RAYMOND SMULLYAN

Le livre qui rend FOU

Des casse-têtes logiques à en perdre la raison !

Traduit de l'anglais (États-Unis)
par Jérôme Marthon

DUNOD

Traduction autorisée de l'ouvrage publié en langue anglaise
sous le titre *The lady or the tiger?* par Alfred Knopf, Inc.
Copyright © 1982 par Raymond Smullyan.

Maquette de couverture : Claire Morel-Fatio.
Maquette intérieure : Raphaël Tardif.

Relecture scientifique de la traduction : Guy Chouraqui.

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-079479-9

Sommaire

Première partie : Une princesse ou un tigre ?

1. Des blagues neuves ou vieilles 7
2. Une princesse ou un tigre ? 17
3. L'asile du Docteur Goudron et du Professeur Plume 33
4. Un voyage en Transylvanie 47

Deuxième partie : Jeux et métajeux

5. L'Île aux questions 63
6. L'Île aux rêves 75
7. Des métajeux 85

Troisième partie : Le mystère du coffre

8. Mystère à Monte-Carlo 97
9. Une machine à fabriquer des nombres 103
10. La loi de Craig 115
11. Les découvertes de Fergusson 131
12. Interlude : généralisons, généralisons ! 141
13. La combinaison gagnante 145

Quatrième partie : Soluble ou insoluble ?

14. La machine logique de Fergusson 155
15. Le démontrable et le vrai 165
16. Les machines qui parlent d'elles-mêmes 177
17. Les nombres immortels 189
18. La machine qui ne sera jamais construite 195
19. Le rêve de Leibniz 201

Les solutions sont regroupées à la fin de chaque chapitre.

Première partie

Une princesse ou un tigre ?

Des blagues neuves ou vieilles

Je voudrais commencer ce livre par une série de devinettes arithmétiques ou logiques ; certaines sont nouvelles et les autres bien connues.

1 Combien ?

Je suppose que nous possédons, vous et moi, autant d'argent l'un que l'autre.

Combien dois-je vous donner pour que vous ayez 10 € de plus que moi ? (*Les solutions sont à la fin de chaque chapitre*.)

2 Une énigme politique

Cent hommes politiques se réunissent pour constituer un nouveau parti. Chacun d'eux est soit un homme honnête, soit une franche canaille. Sachant que parmi eux :

(1) il y a au moins un homme honnête,

(2) si l'on en prend deux au hasard, il y en a toujours au moins un des deux qui est malhonnête.

Pouvez-vous en déduire combien sont honnêtes et combien sont des canailles ?

3 Du beaujolais nouveau dans une présentation qui ne l'est pas

Vous payez 10 € une bouteille de beaujolais. Le vin coûte 9 € de plus que la bouteille.

Combien vaut la bouteille ?

4 Quel est le bénéfice ?

Ce problème a ceci de curieux qu'il peut déclencher des bagarres. À chaque fois que j'ai vu deux personnes trouver des réponses différentes par des raisonnements différents, chacune était tellement persuadée d'avoir raison qu'elle était prête à employer les grands moyens pour faire triompher sa solution. Voici le problème :

Un libraire achète un livre 7 €, le vend 8 €, le rachète 9 € et le revend 10 €.

Quel est son bénéfice ?

5 Les minous et les toutous

Ce problème est facile à résoudre par l'algèbre, mais on peut s'en dispenser car il possède une solution reposant uniquement sur le bon sens. Inutile de dire qu'elle a ma préférence car elle est de loin la plus instructive.

Il faut 56 biscuits pour nourrir 10 animaux. Ces animaux sont des chats et des chiens. Un chien mange 6 biscuits et un chat n'en mange que 5. **Parmi ces animaux, combien sont des chiens et combien sont des chats ?**

Pour tout lecteur familier de l'algèbre la solution de ce problème est immédiate, mais on peut aussi le résoudre par élimination. En effet, le nombre de chats est compris entre 0 et 10 ; il suffit donc d'examiner un par un les 11 cas jusqu'à ce qu'on découvre le bon. Toutefois, si vous vous mettez à la place de celui qui nourrit les animaux, vous trouverez *une solution beaucoup plus astucieuse. Même si vous connaissez déjà la réponse je vous conseille de découvrir cette solution à la fin du chapitre.*

6 Les gros oiseaux et les petits oiseaux

Voici un autre problème qu'on peut résoudre par l'algèbre ou le bon sens mais là encore, je préfère le bon sens.

Un marchand d'oiseaux vend des gros et des petits oiseaux. Chacun des gros coûte deux fois le prix d'un petit. Une cliente achète cinq gros oiseaux et trois petits. Si, au lieu de cela, elle avait acheté trois gros oiseaux et cinq petits, elle aurait économisé 200 €.

Quel est le prix de chaque oiseau ?

7 Les inconvénients d'être étourdi

Voici une histoire vraie. Il est bien connu que dans tout groupe de 23 personnes la probabilité pour qu'il en existe deux parmi elles ayant leur anniversaire le même jour est supérieure à 50 %. Une année, j'ai donné un cours à l'Université dans lequel je faisais un peu de calcul des probabilités. Un jour où j'expliquais aux étudiants qu'avec 30 personnes au lieu de 23 les chances deviennent très grandes qu'il existe deux personnes ayant leur anniversaire le même jour, j'ajoutai : « au contraire, pour vous qui n'êtes que 19, les chances sont très inférieures à 50 % ». À ces mots, un des étudiants demanda la parole et dit : « Malgré ce que vous dites je vous parie qu'il y a au moins deux personnes dans la classe qui ont leurs anniversaires le même jour ! » « Les probabilités étant largement en ma faveur il n'est pas honnête que j'accepte un tel pari », lui objectai-je.

« Ça ne fait rien », répliqua l'étudiant.

« Très bien », fis-je avec un faux air de résignation. Persuadé de lui donner une bonne leçon, j'entrepris de faire l'appel pour demander les dates de naissance, mais, arrivé vers la moitié de la classe, je m'arrêtai, et nous éclatâmes tous de rire devant ma sottise.

Devinez-vous pourquoi ?

8 La droite et la gauche

Pendant de nombreuses années les opinions politiques des électeurs d'un certain village n'ont jamais varié ; des habitants votaient systématiquement à gauche et les autres toujours à droite. Un jour cependant, un électeur de droite décida de passer à gauche et ce soir-là il y eut dans le village autant de voix à gauche qu'à droite. Au deuxième tour des élections le mécontent décida de repasser à droite, entraînant avec lui un électeur de gauche, et depuis ce jour le village compte deux fois plus d'électeurs de droite que de gauche.

Combien le village a-t-il d'électeurs en tout ?

9 Une affaire de rubans

Trois amis, A, B, et C étaient d'excellents logiciens, et chacun savait que les autres l'étaient. L'art du raisonnement n'avait pas de secret pour eux et ils trouvaient instantanément toutes les énigmes. Un jour, pour les mettre à l'épreuve, on leur montra 7 rubans : 2 rouges, 2 jaunes et 3 verts, puis on leur banda les yeux. Pendant qu'ils étaient ainsi on fixa un ruban sur chacun de leurs chapeaux, puis on cacha les quatre rubans restants. Ensuite, après les avoir débarrassés de leurs bandeaux, on leur demanda : « Pouvez-vous dire de façon certaine une couleur qui ne soit pas celle de votre ruban ? » D'abord A répondit non, puis B dit non à son tour.

Sans en savoir plus, pouvez-vous retrouver la couleur des rubans de A, B, C ?

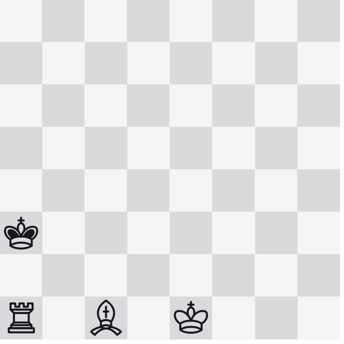
10 Pour ceux qui connaissent la marche des pièces aux échecs

J'aimerais attirer votre attention sur une variété fascinante de problèmes d'échecs qui, contrairement aux problèmes classiques du type : « Les Blancs jouent et gagnent en tant de coups », demandent d'analyser le passé de la partie. Dans ces problèmes la question est : « Comment a-t-on pu en arriver là ? »

Un soir, l'inspecteur Craig, de Scotland Yard[1] dont la passion pour ce genre de problèmes valait bien celle de Sherlock Holmes[2] entraîna un ami au Club d'échecs. Ils trouvèrent une partie abandonnée. Le compagnon de Craig remarqua :

« Ceux qui ont joué cette partie n'ont pas l'air de connaître les règles, car il est impossible d'arriver à cette position sans les violer ! »

« Pourquoi ? » demanda Craig.



C'est facile, répondit l'autre, les Noirs sont mis en échec à la fois par la tour blanche et par le fou blanc. Comment les Blancs ont-ils pu administrer un échec pareil ? Si c'est la tour qu'ils ont déplacée en dernier, le roi noir était déjà mis en en échec par le fou, et si c'est le fou, le roi était déjà mis en échec par la tour. Ça montre bien qu'on ne peut pas atteindre cette position ! »

Craig réfléchit un moment avant de répondre : « Je ne suis pas de votre avis. Je reconnais que cette position est très originale, mais elle n'est pas en contradiction avec les règles. »

Il avait parfaitement raison ! En dépit des apparences la position peut être atteinte, et l'on peut même préciser quel a été le dernier coup des Blancs.

1. Craig est un des personnages de mon livre : *Quel est le titre de ce livre ?* (Dunod).
2. Mon autre livre intitulé *Mystères sur échiquier avec Sherlock Holmes* (Dunod), contient de nombreux problèmes de ce genre.

Solutions !

1. *On répond souvent 10 €, mais c'est une erreur. Supposez par exemple que nous ayons chacun 50 €. Si je vous donnais 10 €, vous en auriez 60 et moi 40, soit 20 € de plus pour vous que pour moi, au lieu des 10 € demandés.*

La bonne réponse est 5 €.

2. *Le plus souvent, on répond que 50 politiciens sont honnêtes et 50 sont des canailles. Parfois aussi, 51 sont honnêtes et 49 ne le sont pas. Ces deux réponses sont également fausses ; voyons la bonne.*

On sait qu'un homme politique au moins est honnête ; mettons-en un de côté, qu'on appellera Francis pour fixer les idées. Prenons n'importe quel politicien parmi les 99 restants, disons Jean. D'après la seconde assertion, entre Francis et Jean, il y a au moins une canaille. Comme Francis est honnête, c'est Jean la canaille, ce qui signifie, puisque Jean est n'importe lequel parmi les 99 hommes politiques restants que les 99 sont tous malhonnêtes.

Il y a donc 99 canailles et un seul homme honnête.

On peut en donner une autre preuve. L'affirmation selon laquelle toute paire d'hommes politiques contient au moins une canaille signifie qu'il n'y en a jamais deux d'honnêtes, autrement dit, que parmi les 100, il y en a tout au plus un qui soit honnête. Comme il y en a effectivement un qui est honnête, d'après le premier renseignement, il y a exactement un politicien honnête.

Laquelle de ces deux démonstrations préférez-vous ?

3. *On répond souvent 1 €, mais c'est faux. Si la bouteille valait vraiment 1 €, le vin, qui coûte 9 € de plus, coûterait 10 €, et il faudrait payer 11 € pour emporter la bouteille de beaujolais, alors que vous ne payez que 10 €.*

La bonne réponse est 0,50 € pour la bouteille et 9,50 € pour le vin, ce qui met bien à 10 € la bouteille de beaujolais.

4. *Faisons un premier raisonnement. Après avoir acheté 7 € le livre et l'avoir vendu 8 €, le libraire a gagné 1 €. Ensuite, en le rachetant 9 € il a perdu 1 €. À ce moment son bénéfice est nul. Ensuite, en revendant le livre 10 €, il gagne à nouveau 1 €, et au total son bénéfice est de 1 €.*

Voici un autre raisonnement qui montre au contraire que le libraire n'a ni gagné ni perdu. Quand il revend 8 € le livre qu'il a payé 7 €, il gagne 1 €, mais il perd 2 € en rachetant 9 € ce qu'il avait payé 7 €, et par conséquent, à ce moment des opérations, il a un déficit de 1 €. En revendant le livre 10 € il rattrape ce déficit et met ses comptes en équilibre.

En fait, ces deux raisonnements sont faux, car le libraire a gagné 2 €. On peut le voir de plusieurs façons. Dans la première on commence par remarquer qu'il a gagné 1 € en revendant 8 € un livre acheté 7 €, puis on dit : « Supposons que le livre racheté 9 € pour être revendu 10 € ne soit pas le même que celui acheté 7 € pour être revendu 8 €. » D'un point de vue comptable est-ce que ça change quelque chose ? Bien sûr que non !

Le libraire gagne encore 1 € dans la seconde opération et au total son bénéfice est de 2 €.

Il y a une démonstration plus simple encore.

Le libraire a dépensé : 7 € + 9 € = 16 €, et il a encaissé : 8 € + 10 € = 18 €, ce qui fait un bénéfice de 2 €.

Pour ceux qui ne sont toujours pas convaincus, imaginons que le libraire avait 100 € le matin et qu'il n'a rien acheté ou vendu ce jour-là à part le fameux livre. Alors, combien a-t-il le soir dans sa caisse ? Après avoir acheté le livre 7 € il lui reste 93 €, puis, quand il le revend 8 € il possède 101 €. Ensuite, quand il rachète le livre 9 €, sa caisse ne contient plus que 920 €, et, puisqu'il le revend 10 €, il a 102 € à la fin de la journée, ce qui fait un bénéfice de 2 €.

Êtes-vous convaincu à présent ?

5. Voici ma solution. On commence par donner 5 biscuits à chacun des 10 animaux. Il reste 6 biscuits à distribuer, mais les chats ont déjà eu leur part ! **Les 6 biscuits restants sont pour les chiens, or chacun doit recevoir encore un biscuit ; il y a donc 6 chiens et 4 chats.**

On peut vérifier : 6 chiens mangeant chacun 6 biscuits, cela fait 36 biscuits, et 4 chats mangeant chacun 5 biscuits, cela fait 20 biscuits, soit un total de 56 biscuits, comme il se doit !

6. Puisque chaque gros oiseau coûte le prix de deux petits, 5 gros oiseaux coûtent le prix de 10 petits. Il en résulte que 5 gros oiseaux plus 3 petits coûtent le prix de 13 petits. D'autre part, 3 gros oiseaux plus 5 petits coûtent le prix de 11 petits. Ainsi, la différence entre l'achat de 5 gros oiseaux plus 3 petits, et l'achat de 3 gros oiseaux plus de 5 petits est le prix de 2 petits oiseaux.

Comme cette différence est de 200 €, chaque petit oiseau coûte 100 € et chaque gros 200 €.

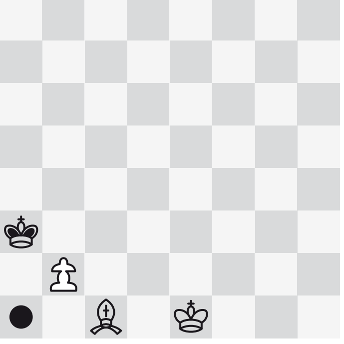
Vérifions : pour 5 gros oiseaux et 3 petits la cliente paye 1 300 € ; au contraire, pour l'achat de 3 gros oiseaux et 5 petits elle paye 1 100 €, soit 200 € de moins.

7. À l'instant où j'ai accepté le pari, j'avais oublié qu'il y avait des jumeaux dans la classe !

8. Il y a 12 électeurs et au début de l'histoire 7 votent à droite et 5 à gauche.

***9.* Le seul ruban dont on puisse déterminer la couleur est celui de C.** *En effet, si le ruban de C était rouge, B saurait que le sien n'est pas rouge, car il se dirait : « Si mon ruban est rouge, A voyant deux rubans rouges devrait répondre que le sien ne l'est pas ; comme il répond non, c'est que le mien n'est pas rouge. » Donc, si le ruban de C est rouge, B sait que le sien ne l'est pas ; comme il répond non, c'est que le ruban de C n'est pas rouge. De façon analogue, en remplaçant rouge par jaune, on démontre que le ruban de C n'est pas jaune ; par conséquent il est vert.*

10. *On ne sait pas d'où sont partis les Blancs. Il semble, à première vue, que ce soit du bas de l'échiquier mais, si c'était le cas, la position serait impossible ! En vérité, ils sont partis du haut de l'échiquier, et juste avant le dernier coup la position était la suivante :*



Le point, sur la case en bas à gauche, représente une pièce noire (une reine, une tour, un fou ou un cavalier, on ne sait pas quoi au juste). Le pion blanc a pris cette pièce noire et a été promu en une tour blanche, ce qui a donné la position actuelle. Bien sûr, on pourrait se demander pourquoi les Blancs ont échangé leur pion contre une tour plutôt qu'une reine, car il est vrai qu'un tel coup est hautement improbable ; mais il n'y a pas d'autre coup possible ! Comme Sherlock Holmes le faisait remarquer un jour à Watson : « Quand on a éliminé tout ce qui est impossible, ce qui reste, aussi improbable soit-il, ne peut être que la vérité. »