,b] \to E$ telle que $\|f - \varphi_n\| < 1/n$ sur $[a,b]$. La suite (u_n) définie par $u_n = \int_a^b \varphi_n(t)\,dt$ est alors une suite de Cauchy dans E, donc convergente. Sa limite ne dépend pas du choix des fonctions en escaliers φ_n, on la note $\int_a^b f(t)\,dt$ (ou encore $\int_{[a,b]} f$) et on l'appelle *intégrale* de f.

Démonstration. Comme f est continue par morceaux, c'est une fonction réglée, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe bien une fonction en escalier φ_n vérifiant $\|f - \varphi_n\| < 1/n$ sur $[a,b]$ (voir la proposition 5 page 99). La suite (u_n) vérifie bien le critère de Cauchy car d'après la remarque 1, et comme $\|\varphi_p - \varphi_q\| \leq \|\varphi_p - f\| + \|f - \varphi_q\| \leq 1/p + 1/q$, on a

$$\forall p,q \in \mathbb{N}, p,q \geq n \qquad \|u_p - u_q\| = \|I(\varphi_p - \varphi_q)\| \leq I(\|\varphi_p - \varphi_q\|) \leq I(2/n) = 2(b-a)/n.$$

Comme E est complet par hypothèse (c'est un espace de Banach), la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite.

Unicité de la limite. Soit (ψ_n) une autre suite de fonctions en escalier vérifiant $\|f - \psi_n\| < 1/n$ sur $[a,b]$. On note ℓ' la limite de $v_n = I(\psi_n)$. L'inégalité

$$\|\psi_n - \varphi_n\| \leq \|\psi_n - f\| + \|f - \varphi_n\| \leq 2/n$$

entraîne

$$\forall n, \qquad \|v_n - u_n\| = \|I(\psi_n - \varphi_n)\| \leq I(\|\psi_n - \varphi_n\|) \leq I(2/n) = 2(b-a)/n$$

donc $\lim_{n\to\infty} \|u_n - v_n\| = 0$. Donc $\ell' = \ell$. □

Remarque 2. — Lorsque f est à valeurs réelles, on peut définir

$$I^-(f) = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{E} \\ \varphi \leq f}} I(\varphi) \quad \text{et} \quad I^+(f) = \inf_{\substack{\psi \in \mathcal{E} \\ \psi \geq f}} I(\psi),$$

où $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des fonctions en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Lorsque f est continue par morceaux, on a $I^-(f) = I^+(f)$, et cette valeur commune est un moyen équivalent de définir l'intégrale de f. La définition 4 permet de ne pas se limiter au cadre où $E = \mathbb{R}$ et donne une définition intrinsèque de l'intégrale sur tout e.v.n complet, en particulier sur $\mathbb{C}$ et sur tout e.v de dimension finie (voir la remarque 3).

— Lorsque f et g sont deux fonctions continues par morceaux qui diffèrent seulement en un nombre fini de points, leurs intégrales sont identiques.
— L'intégrale d'une fonction en escalier donnée par la définition 4 est cohérente avec celle donnée dans la définition 3.
— Lorsque $a > b$, on définit $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.
— La définition précédente s'étend facilement pour définir l'intégrale d'une fonction réglée. On peut de manière plus générale définir les fonctions *Riemann-intégrables*, qui sont les fonctions f telles que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver φ et μ en escalier telles que $\|f-\varphi\| < \mu$ et $I(\mu) < \varepsilon$. En faisant tendre ε vers 0, les valeurs $I(\varphi)$ convergent vers une valeur unique appelée intégrale de Riemann de f. Toute fonction continue par morceaux, toute fonction réglée, est Riemann-intégrable.

Proposition 1. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v.n de dimension finie (toujours avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f:\ [a,b] \to E$ une application. On peut écrire $f = \sum_{i=1}^n f_i\, e_i$ où pour tout i, l'application f_i prend ses valeurs dans $\mathbb{K}$. L'application f est continue par morceaux si et seulement si chacune des applications f_i est continue par morceaux et on a alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(x)\,dx\right) e_i.$$

Remarque 3. — En particulier, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-e.v dont $(1, i)$ est une base. L'application $f:\ [a,b] \to \mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $f = f_1 + i f_2$ (où f_1, f_2 sont à valeurs réelles) et on a $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + i\left(\int_a^b f_2(x)\,dx\right)$.
— On peut définir l'intégrale d'une fonction f à valeurs dans un $\mathbb{R}$-e.v de dimension finie E à partir de l'intégrale des fonctions à valeurs réelles, en procédant comme suit : on considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, on écrit $f = \sum_{i=1}^n f_i\, e_i$ où les f_i sont à valeurs réelles, et on pose $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(x)\,dx\right) e_i$. Il faut ensuite vérifier que cette définition ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie. L'avantage de la définition que nous avons adoptée (voir définition 4) est qu'elle est *intrinsèque* (*i. e* elle ne privilégie pas de base).

1.2. Propriétés des intégrales

Nous commençons par donner pêle-mêle les propriétés les plus élémentaires.
— *Relation de Chasles.* Soit $f:\ [a,b] \to E$ continue par morceaux et $c \in\,]a,b[$. On a $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.
— *Linéarité de l'intégrale.* L'ensemble $\mathcal{C}_m([a,b], E)$ des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ est un $\mathbb{K}$-e.v et l'application $\mathcal{C}_m([a,b]) \to E \quad \varphi \mapsto \int_a^b \varphi(x)\,dx$ est linéaire.
— *Positivité de l'intégrale.* Si $f, g:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et si $f \geq g$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$ (le cas de l'inégalité stricte est plus délicat ; voir la proposition 4).
— Si $\|\,.\,\|$ est une norme sur E, alors $\|\int_a^b f(x)\,dx\| \leq \int_a^b \|f(x)\|\,dx$.

Proposition 3. *Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de $[a,b]$ dans E qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction continue par morceaux f. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (*)$$

Remarque 4. Le théorème de convergence dominée (voir théorème 3 page 151) offre un cadre beaucoup plus commode pour obtenir la convergence d'intégrales d'une suite de fonctions, et c'est ce dernier que l'on utilise le plus souvent.

PROPOSITION 4. *Soient f et g : $[a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Si $f \geq g$ sur $[a,b]$ et s'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) > g(c)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$.*

Démonstration. On pose $\gamma = f(c) - g(c) > 0$. La continuité de $f - g$ en c entraîne l'existence d'un segment non réduit à un singleton $[\alpha, \beta]$ contenant c tel que $f(t) \geq g(t) + \gamma/2$ pour tout $t \in [\alpha, \beta]$. Ainsi,

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq \int_\alpha^\beta \left(g(x) + \frac{\gamma}{2}\right)\,dx = \int_\alpha^\beta g(x)\,dx + \frac{(\beta-\alpha)\gamma}{2} > \int_\alpha^\beta g(t)\,dt.$$

Comme $f \geq g$ sur $[a,b]$, on a par ailleurs

$$\int_a^\alpha f(x)\,dx \geq \int_a^\alpha g(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_\beta^b f(x)\,dx \geq \int_\beta^b g(x)\,dx.$$

On en déduit facilement le résultat avec la relation de Chasles. □

Normes et intégrales.

THÉORÈME 1 (INÉGALITÉ DE SCHWARZ). *Soient f, g : $[a,b] \to \mathbb{C}$ deux applications continues par morceaux. Alors*

$$\left|\int_a^b \overline{f(x)} g(x)\,dx\right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right) \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^2\,dx\right).$$

Si f et g sont continues et f non identiquement nulle, cette inégalité est une égalité si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $g(x) = \alpha f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.

Démonstration. Désignons par $\mathcal{C}_m([a,b])$ l'algèbre des fonctions continues par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$, et considérons la forme hermitienne positive $\Phi :\ \mathcal{C}_m([a,b]) \to \mathbb{R} \quad f \mapsto \int_a^b \overline{f(x)} f(x)\,dx$, dont la forme polaire est

$$\varphi :\ \mathcal{C}_m([a,b])^2 \to \mathbb{C} \quad (f,g) \mapsto \int_a^b \overline{f(x)} g(x)\,dx$$

(voir le tome Algèbre). L'inégalité de Schwarz appliquée à φ donne

$$\forall f, g \in \mathcal{C}_m([a,b]), \qquad |\varphi(f,g)|^2 \leq \Phi(f)\Phi(g),$$

d'où la première assertion du théorème. La restriction de Φ à l'e.v des fonctions continues sur $[a,b]$ est définie, et on sait alors que l'inégalité de Schwarz est une égalité si et seulement si f et g forment une famille liée, d'où la seconde assertion du théorème. □

Conséquence : Sur l'e.v $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ des fonctions continues sur $[a,b]$, les applications

$$N_1(f) = \int_a^b |f(t)|\,dt, \qquad N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,dt}, \qquad N_\infty(f) = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

sont des normes. L'inégalité de Schwarz entraîne que N_2 vérifie bien l'inégalité triangulaire ; la nullité de $N_1(f)$ ou $N_2(f)$ entraîne bien celle de f d'après la proposition 4.

(i) La norme N_1 s'appelle *norme de la convergence en moyenne.*

(ii) La norme N_2 s'appelle *norme de la convergence en moyenne quadratique.*

(iii) La norme N_∞ (encore notée $\|\cdot\|_\infty$) s'appelle *norme de la convergence uniforme.*

Ces normes vérifient les inégalités

$$N_1(f) \leq \sqrt{b-a}\ N_2(f) \leq (b-a)\|f\|_\infty.$$

Étude de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$.

→ THÉORÈME 2. *Soit* $f : [a,b] \to E$ *une fonction continue par morceaux sur* $[a,b]$*. Alors l'application* $F : [a,b] \to E \quad x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ *est* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux et continue sur* $[a,b]$*. De plus,* F *est dérivable à gauche et à droite en tout point* x *de* I*, et on a* $F'_g(x) = \lim_{\substack{t\to x\\ t<x}} f(t)$ *et* $F'_d(x) = \lim_{\substack{t\to x\\ t>x}} f(t)$*. En particulier, si* f *est continue sur* $[a,b]$ *alors* F *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a,b]$ *et* $F'(x) = f(x)$ *pour tout* $x \in [a,b]$*.*

COROLLAIRE 1. *Toute application continue* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *admet au moins une primitive* F*, et pour toute primitive* F *de* f*, on a* $\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F\Big]_a^b = F(b) - F(a)$*.*

C'est ce dernier résultat qui amène à rechercher des primitives d'une fonction pour calculer son intégrale. Ce problème sera étudié plus particulièrement dans la partie 2 de ce chapitre. En l'appliquant à $f = uv' + u'v$ dont la primitive est $F = uv$, on obtient le résultat qui suit.

→ THÉORÈME 3 (INTÉGRATION PAR PARTIES). *Soient* $u, v : [a,b] \to \mathbb{C}$ *deux fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$*. Alors*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u \cdot v\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Citons enfin un dernier résultat, particulièrement utilisé lors de calculs de primitives.

→ THÉORÈME 4 (CHANGEMENT DE VARIABLE). *Soit* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une application de classe* $\mathcal{C}^1$ *et* $f : I \subset \mathbb{R} \to E$ *une application continue par morceaux telle que* $\varphi([a,b]) \subset I$ *(où* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*). Alors*

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du.$$

Conséquence : En conjuguant le théorème du changement de variable avec la relation de Chasles, on obtient les résultats qui suivent.

- Soit f une application $f : [-a,a] \to E$ une continue par morceaux. Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$. Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.
- Soit $f : \mathbb{R} \to E$ une application continue par morceaux et T-périodique. Alors

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt.$$

Première et seconde formule de la moyenne.

THÉORÈME 5 (PREMIÈRE FORMULE DE LA MOYENNE). *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $g : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ *une fonction continue par morceaux et positive. Alors*

$$\exists c \in [a,b], \qquad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Démonstration. Posons $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. On a

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Si $\int_a^b g = 0$, l'inégalité précédente montre que $\int_a^b fg = 0$ et le résultat est évident. Sinon, on a $m \leq (\int_a^b fg)/(\int_a^b g) \leq M$ et on conclut en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue f. □

Remarque 5. Attention, la fonction g doit être positive.

Théorème 6 (Seconde formule de la moyenne). *Soit $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive décroissante de classe $\mathcal{C}^1$ et $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^c g(t)\,dt.$$

Démonstration. L'application $G: [a,b] \to \mathbb{R} \quad t \mapsto \int_a^t g(x)\,dx$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc continue sur $[a,b]$. Ceci assure l'existence des réels

$$m = \inf_{t\in[a,b]} G(t) \quad \text{et} \quad M = \sup_{t\in[a,b]} G(t).$$

Montrons $mf(a) \le \int_a^b f(t)g(t)\,dt \le Mf(a)$, ce qui prouvera le résultat en appliquant à G le théorème des valeurs intermédiaires. En intégrant par parties, on a

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \Big[G(t)f(t)\Big]_a^b - \int_a^b G(t)f'(t)\,dt = G(b)f(b) - \int_a^b G(t)f'(t)\,dt.$$

Or $mf(b) \le G(b)f(b) \le Mf(b)$ et

$$m\big(f(a)-f(b)\big) = -m\int_a^b f'(t)\,dt \le -\int_a^b G(t)f'(t)\,dt \le -M\int_a^b f'(t)\,dt = M\big(f(a)-f(b)\big),$$

donc finalement $mf(a) \le \int_a^b f(t)g(t)\,dt \le Mf(a)$. Ceci prouve le résultat en vertu de la continuité de G. □

Remarque 6. — Cette formule n'est pas au programme des classes préparatoires mais elle peut rendre de précieux services (par exemple pour démontrer la convergence de certaines intégrales semi-convergentes comme $\int_1^{+\infty} \sin(t)/t\,dt$; voir également la règle d'Abel formulée dans le théorème 5). Il faut savoir refaire sa démonstration qui est simple.

— Ce résultat reste vrai si on suppose uniquement f continue (voir l'exercice 8 page 135), et même si f et g sont uniquement supposées Riemann-intégrables.

1.3. Sommes de Riemann

Sommes de Riemann.

Notation. Soient $f: [a,b] \to E$ une application bornée, $\sigma: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ et $\xi = (\xi_i)_{1\le i\le n}$ une famille de n réels telle que $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$. Le couple (σ,ξ) s'appelle une *subdivision pointée*.

On appelle *somme de Riemann* de la fonction f pour la subdivision pointée (σ,ξ) la grandeur notée $S(f,\sigma,\xi)$ définie par

$$S(f,\sigma,\xi) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(\xi_i).$$

On rappelle que le *pas* de σ est le réel $\sup_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$, noté $|\sigma|$.

→ Théorème 7. *Soit une application $f: [a,b] \to E$ continue par morceaux. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour toute subdivision pointée (σ,ξ) de $[a,b]$ vérifiant $|\sigma| < \alpha$, on ait*

$$\left\|\int_a^b f(x)\,dx - S(f,\sigma,\xi)\right\| \le \varepsilon.$$

Démonstration. Nous allons prouver le résultat en trois étapes.
Étape 1. Supposons que f soit de la forme $f = \chi_{[c,d]}\cdot e$, où $\chi_{[c,d]}$ est la fonction caractéristique

d'un segment $[c,d]$ inclus dans $[a,b]$ et $e \in E$. Soit (σ,ξ) une subdivision pointée de $[a,b]$. Écrivons

$$\sigma : \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \qquad \xi = (\xi_i)_{1\le i\le n}.$$

On remarque que

$$S(f,\sigma,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i)\,dx \quad \text{donc} \quad \left\| S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f(x)\,dx \right\| \le \sum_{i=1}^{n} \left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(\xi_i) - f(x))\,dx \right\|.$$

Parmi les intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \le i \le n)$, il y en a au plus deux sur lesquels f ne soit pas constante. On en conclut facilement

$$\left\| S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f(x)\,dx \right\| \le 2|\sigma|\cdot\|e\|,$$

d'où le résultat.

Étape 2. Supposons que f soit une fonction en escalier. On peut écrire f comme une somme finie de fonctions du type de celles traitées dans l'étape 1, et le résultat s'obtient ensuite facilement par linéarité de l'intégrale et de l'application $f \mapsto S(f,\sigma,\xi)$.

Étape 3. Traitons maintenant le cas général. Soit $f : [a,b] \to E$ une fonction continue par morceaux. Soient $\varepsilon > 0$ et une fonction en escalier φ telle que $\|f - \varphi\| \le \varepsilon$ sur $[a,b]$. L'étape précédente nous assure l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que pour toute subdivision pointée (σ,ξ) vérifiant $|\sigma| < \alpha$, on ait

$$\left\| S(\varphi,\sigma,\xi) - \int_a^b \varphi(x)\,dx \right\| < \varepsilon,$$

Ainsi, pour une telle subdivision pointée (σ,ξ), on a

$$\begin{aligned}
&\left\| S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f(x)\,dx \right\| \\
&\quad \le \|S(f,\sigma,\xi) - S(\varphi,\sigma,\xi)\| + \left\| S(\varphi,\sigma,\xi) - \int_a^b \varphi(x)\,dx \right\| + \left\| \int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right\| \\
&\quad \le S(\|f-\varphi\|,\sigma,\xi) + \varepsilon + \int_a^b \|\varphi(x) - f(x)\|\,dx \\
&\quad \le (b-a)\varepsilon + \varepsilon + (b-a)\varepsilon = (1 + 2(b-a))\varepsilon.
\end{aligned}$$

d'où le théorème. □

Conséquence : Soit $f : [a,b] \to E$ une application continue par morceaux. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Exemple 1. En appliquant ce dernier résultat à $f : [0,1] \to \mathbb{R} \quad t \mapsto 1/(1+t)$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \Big[\log(1+t)\Big]_0^1 = \log 2.$$

Remarque 7. - Le théorème 7 est également vrai sur les fonctions Riemann-intégrables. Réciproquement, si E est un e.v.n de dimension finie, on peut même montrer qu'une fonction est Riemann-intégrable si et seulement si ses sommes de Riemann “convergent” lorsque le pas des subdivisions tend vers 0.

– Sous certaines hypothèses de régularité sur f, il est possible de donner un développement asymptotique de $\frac{b-a}{n}\sum_i f(a + i\frac{b-a}{n}) - \int_a^b f(x)\,dx$. Ceci est un problème classique qu'il est bon de savoir résoudre (voir l'exercice 6 et le sujet d'étude 3 page 321).

– Attention, le résultat de ce théorème n'est pas vrai pour les fonctions intégrables ou les intégrales généralisées, sauf sous certaines hypothèses (voir l'exercice 5 page 156 qui est classique).

1.4. Exercices

→ Exercice 1 (Intégrales de Wallis). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx.$$

a) Donner une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) En déduire la formule de Wallis
$$\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p} \left[\frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p-1)(2p-3)\cdots 1} \right]^2 = \pi,$$
puis montrer que lorsque $n \to +\infty$, $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Solution. **a)** En intégrant par parties, on a
$$\forall n \geq 2, \quad I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \, \sin x \, dx = \Big[-\sin^{n-1} x \, \cos x \Big]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, \cos^2 x \, dx$$
$$= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \quad \text{d'où} \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$
Comme $I_0 = \pi/2$ et $I_1 = \Big[-\cos x \Big]_0^{\pi/2} = 1$, on en déduit
$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{2p(2p-2)\cdots 2} \, \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 1}. \tag{$*$}$$
b) En remarquant que
$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad 0 \leq \sin^{2p+1} x \leq \sin^{2p} x \leq \sin^{2p-1} x,$$
on tire, par intégration
$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1} \quad \text{donc} \quad 1 \leq \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leq \frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p},$$
la dernière égalité étant une conséquence de (*). Par conséquent
$$\lim_{p \to +\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1$$
et on en déduit la formule de Wallis avec la formule (*).

De la formule de Wallis, on déduit
$$\frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{(2p)(2p-2)\cdots 2} \sim \frac{1}{\sqrt{p\pi}}$$
donc grâce à (*), on tire
$$I_{2p} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} \sim I_{2p} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$
On en déduit l'équivalent demandé.

Exercice 2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive et continue sur $[a,b]$.
a) Montrer que
$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_a^b f(t)^n \, dt \right)^{1/n} = M \quad \text{où} \quad M = \sup_{t \in [a,b]} f(t).$$