TERENCE TAO

Le cours d'analyse de TERENCE TAO

Traduit de l'anglais (États-Unis) par Frédéric Santos

DUNOD

L'édition originale de cet ouvrage a été publiée en deux tomes en anglais en 2014 puis en 2017 (version corrigée) par Hindustan Book Agency, New Delhi, Inde, sous le titre *Analysis I (Third edition) et Analysis II (Third edition)*.

Les éditions Dunod remercient Jean-Marie Monier, professeur de mathématiques en classes préparatoires au lycée La Martinière-Monplaisir (Lyon), pour sa relecture attentive de la traduction.

Graphisme de couverture : Pierre-André Gualino

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-083029-9

À mes parents, pour tout

Table des matières

Préface à la première édition

Ce manuel est issu des notes de cours de mon enseignement en analyse réelle au sein du parcours renforcé de premier cycle à l'Université de Californie, Los Angeles, en 2003. Parmi les étudiants de premier cycle, l'analyse réelle était considérée comme l'un des cours les plus difficiles à suivre, pas uniquement du fait des concepts abstraits qui y étaient introduits pour la première fois (par exemple, la topologie, les limites, la mesurabilité, etc.), mais aussi à cause du niveau de rigueur et de démonstration qu'exigeait ce cours. Du fait de cette difficulté perçue, un choix difficile se posait souvent entre le fait d'abaisser le niveau de rigueur du cours pour le rendre plus accessible, ou de maintenir une exigence élevée et d'affronter la perspective de voir beaucoup d'étudiants, y compris parmi les plus brillants et les plus enthousiastes, avoir des difficultés avec le contenu du cours.

Confronté à ce dilemme, j'ai tenté une approche quelque peu inhabituelle du sujet. Typiquement, un cours d'introduction à l'analyse réelle suppose que les étudiants sont déjà familiarisés avec les nombres réels, le principe de récurrence, le calcul élémentaire et les fondamentaux de la théorie des ensembles, puis plonge rapidement au cœur du sujet, par exemple le concept de limite. Normalement, les étudiants qui suivent ce cours ont en effet déjà rencontré ces notions considérées comme des prérequis, mais souvent de manière peu approfondie. Par exemple, très peu d'étudiants étaient capables de véritablement *définir* de manière rigoureuse un nombre réel, ou même un entier, cela même alors qu'ils pouvaient aisément se les représenter et les manipuler algébriquement. Cela me semblait être une opportunité manquée. L'analyse réelle est un des premiers sujets (avec l'algèbre linéaire et l'algèbre abstraite) qu'un étudiant rencontre, et dans lequel il devra se débattre avec les subtilités de la démonstration mathématique. En tant que tel, ce cours offrait une excellente occasion de revenir aux fondamentaux des mathématiques, et en particulier d'effectuer une construction correcte et approfondie des nombres réels.

Ainsi, le cours était structuré de la manière suivante. Dans la première semaine, je décrivais quelques uns des « paradoxes » bien connus en analyse, dans lesquels les lois standard (par exemple, l'interchangeabilité des limites et des sommes, ou des sommes et des intégrales) étaient appliquées de manière non rigoureuse et aboutissaient à des résultats absurdes, tels que $0 = 1$. Cela justifiait le besoin qu'il y avait de revenir au tout début du sujet, et même jusqu'à la définition des entiers naturels, et de parcourir l'ensemble des fondations en partant de là. Par exemple, l'un des premiers exercices donnés aux étudiants était de vérifier (en utilisant uniquement les axiomes de Peano) que l'addition est associative pour les entiers naturels (i.e., que $(a + b) + c = a + (b + c)$ pour tous les entiers naturels a, b, c ; voir l'Exercice 2.2.1). Ainsi, dès la première semaine, les étudiants devaient rédiger des démonstrations rigoureuses en utilisant le principe de récurrence. Après avoir prouvé toutes les propriétés basiques des entiers naturels, nous poursuivions par les entiers relatifs (initialement définis comme différences formelles entre deux entiers naturels) ; une fois que les étudiants avaient vérifié toutes les propriétés basiques des entiers relatifs, nous poursuivions par les rationnels (initialement définis comme quotients formels entre deux entiers relatifs) ; et de là nous aboutissions (via des limites formelles de suites de Cauchy) aux nombres réels. Dans le même temps, nous couvrions les bases de la théorie des ensembles, en démontrant par exemple que l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable. Alors seulement (après 10 cours environ), nous commencions à aborder ce que l'on considère usuellement comme le cœur de l'analyse réelle du premier cycle : les limites, la continuité, la dérivabilité, etc.

La réaction à ce format de cours a été assez intéressante. Dans les premières semaines, les étudiants trouvaient le contenu du cours très simple au niveau conceptuel, puisque nous ne discutions que des propriétés basiques des ensembles de nombres. Mais au niveau intellectuel il était pour eux très stimulant, puisque l'on analysait ces ensembles de nombres d'un point de vue fondateur, pour en déduire rigoureusement des faits plus avancés à leur sujet en partant des faits les plus élémentaires. Un étudiant m'a raconté combien il trouvait difficile d'expliquer à ses amis qui suivaient un cours d'analyse réelle classique, hors du parcours renforcé, (a) la raison pour laquelle il était encore en train d'apprendre pourquoi tous les nombres rationnels sont soit positifs, soit nuls, soit négatifs

(Exercice 4.2.4) alors que ses amis étaient déjà en train de discuter de séries absolument convergentes et conditionnellement convergentes, et (b) pourquoi, malgré cela, il trouvait que son travail étaient significativement plus difficile que celui de ses amis. Une autre étudiante m'a fait remarquer — plutôt ironiquement — que, tandis qu'elle pouvait évidemment *voir* pourquoi on pouvait toujours diviser un entier naturel n par un entier positif[1] q pour obtenir un quotient a et un reste r inférieur à q (Exercice 2.3.5), elle avait encore, à sa grande frustration, beaucoup de difficulté à en rédiger une démonstration. (Je lui ai répondu que plus tard dans le cours elle aurait à démontrer des énoncés pour lesquels elle n'aurait même pas l'intuition évidente qu'ils étaient vrais, ce qui ne l'a pas particulièrement consolée.) Toutefois, ces étudiants ont réellement apprécié leur travail, car lorsqu'ils persévéraient et obtenaient une démonstration rigoureuse d'un fait intuitif, cela solidifiait le lien dans leur esprit entre les manipulations abstraites des mathématiques formelles et leur intuition informelle des mathématiques (et du monde réel), souvent d'une manière très gratifiante. Ainsi, au moment où ils eurent à réaliser les tristement célèbres démonstrations « à la epsilon-delta » en analyse réelle, ils avaient déjà gagné tellement d'expérience pour formaliser leurs intuitions et discerner les subtilités de la logique mathématique (telle que la distinction entre les quantificateurs « pour tout » et « il existe ») que la transition vers ces preuves s'est faite sans encombre, et nous avons été capables de couvrir ces contenus de façon à la fois approfondie et rapide. Après la dixième semaine, nous avions rattrapé le parcours non-renforcé, et les étudiants commencèrent à vérifier la formule de changement de variable dans les intégrales de Riemann-Stieltjes, et à montrer que les fonctions continues par morceaux étaient Riemann-intégrables. À la fin du module, à la vingtième semaine, nous avions couvert (à la fois en cours magistral et lors de devoirs personnels) la théorie de la convergence des séries de Taylor et de Fourier, le théorème des fonctions implicites pour les fonctions continûment dérivables, et établi le théorème de convergence dominée pour l'intégrale de Lebesgue.

Pour couvrir autant de contenu, les démonstrations de beaucoup de résultats fondateurs ont été laissées aux étudiants comme exercices. En effet, c'était un aspect essentiel de ce cours, assurant que les étudiants s'appropriaient réellement les concepts au fur et à mesure de leur introduction. Ce format a été retenu dans le présent texte, où la majorité

1. Note du traducteur : « entier positif » s'entend ici au sens d'entier *strictement* positif.

des exercices consiste à prouver des lemmes, propositions et théorèmes du cours. Je ne saurais trop recommander au lecteur de faire autant d'exercices qu'il le pourra — y compris les exercices visant à prouver des énoncés « évidents » — s'il souhaite utiliser ce texte pour étudier l'analyse réelle, qui n'est pas un sujet dont un apprentissage passif permettrait d'appréhender toutes les subtilités. La plupart des sections de chaque chapitre disposent de plusieurs exercices, situés à la fin de la section.

Pour le mathématicien expert, le rythme du livre pourra sembler un peu lent, en particulier dans les premiers chapitres où l'on met lourdement l'accent sur la rigueur (sauf pour quelques discussions explicitement signalées comme étant informelles), et où l'on justifie de nombreuses étapes que l'on a usuellement tendance à considérer comme évidentes. Les premiers chapitres développent (en entrant douloureusement dans les détails) beaucoup des propriétés « évidentes » des ensembles de nombres, par exemple que la somme de deux réels positifs est encore positive (Exercice 5.4.1), ou qu'étant donnés deux réels distincts, on peut toujours trouver un nombre rationnel entre eux (Exercice 5.4.5). Dans ces chapitres fondateurs, l'accent est également mis sur la *non-circularité* — ne pas utiliser de résultats plus avancés pour en prouver de plus élémentaires, qui seraient introduits en premier. En particulier, les lois algébriques usuelles ne sont pas utilisées jusqu'à ce qu'elles soient prouvées (et elles doivent être prouvées séparément pour les entiers naturels, les entiers relatifs, les rationnels et les réels). La raison en est que cela permet aux étudiants d'apprendre l'art du raisonnement abstrait, de déduire des faits d'un nombre limité d'hypothèses, dans le cadre familier et intuitif des systèmes de nombres. La récompense de cet entraînement arrive plus tard, lorsqu'on doit utiliser le même type de techniques de raisonnement en étant confronté à des concepts plus avancés (par exemple, l'intégrale de Lebesgue).

Le présent texte est issu de mes notes de cours sur ce sujet, et est donc particulièrement marqué par une perspective pédagogique ; de nombreux résultats clés sont contenus dans des exercices, et à de nombreuses reprises j'ai choisi de donner des démonstrations longues et fastidieuses, mais instructives, plutôt que de courtes démonstrations abstraites. Dans des manuels plus avancés, l'étudiant pourra rencontrer des traitements plus succincts et conceptuellement plus cohérents de ces notions, et mettant davantage l'accent sur l'intuition que sur la rigueur. Toutefois, je pense qu'il est important de commencer par savoir comment faire de l'analyse rigoureusement et « à la main », pour véritablement apprécier l'approche plus moderne, intuitive et abstraite que l'on utilise dans le second cycle et au-delà.

La démarche employée dans ce livre met fortement l'accent sur la rigueur et le formalisme ; toutefois cela ne signifie pas nécessairement que des cours fondés sur ce livre doivent procéder de même. En effet, dans ma propre pratique d'enseignement, j'ai utilisé le temps des cours magistraux pour présenter l'intuition derrière les concepts (en dessinant beaucoup de figures informelles et en fournissant des exemples), donnant ainsi un point de vue complémentaire à la présentation formelle du texte. Les exercices laissés aux étudiants fournissent un pont essentiel entre les deux, encourageant l'étudiant à combiner l'intuition et la compréhension formelle pour répondre aux énoncés par des preuves correctes. C'est cela qui est, je pense, la tâche la plus difficile pour les étudiants, puisqu'elle nécessite que le sujet soit authentiquement *appris*, plutôt que superficiellement mémorisé ou vaguement absorbé. Toutefois, les retours que j'ai reçus de la part des étudiants montraient que ce travail, bien que très exigeant, était aussi très gratifiant, puisqu'il leur permettait de relier les manipulations plutôt abstraites des mathématiques formelles avec leurs intuitions innées sur des concepts aussi basiques que les nombres, les ensembles ou les fonctions. Bien sûr, l'aide d'un bon enseignant [2] est inestimable pour parvenir à réaliser cette connexion.

Pour ce qui est des examens clôturant un cours fondé sur ce manuel, je recommanderais ou bien une épreuve avec manuel et notes autorisés et des problèmes similaires aux exercices donnés dans ce texte (mais peut-être plus courts, et ne demandant aucune astuce inhabituelle), ou bien sous la forme de devoir à la maison qui proposerait des problèmes comparables aux exercices les plus complexes de ce texte. Le sujet de ce cours est trop vaste pour forcer les étudiants à mémoriser les définitions et les théorèmes, aussi, je déconseillerais des examens où les notes et manuels seraient bannis, ou des examens consistant à régurgiter des extraits du manuel. (En effet, pour mes propres examens, je fournissais une feuille supplémentaire rappelant les définitions et théorèmes clés correspondant aux exercices proposés.) Rendre l'examen similaire aux devoirs donnés aux étudiants durant le cours aidera également à les motiver à travailler et comprendre les problèmes qui leur sont proposés, de manière aussi approfondie que possible, ce qui est une bonne préparation non seulement pour les examens, mais plus généralement pour faire des mathématiques.

2. Note du traducteur : *teaching assistant* dans le texte, c'est-à-dire des étudiants diplômés du second cycle, employés comme attachés temporaires d'enseignement.

Une partie de la matière de ce manuel est en quelque sorte périphérique au thème principal, et peut être omise pour des raisons de contraintes de temps. Par exemple, la théorie des ensembles n'étant pas aussi fondamentale en analyse que peuvent l'être les systèmes de nombres, les chapitres sur la théorie des ensembles (Chapitres 3, 8) peuvent être parcourus plus rapidement et avec moins de rigueur, ou laissés aux soins des étudiants. Les annexes sur la logique et le système décimal sont fournies comme contenu supplémentaire ou optionnel, et pourraient probablement ne pas être couvertes lors des cours magistraux ; les annexes sur la logique sont particulièrement adaptées pour être lues parallèlement aux premiers chapitres. De même, le Chapitre 16 (sur les séries de Fourier) n'est nécessaire nulle part ailleurs dans le texte et peut être omis.

Pour des raisons de longueur, ce texte a été séparé en deux volumes [3]. Le premier volume est légèrement plus long, mais peut être couvert en environ trente cours si le contenu périphérique est omis ou abrégé. Le second volume se réfère parfois au premier, mais peut aussi être enseigné aux étudiants qui ont eu un premier cours en analyse à partir d'autres sources. Il peut également être couvert en environ trente cours.

Je suis profondément redevable à mes étudiants, qui tout au long du cours d'analyse réelle ont relevé plusieurs erreurs dans les notes de cours dont ce texte provient, et ont fourni de précieux retours. Je suis aussi très reconnaissant aux nombreux relecteurs anonymes qui ont fait plusieurs corrections et suggéré de nombreuses améliorations importantes. Je remercie aussi Biswaranjan Behera, Tai-Danae Bradley, Brian, Eduardo Buscicchio, Carlos, EO, Florian, Gökhan Güçlü, Evangelos Georgiadis, Ulrich Groh, Bart Kleijngeld, Erik Koelink, Wang Kuyyang, Matthis Lehmkühler, Percy Li, Ming Li, Jason M., Manoranjan Majji, Geoff Mess, Pieter Naaijkens, Vineet Nair, Cristina Pereyra, David Radnell, Tim Reijnders, Pieter Roffelsen, Luke Rogers, Marc Schoolderman, Kent Van Vels, Daan Wanrooy, Yandong Xiao, Sam Xu, Luqing Ye, et les étudiants des modules Math 401/501 et Math 402/502 à l'Université du Nouveau Mexique pour leurs corrections aux première et seconde éditions.

Terence Tao

3. Note du traducteur : la traduction française les a réunis en un unique volume. Le premier volume s'arrêtait au Chapitre 11 sur l'intégrale de Riemann.

Préface aux éditions ultérieures

Depuis la publication de la première édition, beaucoup d'étudiants et d'enseignants m'ont communiqué un certain nombre de coquilles et de corrections. Il y avait aussi une demande pour une édition reliée de ces cours. Tenant compte de cela, les éditeurs et moi-même avons décidé d'incorporer les corrections et de sortir une seconde édition reliée de ces manuels. La mise en page, la numérotation des pages et l'indexation des textes ont aussi été changées ; en particulier les deux volumes sont maintenant numérotés et indexés séparément. Toutefois, la numérotation des chapitres et des exercices, ainsi que le contenu mathématique, restent les mêmes que pour la première édition, de telle sorte que les deux éditions puissent être utilisées de manière plus ou moins interchangeable.

La troisième édition contient un certain nombre de corrections qui ont été rapportées depuis la seconde édition, ainsi que quelques nouveaux exercices, mais reste essentiellement le même texte.

Note du traducteur

Le présent ouvrage a été traduit à partir de la troisième édition originale corrigée, en tenant également compte de tous les errata connus [4] pour cette édition en date du 10 mars 2022.

En mathématiques, certaines conventions de notation, voire de définition, peuvent varier d'un pays à l'autre. Le parti pris étant d'offrir une traduction fidèle du texte de Terence Tao, toutes les conventions originelles — qui reflètent logiquement les usages américains — ont été conservées dans la version française. Cela ne gênera sans doute guère le lecteur (ou, bien sûr, la lectrice) s'il est, par exemple, un ingénieur déjà en activité. En revanche, pour les étudiants, l'utilisation à l'identique de certaines conventions ou notations rencontrées dans ce cours, lorsqu'elles diffèrent trop de l'usage français majoritaire, pourrait donner lieu à des ambiguïtés sur des copies d'examen ou de concours. Signalons ici les différences principales, afin d'aider le lecteur à utiliser, dans certains contextes, des équivalents français plus classiques.

— Lorsque l'on parle en français de « nombre positif », on entend généralement un nombre *positif ou nul*. En revanche, dans ce livre, l'expression « nombre positif » désignera toujours un nombre *strictement* positif ; cette convention est établie dès le Chapitre 2 (voir la Remarque 2.1.2 ou la Définition 2.2.7). Cette remarque s'applique aux entiers naturels ou relatifs, ainsi qu'aux nombres rationnels ou réels, ou même à l'expression « fonction à valeurs positives ». Bien sûr, une convention similaire s'applique aux nombres négatifs.

4. Les errata pour l'édition originale sont référencés par Terence Tao sur son blog, à l'adresse `https://terrytao.wordpress.com/books/analysis-i/`.

— La différence entre deux ensembles A et B sera généralement notée $A - B$ dans ce cours, plutôt que $A \backslash B$ (cette dernière notation étant beaucoup plus standard en France). Toutefois, les deux notations cohabitent, et sont toutes deux introduites dans la Définition 3.1.26.

— Dans la définition du concept de fonction (Définition 3.3.1), le domaine est parfois appelé « ensemble de départ » ou « source » dans d'autres manuels en langue française, et le codomaine est bien plus souvent appelé « ensemble d'arrivée » ou « but ».

— Le terme de *supremum*, d'un usage peu fréquent dans les manuels français, sera ici employé comme un synonyme de *borne supérieure* (voir la Définition 5.5.10). De même pour *infimum* et *borne inférieure.*

— Lorsque le contexte est clair et qu'il n'y a aucune confusion possible, $+\infty$ est ici souvent noté plus simplement ∞. Ce dernier symbole est d'un usage plus rare en France, et n'est pas universellement accepté.

— La Section 6.2 présente le système des *nombres réels étendus*, qui y est noté $\mathbf{R}^*$. En France, on parle plus souvent de *droite réelle achevée*, notée $\overline{\mathbf{R}}$ (avec une possibilité supplémentaire de confusion : la notation $\mathbf{R}^*$ désigne plutôt sous nos latitudes l'ensemble $\mathbf{R} \backslash \{0\}$).

— Dans la Définition 6.4.6, ne pas confondre la notation a_N^+, relative à une suite réelle, avec la notation x^+ désignant parfois en France la partie positive d'un réel x.

— Même si les deux appellations cohabiteront dans ce cours, il est plus courant en France de parler d'ensembles « non dénombrables » plutôt que d'ensembles « indénombrables » (Définition 8.1.1).

— La notion de suites équivalentes présentée dans la Définition 9.9.5 et le Lemme 9.9.7 diffère de la définition que l'on peut trouver dans la plupart des manuels français, qui dit essentiellement que deux suites $(a_n)_{n=0}^\infty$ et $(b_n)_{n=0}^\infty$ sont équivalentes si $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$. Le lecteur (ou la lectrice) se convaincra qu'il n'y a aucun lien d'implication entre ces deux notions de suites équivalentes.

— Les intervalles ouverts, toujours notés $]a, b[$ en France, sont ici notés (a, b). De même, ce qui serait habituellement noté $[0, +\infty[$ en France est ici noté $[0, +\infty)$ ou $[0, \infty)$, la parenthèse ayant dans ce contexte toujours le sens d'un crochet ouvrant. En particulier, voir la Définition 9.1.1 et la Remarque 9.1.2.

— Les crochets de variation d'une fonction F, habituellement notés $[F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$ en France, sont ici notés $F(x)|_{x=a}^{x=b}$. Cette convention est utilisée dès le Chapitre 1 ; voir l'Exemple 1.2.6.

— Le Chapitre 11 présente la version *non signée* de l'intégrale de Riemann. Dans les cours d'analyse de lycée ou de première année de licence, une des premières propriétés de l'intégrale définie à être énoncée est celle de symétrie : $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$; il s'agit là de l'intégrale *signée*. Au contraire, avec la définition donnée au Chapitre 11, si $a < b$, on aura $\int_{[b,a]} f = \int_{\emptyset} f = 0$, et non $\int_{[b,a]} f = -\int_{[a,b]} f$. Terence Tao a consacré une note à ce sujet, intitulée *Differential forms and integration*, que vous trouverez aisément grâce à votre moteur de recherche favori.

— À compter du Chapitre 13, la notion de voisinage, lorsqu'elle n'est suivie d'aucune précision, correspond par défaut à la notion de voisinage *ouvert*, ce qui n'est généralement pas le cas en France. Voir la Définition 13.5.2.

— Dans la Définition 16.2.1 présentant le produit scalaire sur l'espace des fonctions continues $\mathbf{Z}$-périodiques à valeurs complexes, $\langle f, g \rangle := \int_{[0,1]} f\,\overline{g}$, l'opération de conjugaison s'applique au *second* facteur, contrairement à l'usage majoritaire en France où l'on conjugue plutôt le premier facteur.

— La Définition 16.3.7 d'une transformée de Fourier diffère de celle que l'on peut trouver dans la plupart des manuels français.

— En France, la définition d'une contraction correspond plutôt à ce qui est appelé *contraction stricte* dans la Définition 17.6.1.

— Enfin, on trouvera à différents endroits du livre l'expression (peut-être abusive en français) « la limite diverge », traduite littéralement du texte d'origine. Une formulation plus standard en français serait « la limite n'existe pas ». La première instance se trouve au niveau de l'Exemple 1.2.12.

Enfin, conformément à un usage répandu, notons que le symbole $\square$ signale dans ce cours la fin d'une démonstration.

Je remercie Jean-Marie Monier pour sa relecture attentive de la présente traduction. Si des coquilles devaient encore subsister, n'hésitez pas à me les signaler (`frederic.santos@u-bordeaux.fr`).

Frédéric Santos

Chapitre 1

Introduction

1.1 Qu'est-ce que l'analyse ?

Ce manuel est une introduction de niveau premier cycle à *l'analyse réelle* : l'analyse des nombres réels, des suites et des séries de nombres réels, et des fonctions à valeurs réelles. Ceci est lié à, mais distinct de, *l'analyse complexe*, qui concerne l'analyse des nombres complexes et des fonctions complexes, *l'analyse harmonique*, qui concerne l'analyse des harmoniques (signaux) telles que les signaux sinusoïdaux, et comment ils synthétisent d'autres fonctions via la transformée de Fourier, *l'analyse fonctionnelle*, qui se concentre beaucoup plus sur les fonctions (et sur la structure des espaces de fonctions), etc. L'*analyse* est l'étude rigoureuse de tels objets, en mettant l'accent sur la tentative de cerner précisément leur comportement qualitatif et quantitatif. L'analyse réelle est le fondement théorique qui sous-tend le *calcul infinitésimal*, la collection d'algorithmes de calcul que l'on utilise pour manipuler des fonctions.

Dans ce cours, nous étudierons de nombreux objets qui vous sont déjà familiers : nombres, suites, séries, limites, fonctions, intégrales définies, dérivées, etc. Vous savez déjà bien *calculer* avec ces objets ; cependant, ici, nous nous concentrerons davantage sur la théorie sous-jacente. Nous nous intéresserons à des questions telles que :

1. Qu'est-ce qu'un nombre réel ? Existe-t-il un plus grand nombre réel ? Après 0, quel est le « prochain » nombre réel (i.e., quel est le plus petit nombre réel positif) ? Peut-on couper un nombre réel en morceaux une infinité de fois ? Pourquoi un nombre tel que 2 a-t-il une racine carrée, alors qu'un nombre tel que -2 n'en a pas ? S'il existe une infinité de réels et une infinité de rationnels, comment se fait-il qu'il y ait « plus » de nombres réels que de nombres rationnels ?

2. Comment prendre la limite d'une suite de nombres réels ? Quelles suites ont des limites et lesquelles n'en ont pas ? Si l'on peut empêcher une suite de s'échapper vers l'infini, cela signifie-t-il qu'elle doit, au bout d'un certain temps, se stabiliser et converger ? Peut-on additionner une infinité de nombres réels ensemble et obtenir encore un nombre réel fini ? Peut-on additionner une infinité de nombres rationnels et aboutir à un nombre non rationnel ? Si l'on réorganise les éléments d'une somme infinie, la somme reste-t-elle la même ?
3. Qu'est-ce qu'une fonction ? Que signifie pour une fonction le fait d'être continue ? dérivable ? intégrable ? bornée ? Peut-on additionner une infinité de fonctions ensemble ? Comment prendre la limite d'une suite de fonctions ? Peut-on dériver une série infinie de fonctions ? Et l'intégrer ? Si une fonction $f(x)$ prend la valeur 3 quand $x = 0$ et la valeur 5 quand $x = 1$ (i.e., $f(0) = 3$ et $f(1) = 5$), doit-elle prendre toutes les valeurs intermédiaires entre 3 et 5 lorsque x parcourt l'intervalle de 0 à 1 ? Pourquoi ?

Vous savez peut-être déjà comment répondre à certaines de ces questions grâce à vos cours précédents, mais il est probable que ce genre de problèmes n'y était que d'une importance secondaire ; l'accent était plutôt mis sur le fait de vous faire effectuer des calculs, tels que le calcul de l'intégrale de $x \sin(x^2)$ de $x = 0$ à $x = 1$. Mais maintenant que vous êtes à l'aise avec ces objets et savez déjà faire tous les calculs, nous allons revenir à la théorie et essayer de *vraiment* comprendre ce qui se passe.

1.2 Pourquoi faire de l'analyse ?

C'est une bonne question à poser lorsque l'on aborde l'analyse : « pourquoi s'embêter ? ». Il y a une certaine satisfaction philosophique à savoir *pourquoi* les choses fonctionnent, mais une personne pragmatique pourrait prétendre qu'il suffit de savoir *comment* les choses fonctionnent pour résoudre les problèmes de la vie réelle. La formation que vous avez reçue dans vos cours d'introduction à l'analyse est certainement adéquate pour vous permettre de commencer à résoudre de nombreux problèmes en physique, chimie, biologie, économie, informatique, finance, ingénierie ou tout autre domaine d'application — et vous savez peut-être déjà utiliser des choses comme la règle de la chaîne pour la dérivation, la règle de L'Hôpital ou l'intégration par parties, sans savoir pourquoi ces règles fonctionnent, ni s'il y a des exceptions à ces règles.

Toutefois, on peut avoir des ennuis si l'on applique des règles sans savoir d'où elles viennent ni quelles sont les limites de leur applicabilité. Donnons ci-dessous quelques exemples dans lesquels plusieurs de ces règles familières, si elles sont appliquées aveuglément sans connaître la théorie sous-jacente en analyse, peuvent conduire au désastre.

Exemple 1.2.1 (Division par zéro)**.** Ceci vous est très familier : la règle de simplification $ac = bc \implies a = b$ ne fonctionne pas lorsque $c = 0$. Par exemple, l'identité $1 \times 0 = 2 \times 0$ est vraie, mais si on simplifie aveuglément par 0, on obtient alors $1 = 2$, ce qui est faux. Dans ce cas, il était évident que l'on divisait par zéro ; mais dans d'autres cas, cela peut être plus caché.

Exemple 1.2.2 (Séries divergentes)**.** Vous avez probablement déjà rencontré des séries géométriques telles que la somme infinie

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots .$$

Vous avez aussi probablement vu l'astuce suivante pour calculer la somme de cette série : si l'on appelle S la somme ci-dessus, alors si l'on multiplie par 2 des deux côtés, on obtient

$$2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2 + S$$

et donc $S = 2$; la somme de cette série est de 2. Toutefois, si l'on applique la même astuce à la série

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

on obtient un résultat absurde :

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = S - 1 \implies S = -1.$$

Ainsi, le même raisonnement qui montre que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$, donne aussi que $1 + 2 + 4 + 8 + \dots = -1$. Pourquoi faisons-nous confiance à la première égalité mais pas à la seconde ? Un exemple similaire se produit avec la série

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots ;$$

on peut écrire

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - S$$

et donc $S = 1/2$; mais on peut aussi écrire

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + \ldots$$

et donc $S = 0$; et on peut encore écrire

$$S = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \ldots = 1 + 0 + 0 + \ldots$$

et donc $S = 1$. Quel est le résultat correct ? (Voir l'Exercice 7.2.1 pour une réponse.)

Exemple 1.2.3 (Suites divergentes)**.** Voici une variante de l'exemple précédent. Soit x un nombre réel, et soit L la limite

$$L = \lim_{n\to\infty} x^n.$$

En effectuant le changement de variables $n = m + 1$, on a

$$L = \lim_{m+1\to\infty} x^{m+1} = \lim_{m+1\to\infty} x \times x^m = x \lim_{m+1\to\infty} x^m.$$

Mais si $m + 1 \to \infty$, alors $m \to \infty$, et

$$\lim_{m+1\to\infty} x^m = \lim_{m\to\infty} x^m = \lim_{n\to\infty} x^n = L,$$

et finalement

$$xL = L.$$

À ce stade, nous pourrions simplifier par L et conclure que $x = 1$ pour tout nombre réel arbitraire x, ce qui est absurde. Mais comme nous sommes déjà conscients du problème de division par zéro, nous pourrions être un peu plus rigoureux en concluant plutôt que nous avons soit $x = 1$, soit $L = 0$. En particulier, nous semblons avoir montré que

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \text{ pour tout } x \neq 1.$$

Mais cette conclusion est absurde si on l'applique à certaines valeurs de x : par exemple en considérant le cas $x = 2$ on pourrait conclure que la suite $1, 2, 4, 8, \ldots$ converge vers zéro, et en considérant le cas $x = -1$ on pourrait conclure que la suite $1, -1, 1, -1, \ldots$ converge également vers zéro. Ces conclusions semblent absurdes : où est l'erreur dans le raisonnement ci-dessus ? (Voir l'Exercice 6.3.4 pour une réponse.)

Exemple 1.2.4 (Limites de fonctions)**.** Commençons avec avec l'expression $\lim_{x\to\infty} \sin(x)$, puis effectuons le changement de variable $x = y+\pi$. En se rappelant que $\sin(y+\pi) = -\sin(y)$, on obtient

$$\lim_{x\to\infty} \sin(x) = \lim_{y+\pi\to\infty} \sin(y+\pi) = \lim_{y\to\infty} (-\sin(y)) = -\lim_{y\to\infty} \sin(y).$$

Puisque $\lim_{x\to\infty} \sin(x) = \lim_{y\to\infty} \sin(y)$, on a :

$$\lim_{x\to\infty} \sin(x) = -\lim_{x\to\infty} \sin(x)$$

et donc

$$\lim_{x\to\infty} \sin(x) = 0.$$

En effectuant le changement de variable $x = \pi/2 + z$ et en utilisant le fait que $\sin(\pi/2 + z) = \cos(z)$, on conclut que

$$\lim_{x\to\infty} \cos(x) = 0.$$

En prenant le carré de ces deux limites puis en les ajoutant, on obtient

$$\lim_{x\to\infty} (\sin^2(x) + \cos^2(x)) = 0^2 + 0^2 = 0.$$

Mais d'autre part, on a $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ pour tout x. Nous avons donc montré que 1 et 0 sont égaux ! Où est l'erreur de raisonnement ?

Exemple 1.2.5 (Interversion de sommes)**.** Considérons le fait suivant en arithmétique. Soit une matrice quelconque de nombres, par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

et calculons les sommes de toutes les lignes et les sommes de toutes les colonnes, ainsi que leurs totaux respectifs. Dans les deux cas, on obtiendra le même nombre — la somme totale de toutes les valeurs de la matrice :

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 6 \\ 15 \\ 24 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 12 & 15 & 18 \end{array} & 45 \end{array}$$

En d'autres termes, si l'on souhaite additionner toutes les valeurs d'une matrice de taille $m \times n$, peu importe que l'on additionne d'abord les lignes ou d'abord les colonnes, on obtient le même total dans les deux cas.

(Avant l'invention des ordinateurs, les comptables utilisaient ce fait pour éviter de commettre des erreurs en tenant leurs comptes.) En utilisant la notation des séries, ce fait s'exprimerait sous la forme

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij},$$

où a_{ij} désigne l'élément dans la ligne i et la colonne j de la matrice.

On pourrait alors penser que cette règle devrait s'étendre facilement aux séries infinies :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

En effet, si vous utilisez beaucoup les séries infinies dans votre travail, vous vous retrouverez assez souvent à devoir intervertir des sommes comme celles-ci. Une autre façon d'exprimer ce résultat serait de dire que dans une matrice infinie, la somme des totaux des lignes doit être égale à la somme des totaux des colonnes. Cependant, malgré le caractère apparemment raisonnable de cette affirmation, elle est en réalité fausse ! Voici un contre-exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Si vous additionnez dans chaque ligne, puis additionnez tous les totaux de lignes, vous obtiendrez 1 ; mais si vous additionnez dans chaque colonne et additionnez tous les totaux des colonnes, vous obtiendrez 0 ! Cela signifie-t-il alors que, dans le cas de séries infinies, les sommes ne devraient jamais être interverties, et que tout raisonnement utilisant une telle interversion devrait être banni ? (Voir le Théorème 8.2.2 pour une réponse.)

Exemple 1.2.6 (Interversion d'intégrales)**.** L'interversion d'intégrales est une technique aussi couramment utilisée en mathématiques que l'interversion de sommes. Supposons que l'on veuille calculer le volume sous une surface $z = f(x, y)$ (ne tenons pas compte pour le moment des conditions d'intégration). On peut le faire en découpant parallèlement à l'axe des x : pour chaque valeur donnée de y, on peut calculer une aire $\int f(x,y)\ dx$, puis intégrer l'aire par rapport à la variable y pour obtenir le volume

$$V = \int \int f(x,y)dxdy.$$

On pourrait aussi découper parallèlement à l'axe des y pour chaque x donné, calculer une aire $\int f(x,y)\ dy$, puis intégrer par rapport à la variable x pour obtenir

$$V = \int \int f(x,y)dydx.$$

Cela semble suggérer que l'on devrait toujours pouvoir intervertir des intégrales :

$$\int \int f(x,y)\ dxdy = \int \int f(x,y)\ dydx.$$

Et en effet, on est souvent amené à intervertir des signes « intégrale » car l'une des deux variables est peut-être plus facile à intégrer en premier que l'autre. Toutefois, tout comme dans le cas des sommes infinies, il est parfois dangereux d'intervertir des intégrales. Donnons un exemple avec l'intégrande $e^{-xy} - xye^{-xy}$. Si l'on suppose que l'on peut intervertir les intégrales, on a

$$\int_0^\infty \int_0^1 (e^{-xy} - xye^{-xy})\ dy\ dx = \int_0^1 \int_0^\infty (e^{-xy} - xye^{-xy})\ dx\ dy. \quad (1.1)$$

Puisque

$$\int_0^1 (e^{-xy} - xye^{-xy})\ dy = ye^{-xy}|_{y=0}^{y=1} = e^{-x},$$

le membre de gauche de (1.1) est $\int_0^\infty e^{-x}\ dx = -e^{-x}|_0^\infty = 1$. Mais puisque

$$\int_0^\infty (e^{-xy} - xye^{-xy})\ dx = xe^{-xy}|_{x=0}^{x=\infty} = 0,$$

le membre de droite de (1.1) est $\int_0^1 0\ dx = 0$. Clairement, $1 \neq 0$: il y a donc une erreur quelque part. Mais vous n'en trouverez nulle part, sauf à l'étape où l'on a interverti les intégrales. Alors, comment savons-nous à quel moment nous pouvons légitimement procéder à une interversion d'intégrales ? (Voir le Théorème 19.5.1 pour une réponse partielle.)

Exemple 1.2.7 (Interversion de limites)**.** Supposons que l'on démarre avec l'affirmation suivante, qui peut sembler plausible :

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}. \tag{1.2}$$

Mais on sait que

$$\lim_{y\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{x^2+0^2}=1,$$

de telle sorte que le membre de gauche de (1.2) est égal à 1 ; et d'autre part,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}=\frac{0^2}{0^2+y^2}=0,$$

de telle sorte que le membre de droite de (1.2) est égal à 0. Puisque 1 n'est clairement pas égal à zéro, cela suggère que l'interversion de deux limites ne peut pas être réalisée aveuglément. Mais existe-t-il des circonstances dans lesquelles cela serait légitime ? (Voir l'Exercice 13.2.9 pour une réponse partielle.)

Exemple 1.2.8 (Interversion de limites, encore)**.** Considérons l'affirmation suivante, qui peut sembler plausible :

$$\lim_{x\to 1^-}\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1^-}x^n$$

où la notation $x\to 1^-$ signifie que x tend vers 1 depuis la gauche. Lorsque x est à gauche de 1, on a $\lim_{n\to\infty}x^n=0$, et le membre de gauche est donc égal à zéro. Mais on a aussi $\lim_{x\to 1^-}x^n=1$ pour tout n, et la limite du membre de droite est donc égale à 1. Cela démontre-t-il que ce type d'échange de deux limites est toujours illicite ? (Voir la Proposition 14.3.3 pour une réponse.)

Exemple 1.2.9 (Interversion de limites et d'intégrales)**.** Pour tout nombre réel y, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+(x-y)^2}\,dx=\arctan(x-y)\big|_{x=-\infty}^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$

En passant à la limite lorsque $y\to\infty$, on devrait obtenir

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{y\to\infty}\frac{1}{1+(x-y)^2}\,dx=\lim_{y\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+(x-y)^2}\,dx=\pi.$$