RAMIS/DESCHAMPS/ODOUX

Cours de mathématiques

5. applications de l'analyse à la géométrie

Edmond Ramis
Inspecteur général de l'Instruction Publique

Claude Deschamps
Professeur de Mathématiques Spéciales au lycée Louis-le-Grand

Jacques Odoux
Professeur de Mathématiques Spéciales au lycée Champollion, à Grenoble

DUNOD

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-085112-6

TABLE DES MATIÈRES

AVERTISSEMENT

Le présent ouvrage est le cinquième et dernier tome d'un Cours de mathématiques *écrit à l'intention des élèves des classes de* Mathématiques Supérieures *et de* Mathématiques Spéciales *(types M, M' ; P, P' et T).*

• *Conscients de ce qu'un cours de mathématiques peut s'organiser de bien des façons, et désireux de respecter le choix des professeurs — auxquels nous n'avons, naturellement, pas l'intention de nous substituer — nous avons groupé dans chacun des cinq tomes un ensemble cohérent.*

Les deux premiers sont consacrés à l'Algèbre *et à ses applications à la* Géométrie. *L'*Analyse *fait l'objet des tomes 3 et 4. Le dernier tome traite des* Applications de l'Analyse à la Géométrie.

• *Dans les dernières éditions de nos quatre premiers tomes, nous avons pu, sans grande difficulté, nous aligner sur les actuels programmes des classes préparatoires (C.P.), lesquels ne présentent d'ailleurs qu'assez peu de différences avec leurs prédécesseurs.*

Toute autre a été la difficulté en ce qui concerne les Applications de l'Analyse à la Géométrie, les nouveaux programmes marquant en la matière une tendance très nette à une plus grande modestie.

Dans le désir de conserver à notre Cours le caractère d'ouvrage de référence qu'ont bien voulu lui reconnaître un certain nombre d'utilisateurs, nous avons cependant cru devoir conserver dans le tome 5 :

— d'une part les compléments de mathématiques qui rendent l'ouvrage utilisable par les étudiants des universités et par les candidats aux concours de recrutement des professeurs;

— d'autre part les deux chapitres concernant les applications des mathématiques aux autres disciplines scientifiques. C'est ainsi que le futur physicien trouvera au chapitre 5 une étude assez détaillée de l'analyse vectorielle et des théorèmes fondamentaux de Stokes et d'Ostrogradski.

Il va de soi que, chaque fois que cela a été nécessaire nous avons précisé qu'une question dépassait les limites des programmes des C.P.

• *Dans tout le Cours, nous avons apporté le plus grand soin au choix des notations. La terminologie utilisée est celle des programmes et de leurs commentaires.*

• *Afin de nous adapter aux exigences des divers utilisateurs de notre ouvrage, nous avons utilisé deux corps de caractères, les plus petits étant consacrés :*

– *d'une part à des remarques, exemples et contre-exemples qui doivent être considérés comme formant un tout avec le texte imprimé en caractères normaux,*

– *d'autre part à des compléments réservés à une « seconde lecture ».*

• *Nous avons utilisé le signe* $\square$, *qui peut se lire : « la proposition en résulte » pour matérialiser la fin d'une démonstration et annoncer l'introduction d'une idée nouvelle.*

• *Le double astérisque,* $^{*} \ldots {}_{*}$, *permet d'isoler un résultat faisant intervenir des notions qui n'ont pas encore été étudiées dans le Cours, mais qui sont connues du lecteur (à charge pour celui-ci de s'assurer qu'il n'y a pas de cercle vicieux).*

• *Le système de repérage est simple : le numéro de tome est indiqué en chiffres romains, ceux du chapitre, du sous-chapitre et du paragraphe en chiffres arabes. C'est ainsi que I.***5***.6.2 renvoie au second paragraphe du sixième sous-chapitre du cinquième chapitre du tome I, (le numéro de tome n'est pas mentionné lorsqu'il n'y a pas ambiguïté).*

Des exercices sont adjoints à chaque chapitre. Bien qu'ils soient de difficulté inégale, nous n'avons pas jugé bon de les repérer par des lettres avertissant le lecteur de leur difficulté croissante. En principe, les plus faciles sont en tête de chaque série.

*
* *

Les collaborateurs de Masson S.A. *ont consenti pour la mise au point de notre ouvrage un effort dont nous sentons le prix ; nous sommes heureux de les en remercier.*

Les Auteurs

1
ÉTUDE AFFINE DES ARCS

1.1. COMPLÉMENTS DE TOPOLOGIE

1.1.*1*. Topologie finale

1° Théorème et définition. — **Soient $(E, \mathscr{T})$ un espace topologique, F un ensemble, et $\varphi : E \to F$ une application. Alors $\mathscr{T}_\varphi = \{U \in \mathscr{P}(F) | \varphi^{-1}(U) \in \mathscr{T}\}$ est une topologie sur F. C'est la plus fine** (¹) **parmi les topologies sur F qui rendent φ continue. On l'appelle** *topologie finale* **associée à φ.**

— De $\varphi^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ et $\varphi^{-1}(F) = E$, on déduit : $\varnothing \in \mathscr{T}_\varphi$ et $F \in \mathscr{T}_\varphi$.
D'autre part, pour toutes parties U et V de F et pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ de parties de F, on a :

$$\varphi^{-1}(U) \cap \varphi^{-1}(V) = \varphi^{-1}(U \cap V); \qquad \bigcup_{i\in I} \varphi^{-1}(U_i) = \varphi^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right).$$

On en déduit aisément que $\mathscr{T}_\varphi$ est une topologie sur F.
— Pour toute topologie sur F, $\mathscr{T}'$, φ est une application continue de $(E, \mathscr{T})$ dans $(F, \mathscr{T}')$ si, et seulement si : $\forall U \in \mathscr{T}' \;\; \varphi^{-1}(U) \in \mathscr{T}$, ce qui s'écrit : $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}_\varphi$. □

Remarques. — *a*) D'après $\varphi^{-1}(F \setminus A) = E \setminus \varphi^{-1}(A)$, une partie A de F est fermée dans $(F, \mathscr{T}_\varphi)$ si, et seulement si la partie $\varphi^{-1}(A)$ de E est fermée dans $(E, \mathscr{T})$.

b) Toute partie de F incluse dans $F \setminus \varphi(E)$ est ouverte dans $(F, \mathscr{T}_\varphi)$. La topologie induite par $\mathscr{T}_\varphi$ sur $F \setminus \varphi(E)$ est donc la topologie discrète. *Dans la pratique, nous n'utiliserons que des applications φ surjectives.*

c) La définition de la topologie finale que nous avons adoptée n'est pas la plus générale.

2° Théorème. — **Soient $(E, \mathscr{T})$ un espace topologique, F un ensemble et φ une application de E dans F. Alors pour toute application g de $(F, \mathscr{T}_\varphi)$ dans un espace topologique $(G, \mathscr{T}')$, g est continue si, et seulement si l'application $g \circ \varphi$ de $(E, \mathscr{T})$ dans $(G, \mathscr{T}')$ est continue.**

— Si g est continue, comme φ est continue, $g \circ \varphi$ l'est aussi.
— Inversement supposons que $g \circ \varphi$ est continue. Pour tout $U' \in \mathscr{T}'$, nous avons $(g \circ \varphi)^{-1}(U') \in \mathscr{T}$, ce qui s'écrit $\varphi^{-1}[g^{-1}(U')] \in \mathscr{T}$ et entraîne $g^{-1}(U') \in \mathscr{T}_\varphi$; g est ainsi continue. □

(¹) Étant données deux topologies $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ sur un même ensemble F, on dit que $\mathscr{T}_1$ est plus fine que $\mathscr{T}_2$ si, et seulement si $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1$ (au sens de l'inclusion dans $\mathscr{P}(F)$).

REMARQUE. — Le lecteur vérifiera que $\mathscr{T}_\varphi$ est la seule topologie sur F vérifiant la propriété qui fait l'objet du théorème précédent.

3° ***Topologie quotient.*** — DÉFINITION. — **Soient $(E, \mathscr{T})$ un espace topologique, $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E et φ la surjection canonique de E sur $E/\mathscr{R}$. La topologie finale $\mathscr{T}_\varphi$ est appelée** *topologie quotient* **de $\mathscr{T}$ par $\mathscr{R}$; $(E/\mathscr{R}, \mathscr{T}_\varphi)$ est dit** *espace topologique quotient de $(E, \mathscr{T})$ par $\mathscr{R}$.*

EXEMPLE. — Nous appellerons *topologie usuelle du groupe* $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ la topologie quotient de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$. Par transport de structure, nous en déduirons une topologie sur le groupe des angles (II, **2**.3.*4*).

Vérifions qu'avec les notations de la définition précédente nous avons :

PROPOSITION. — **Pour que $(E/\mathscr{R}, \mathscr{T}_\varphi)$ soit séparé, il est nécessaire que le graphe Γ de $\mathscr{R}$ soit fermé dans l'espace topologique $(E, \mathscr{T})^2$. C'est suffisant lorsque l'image par φ de tout ouvert de $(E, \mathscr{T})$ est un ouvert de $(E/\mathscr{R}, \mathscr{T}_\varphi)$ ce que l'on exprime en disant que** *la relation $\mathscr{R}$ est ouverte.*

— Supposons que $E/\mathscr{R}$ est séparé. D'après la proposition III du III.**2**.1.*5*, la diagonale Δ de $(E/\mathscr{R})^2$ est un fermé de $(E/\mathscr{R})^2$. Or Γ n'est autre que $\Phi^{-1}(\Delta)$, où Φ est l'application $(x, y) \longmapsto (\varphi(x), \varphi(y))$ de E^2 dans $(E/\mathscr{R})^2$, dont la continuité résulte de celle de φ ; Γ est ainsi un fermé de E^2.

— Inversement, supposons que Γ est un fermé de E^2 et que la relation $\mathscr{R}$ est ouverte. Soient X et Y des éléments distincts de $E/\mathscr{R}$; il existe des représentants x et y de X et Y, et on a $x \neq y$; (x, y) est un élément de $E^2 \backslash \Gamma$, qui est un ouvert de E^2. Il existe donc deux ouverts U et V de E, contenant respectivement x et y, tels que l'ouvert élémentaire $U \times V$ soit disjoint de Γ. $\mathscr{R}$ étant ouverte, $\varphi(U)$ et $\varphi(V)$ sont des ouverts de $E/\mathscr{R}$ contenant respectivement X et Y ; ces ouverts sont disjoints, sans quoi il existerait $(x', y') \in U \times V$ tel que $\varphi(x') = \varphi(y')$, ce qui impliquerait $(x', y') \in \Gamma$, et, donc, une contradiction. On en déduit que $E/\mathscr{R}$ est séparé. □

EXEMPLE. — *Montrons que $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, muni de la topologie usuelle, est séparé.*

Ici $\mathscr{R}$ est définie par « $x \mathscr{R} y$ signifie $y - x \in 2\pi\mathbb{Z}$ ». Γ est la réunion des droites d'équations $y = x + 2m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$) ; le lecteur vérifiera que Γ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. D'autre part $\mathscr{R}$ est ouverte ; en effet soit X un ouvert de $\mathbb{R}$; pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $X + 2m\pi$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ (image d'un ouvert par un homéomorphisme) ; $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} (X + 2m\pi)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ qui s'écrit $\varphi^{-1}(\varphi(X))$, avec $\varphi(X) = \varphi\left(\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} (X + 2m\pi)\right)$. $\varphi(X)$ est donc un ouvert de $E/\mathscr{R}$. □

Complément sur la décomposition canonique d'une application continue. — Soient E et F deux espaces topologiques, et $f : E \to F$ une application continue. En désignant par $\mathscr{R}$ la relation d'équivalence sur E définie par « $x \mathscr{R} y$ signifie $f(x) = f(y)$ », on dispose (I, **1**.3.*3*, 4°) de la décomposition canonique $f = j \circ \bar{f} \circ \varphi$, schématisée par le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle j} \\ E/\mathscr{R} & \xrightarrow{\bar{f}} & f(E) \end{array}$$

φ : surjection canonique

j : injection canonique

$\bar{f}$: bijection

D'après le théorème du 2°, la continuité de f implique celle de $j \circ \bar{f}$, et donc (III, **2**.2.*4*, 4°) celle de $\bar{f}$. Mais, en général, on ne peut pas affirmer que $\bar{f}$ est un homéomorphisme.

EXEMPLE. — *Soient* $U = \{z \in \mathbb{C} \| z| = 1\}$ *et* f *l'application continue et surjective* $t \longmapsto e^{it}$ *de* $\mathbb{R}$ *sur* U. *On obtient par passage au quotient un isomorphisme de groupes* $\bar{f} : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to U$.

D'après ce qui précède $\bar{f}$ est continue. Ici on peut montrer que $\bar{f}$ est un homéomorphisme. En effet $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, qui est séparé (cf. exemple précédent), est compact comme image de $[0, 2\pi]$ par la surjection canonique φ, qui est continue. On termine la démonstration en utilisant III.**2**.5.*1*, 6°.

□

1.1.*2*. Espace topologique des droites d'un e.v.n.

Dans ce paragraphe $(E, \|.\|)$ désigne un $\mathbb{R}$-e.v.n. non nul. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des droites (vectorielles) de E, φ l'application $x \longmapsto \mathbb{R}x$ de $E \backslash \{0\}$ dans $\mathscr{D}$, ψ la restriction de φ à la sphère unité, S, de E.

E est muni de la topologie de la norme; $E \backslash \{0\}$ et S sont munis des topologies induites.

1° THÉORÈME ET NOTATION. — **Sur $\mathscr{D}$, les topologies finales $\mathscr{T}_\varphi$ et $\mathscr{T}_\psi$ sont égales; on les note $\mathscr{T}$.**

— L'injection canonique $j : S \to E \backslash \{0\}$ est continue; $\psi = \varphi \circ j$ est donc une application continue de S dans $(\mathscr{D}, \mathscr{T}_\varphi)$; comme $\mathscr{T}_\psi$ est la plus fine parmi les topologies sur $\mathscr{D}$ qui rendent ψ continue, on a $\mathscr{T}_\varphi \subset \mathscr{T}_\psi$.

— L'application $x \longmapsto \|x\|^{-1}x$ de $E \backslash \{0\}$ dans S, notée θ, est continue; $\varphi = \psi \circ \theta$ est donc une application continue de $E \backslash \{0\}$ dans $(\mathscr{D}, \mathscr{T}_\psi)$; en raisonnant comme ci-dessus, on en déduit $\mathscr{T}_\psi \subset \mathscr{T}_\varphi$. □

REMARQUES. — *a*) La propriété fondamentale est la continuité de l'application φ de $E \backslash \{0\}$ dans $(\mathscr{D}, \mathscr{T})$. En d'autres termes : *l'application qui à un vecteur non nul associe la droite vectorielle qu'il engendre est continue.*

b) Concrètement, pour toute $U \subset \mathscr{D}$, $\psi^{-1}(U)$ est la trace sur la sphère S du cône de E réunion des éléments de U (fig. 1); on peut ainsi se faire une idée intuitive des ouverts de $(\mathscr{D}, \mathscr{T})$.

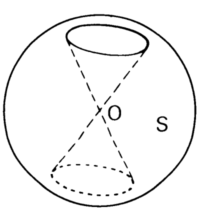

FIG. 1.

2° THÉORÈME. — **L'espace topologique $(\mathscr{D}, \mathscr{T})$ est métrisable (et donc séparé).**

Pour toute droite $D \in \mathscr{D}$, $D \cap S = \psi^{-1}(D)$ est constitué de deux éléments opposés de S. Pour tout $(D, D') \in \mathscr{D}^2$, nous disposons donc de :

$$d(D, D') = \min \{\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|, \mathbf{v} \in D \cap S, \quad \mathbf{v}' \in D' \cap S\}$$

et nous pouvons écrire $d(D, D') = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}'\|$, où $\mathbf{u} \in D \cap S$ est arbitrairement choisi (fig. 2) et où $\mathbf{u}'$ est alors déterminé sans ambiguïté, au moins si $d(D, D') < 1$ (ainsi qu'on le constate en utilisant l'inégalité triangulaire). Il va de soi qu'on peut choisir tout aussi bien $\mathbf{u}' \in D' \cap S$.

α) *Montrons que l'application $d : \mathscr{D}^2 \to \mathbb{R}_+$ ainsi définie est une distance.*

– Il est évident que :

$$\forall (D, D') \in \mathscr{D}^2 \qquad d(D, D') = d(D', D) \quad \text{et :} \quad \forall D \in \mathscr{D} \qquad d(D, D) = 0.$$

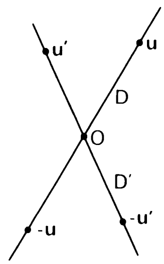

FIG. 2.

– Soit $(D, D') \in \mathscr{D}^2$ tel que $d(D, D') = 0$; les ensembles $D \cap S$ et $D' \cap S$ ont un élément commun, ce qui exige $D = D'$.

– Soit $(D, D', D'') \in \mathscr{D}^3$. Écrivons :

$$d(D, D') = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}'\| \qquad \text{et} \qquad d(D', D'') = \|\mathbf{u}' - \mathbf{u}''\|$$

en usant de la possibilité de choisir le même $\mathbf{u}' \in D' \cap S$ dans les deux égalités, étant entendu que $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}''$ appartiennent respectivement à $D \cap S$ et $D'' \cap S$. On en déduit :

$$d(D, D'') \leqslant \|\mathbf{u} - \mathbf{u}''\| \leqslant d(D, D') + d(D', D''). \qquad \square$$

β) *Soit $\mathscr{T}_d$ la topologie induite sur $\mathscr{D}$ par la distance d. Montrons : $\mathscr{T}_d = \mathscr{T}_\psi$.*

Dans le schéma : $S \xrightarrow{\psi} (\mathscr{D}, \mathscr{T}_\psi) \xrightarrow{Id_{\mathscr{D}}} (\mathscr{D}, \mathscr{T}_d)$, l'application $\mathrm{Id}_{\mathscr{D}} \circ \psi$ est continue; en effet :

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in S^2, \qquad d(\psi(\mathbf{u}), \psi(\mathbf{v})) \leqslant \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Il en résulte (**1.1**.*1*, 2°) que $\mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$ est continue, et donc que $\mathscr{T}_d \subset \mathscr{T}_\psi$.

– Inversement, soit $U \in \mathscr{T}_\psi$. Donnons-nous $D_0 \in U$ et $\mathbf{u}_0 \in \psi^{-1}(D_0)$; $\mathbf{u}_0$ étant un élément de l'ouvert $\psi^{-1}(U)$ de S, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ tel que :

$$\forall \mathbf{u} \in S \quad (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| < \alpha) \Rightarrow (\mathbf{u} \in \psi^{-1}(U)).$$

A toute droite $D \in \mathscr{D}$ telle que $d(D_0, D) < \alpha$, on peut associer $\mathbf{v} \in D \cap S$ tel que $d(D_0, D) = \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}\|$; on a ainsi $\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}\| < \alpha$, et donc $\mathbf{v} \in \psi^{-1}(U)$, ce qui entraîne $D \in U$. On en déduit $U \in \mathscr{T}_d$ pour tout $U \in \mathscr{T}_\psi$, et donc $\mathscr{T}_\psi \subset \mathscr{T}_d$. $\square$

Cas particulier où E est préhilbertien. — Soit $(D, D') \in \mathscr{D}^2$. Désignons par θ, avec $\theta \in [0, \pi/2]$, l'écart angulaire des droites D et D'. Pour tous $\mathbf{u} \in \psi^{-1}(D)$ et $\mathbf{u}' \in \psi^{-1}(D')$, l'écart angulaire λ des vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$ vérifie $\lambda = \theta$ ou $\lambda = \pi - \theta$. En utilisant :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}'\|^2 = 2(1 - \cos\lambda) = 4\sin^2 \lambda/2,$$

on obtient : $d(D, D') = 2\min(\sin\theta/2, \cos\theta/2)$ et, comme $\theta/2 \in [0, \pi/4]$:

$$d(D, D') = 2\sin\theta/2.$$

3° ***Changement de norme.*** — Si l'on remplace $\|.\|$ par une norme équivalente N, la topologie de la norme sur E n'est pas changée. Il en résulte que *la topologie $\mathscr{T}$ introduite sur $\mathscr{D}$ au* 1° *n'est pas changée* et donc que *la distance d introduite sur $\mathscr{D}$ au* 2° *est remplacée par une distance δ topologiquement équivalente.*

Montrons qu'en fait les distances d et δ sont équivalentes.

Par hypothèse :

$$(\exists(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+\backslash\{0\})^2)\ (\forall \mathbf{x} \in E \quad \alpha N(\mathbf{x}) \leqslant \|\mathbf{x}\| \leqslant \beta N(\mathbf{x})).$$

Soit $(D, D') \in \mathscr{D}^2$. Notant Σ la sphère unité de (E, N), écrivons :

$$\delta(D, D') = N(\mathbf{u} - \mathbf{u}'), \text{ avec } \mathbf{u} \in D \cap \Sigma \text{ et } \mathbf{u}' \in D' \cap \Sigma.$$

Comme $\mathbf{u} \neq 0$ et $\mathbf{u}' \neq 0$, nous disposons de $\dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \in D \cap S$ et $\dfrac{\mathbf{u}'}{\|\mathbf{u}'\|} \in D' \cap S$, ce qui permet d'écrire :

$$d(D, D') \leqslant \left\|\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} - \frac{\mathbf{u}'}{\|\mathbf{u}'\|}\right\| = \left\|\frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}'}{\|\mathbf{u}\|} + \left(\frac{1}{\|\mathbf{u}\|} - \frac{1}{\|\mathbf{u}'\|}\right)\mathbf{u}'\right\|$$

et :

$$d(D, D') \leqslant \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}'\|}{\|\mathbf{u}\|} + \frac{|\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{u}'\||}{\|\mathbf{u}\|} \leqslant 2\frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}'\|}{\|\mathbf{u}\|}.$$

Compte tenu de $\|\mathbf{u}\| \geqslant \alpha N(\mathbf{u})$ et $N(\mathbf{u}) = 1$, on en déduit :

$$d(D, D') \leqslant 2\beta/\alpha . N(\mathbf{u} - \mathbf{u}') = 2\beta/\alpha . \delta(D, D')$$

En intervertissant le rôle des normes : $\delta(D, D') \leqslant 2\beta/\alpha . d(D, D')$. □

4° Cas où E est de dimension finie. — *a)* **On peut parler de la topologie de l'ensemble $\mathscr{D}$ des droites d'un e.v.n. de dimension finie, sans autre précision.**

En effet, ici toutes les normes sur E sont équivalentes. □

b) **Si E est de dimension finie, $(\mathscr{D}, \mathscr{T})$ est compact.**

En effet S est ici un compact de E et $\mathscr{D}$ en est l'image par $\varphi : E\backslash\{0\} \to (\mathscr{D}, \mathscr{T})$, qui est continue. □

5° ***Un résultat important.*** — Nous ne faisons pas d'hypothèse sur dim E.

THÉORÈME. — **Soient D un élément de $\mathscr{D}$, Λ un espace topologique, A une partie de Λ, a un point de $\bar{A}$, Δ une application de A dans $\mathscr{D}$. Il y a équivalence entre les deux assertions :**

i) $D = \lim\limits_{t \to a,\, t \in A} \Delta(t)$;

ii) Il existe une application u de A dans $E \backslash \{0\}$ vérifiant à la fois :

$$\begin{cases} \alpha) \quad \forall t \in A \qquad \mathbf{u}(t) \in \Delta(t) \backslash \{0\} \\ \beta) \quad \exists \mathbf{v} \in D \backslash \{0\} \qquad \lim\limits_{t \to a,\, t \in A} \mathbf{u}(t) = \mathbf{v}. \end{cases}$$

Preuve de ii) $\Rightarrow$ i). — L'hypothèse est ii); α) permet d'écrire $\Delta = \varphi \circ \mathbf{u}$; on conclut à l'aide de III.**2**.2.*3*, 2°, *b*), en utilisant β) et la continuité de φ.$\square$

Preuve de i) $\Rightarrow$ ii). — L'hypothèse est i). Elle implique l'existence d'un voisinage U de a dans Λ tel que :

$$\forall t \in U \cap A \qquad d(D, \Delta(t)) < 1.$$

Ayant choisi arbitrairement $\mathbf{v} \in D \cap S$, on en déduit qu'à tout $t \in U \cap A$ on peut associer un unique élément de $\Delta(t) \cap S$, noté $\mathbf{u}(t)$, tel que : $d(D, \Delta(t)) = \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}\|$. On choisit arbitrairement la restriction de $\mathbf{u}$ à $A \backslash U$, et on constate que l'application $\mathbf{u}$ ainsi construite vérifie α) et β). $\square$

REMARQUE. — On peut supposer que $\mathbf{u}$ vérifie : $\forall t \in A \quad \|\mathbf{u}(t)\| = 1$.

6° *Complément.* — On suppose ici que E est un plan vectoriel euclidien, rapporté à une base $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$. A tout réel ω on associe le vecteur :

$$\mathbf{u}_\omega = \cos \omega \mathbf{i} + \sin \omega \mathbf{j}.$$

Les notations étant celles du théorème du 5°, avec $D = \mathbb{R}\mathbf{u}_{\theta_0}$ où $\theta_0 \in \mathbb{R}$ est donné :

PROPOSITION. — **Pour que $D = \lim\limits_{t \to a,\, t \in A} \Delta(t)$, il faut et il suffit qu'il existe une application θ de A dans $\mathbb{R}$ vérifiant à la fois :**

i) $\forall t \in A \quad \mathbf{u}_{\theta(t)} \in \Delta(t)$;

ii) $\lim\limits_{t \to a,\, t \in A} \theta(t) = \theta_0$.

— La condition est suffisante d'après le théorème du 5° et la continuité de $\omega \longmapsto \mathbf{u}_\omega$.

— Inversement supposons $\lim\limits_{t \to a,\, t \in A} \Delta(t) = \mathbb{R}\mathbf{u}_{\theta_0}$, et considérons, comme dans la démonstration du 5°, le vecteur $\mathbf{u}(t)$ tel que $d(D, \Delta(t)) = \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_{\theta_0}\|$.

Nous constatons que $\mathbf{u}(t)$ peut s'écrire $\mathbf{u}_{\theta(t)}$, avec $\theta(t) - \theta_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; d'où (cf. 2°) :

$$\theta(t) - \theta_0 = 2 \operatorname{Arc} \sin \left(\frac{1}{2} d(D, \Delta(t))\right), \quad \text{et} \quad \lim_{t \to a,\, t \in A} \theta(t) = \theta_0. \qquad \square$$

• THÉORÈME. — **Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément de $\overline{I}$, θ une application continue de I dans $\mathbb{R}$; pour $t \in I$, on pose $\Delta(t) = \mathbb{R}\mathbf{u}_{\theta(t)}$. Alors :**

$$\lim_{t \to t_0,\, t \in I} \Delta(t) \ \textbf{existe si et seulement si} \ \lim_{t \to t_0,\, t \in I} \theta(t) \ \textbf{existe (dans } \mathbb{R}\textbf{)}.$$

— La condition est suffisante d'après la proposition précédente.

— Inversement supposons que $\lim_{t \to t_0} \Delta(t)$ existe et notons la $\mathbb{R}\mathbf{u}_{\theta_0}$. D'après la proposition précédente, il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ vérifiant à la fois :

$$(1) \quad \forall t \in I \quad u_{\varphi(t)} \in \Delta(t); \qquad \lim_{t \to t_0} \varphi(t) = \theta_0 \quad (2)$$

Il existe donc $k : I \to \mathbb{Z}$, telle que :

$$\forall t \in I \qquad \theta(t) = \varphi(t) + \pi k(t) \qquad (3)$$

D'après (2), il existe (critère de Cauchy) un intervalle $V \in \mathscr{V}(t_0)$ tel que, W désignant $V \cap I$:

$$\forall (t', t'') \in W^2 \qquad |\varphi(t') - \varphi(t'')| < \pi/4.$$

Soit $(t', t'') \in W^2$. Faisons l'hypothèse :

$$(H) \quad k(t') \neq k(t''), \qquad \text{et donc} \qquad |k(t') - k(t'')| \geqslant 1.$$

Il en résulte :

$$|\theta(t') - \theta(t'')| \geqslant \pi |k(t') - k(t'')| - |\varphi(t') - \varphi(t'')| \geqslant \pi - \frac{\pi}{4}$$

La continuité de θ sur $[t', t'']$ assure alors l'existence de $\tau \in W$ tel que :

$$|\theta(\tau) - \theta(t')| = \pi/2.$$

On en déduit :

$$\frac{\pi}{2} - |\varphi(\tau) - \varphi(t')| \leqslant \pi |k(\tau) - k(t')| \leqslant \frac{\pi}{2} + |\varphi(\tau) - \varphi(t')|$$

et donc : $$1/4 \leqslant |k(\tau) - k(t')| \leqslant 3/4$$

ce qui est en contradiction avec $k(\tau) - k(t') \in \mathbb{Z}$. (H) est donc absurde.

Ainsi $k(t') = k(t'')$ pour tout $(t', t'') \in W^2$; l'application k est constante sur W et admet donc une limite en t_0 ; d'après (2) et (3), il en est de même pour θ.

$\square$

REMARQUES. — *a*) L'hypothèse de continuité de θ est essentielle dans le théorème. C'est ainsi que si $\theta(t) = \pi E(t)$, où E est la partie entière, alors $\Delta(t)$, qui est $\mathbb{R}\mathbf{i}$, admet une limite lorsque t tend vers $+\infty$, alors que $\theta(t)$ n'admet pas de limite.

b) La notion de valeur d'adhérence d'une application fournit une démonstration plus simple du théorème.

1.1.3. Grassmanniennes

Les démonstrations pourront être réservées pour une seconde lecture.

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$. Toutes les normes sur E étant équivalentes, nous pouvons munir E de sa *topologie naturelle* (celle qui est définie par l'une quelconque des normes).

1° DÉFINITION. — **Pour tout $p \in \mathbb{N}_n$, on note L_p l'ensemble des systèmes libres de p vecteurs de E, muni de la topologie induite par la topologie produit sur E^p, et on appelle** *grassmannienne d'ordre p de E* **l'espace topologique $(\mathscr{G}_p, \mathscr{T}_p)$, où $\mathscr{G}_p$ est l'ensemble des sous espaces de dimension p de E, et où $\mathscr{T}_p$ est la topologie finale associée à l'application surjective :**

$$\varphi_p : L_p \to \mathscr{G}_p \qquad (x_1, \ldots, x_p) \longmapsto \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_p).$$

C'est ainsi que $(\mathscr{D}, \mathscr{T})$, étudié au **1.1.2** est la grassmannienne d'ordre 1.

2° ***Étude de la grassmannienne d'ordre** p.* — Dans les démonstrations des théorèmes I et II du 2° et du 3°, nous aurons le droit de supposer que la topologie canonique de E a été introduite à partir d'une norme euclidienne.

THÉORÈME I. — **L'espace topologique $(\mathscr{G}_p, \mathscr{T}_p)$ est séparé.**

Soient X et Y deux éléments distincts de $\mathscr{G}_p$; pour des raisons de dimension, on n'a pas $X \subset Y$, et il existe $e \in X$ tel que $e \notin Y$. E étant considéré comme euclidien, nous disposons de l'application :

$$f : \mathscr{G}_p \to \mathbb{R} \qquad Z \longmapsto d(e, Z)^2$$

D'après II.**2**.1.2, $f \circ \varphi_p$ s'écrit : $(x_1, \ldots, x_p) \longmapsto \dfrac{\mathrm{Gram}\,(e, x_1, \ldots, x_p)}{\mathrm{Gram}\,(x_1, \ldots, x_p)}$ et est donc continue ; d'où la continuité de f (**1**.1.1, 2°).

Nous avons par ailleurs $f(X) = 0$ et $f(Y) \neq 0$; $\mathbb{R}$ étant séparé, il existe deux ouverts disjoints U et V de $\mathbb{R}$, voisinages respectifs de $f(X)$ et de $f(Y)$; nous constatons que $f^{-1}(U)$ et $f^{-1}(V)$ sont des voisinages disjoints de X et Y respectivement. □

THÉORÈME II. — **L'espace topologique $(\mathscr{G}_p, \mathscr{T}_p)$ est compact.**

La séparation est acquise.

— E étant considéré comme euclidien, montrons d'abord que *le groupe orthogonal $O(E)$ est une partie compacte de $\mathscr{L}(E)$*. Il suffit de montrer que le groupe $O_{\mathbb{R}}(n)$ des matrices orthogonales réelles d'ordre n est une partie compacte de l'e.v.n. de dimension finie $\mathscr{M}_{\mathbb{R}}(n)$; or il s'agit d'une partie fermée (image réciproque de $\{I_n\}$ par l'application continue $M \longmapsto {}^tMM$), et bornée (toute $M \in O_{\mathbb{R}}(n)$ vérifie $N_\infty(M) \leqslant 1$).

– Déduisons en que l'*ensemble* L_p^0 *des familles orthonormales de p vecteurs de E est un compact*. Dans le cas $p = n$, cela résulte de ce que L_n^0 est l'image du compact $O(E)$ par l'application manifestement continue et surjective :

$$O(E) \to L_n^0 \qquad u \longmapsto (u(e_1), \ldots, u(e_n))$$

où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale arbitrairement choisie de E.

Dans le cas général, on considère L_p^0 comme l'image de L_n^0 par l'application continue $(x_1, \ldots, x_p, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, \ldots, x_p)$, qui est surjective puisque toute famille orthonormale de p vecteurs peut être complétée en une base orthonormale.

– Enfin $\mathscr{G}_p = \varphi_p(L_p^0)$ est un compact. □

3° ***Étude de l'espace des hyperplans.*** – L'espace topologique $(\mathscr{G}_{n-1}, \mathscr{T}_{n-1})$ des hyperplans de E est abréviativement noté $\mathscr{H}$.

THÉORÈME I. – **Les espaces $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}$ des hyperplans et des droites de E sont homéomorphes.**

Considérons encore E comme euclidien, ce qui permet de disposer de l'application bijective $h : H \longmapsto H^\perp$ de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{D}$. Comme $\mathscr{H}$ est compact (théorème II du 2°) et $\mathscr{D}$ séparé, il suffit, pour montrer que h est un homéomorphisme, de montrer (III.**2**.5.*1*, 6°) que h est continue, ou encore, puisque $\mathscr{H}$ est muni d'une topologie finale, de montrer que l'application

$$L_{n-1} \to \mathscr{D} \qquad (x_1, \ldots, x_{n-1}) \longmapsto [\mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_{n-1})]^\perp$$

est continue. Or, quitte à orienter arbitrairement E, nous pouvons considérer celle-ci comme la composée des applications continues :

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}) \longmapsto x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \qquad \text{et} \qquad \varphi_1 : x \longmapsto \mathbb{R}x. \qquad \square$$

En considérant $h^{-1} \circ \varphi_1$, nous obtenons, au passage :

PROPOSITION. – ***E* étant euclidien, l'application $g : x \longmapsto x^\perp$ de $E\backslash\{0\}$ dans $\mathscr{H}$ est continue.**

• THÉORÈME II. – **L'application $f : u \longmapsto \mathrm{Ker}\, u$ de $E^*\backslash\{0\}$ dans $\mathscr{H}$ est continue.**

E étant encore considéré comme euclidien, nous disposons de l'isomorphisme canonique (II.**2**.1.*3*, 2°) de E^* sur E qui induit un homéomorphisme θ de $E^*\backslash\{0\}$ sur $E\backslash\{0\}$. Or f s'écrit $g \circ \theta$, où g est l'application continue considérée dans la proposition précédente. □

COROLLAIRE I. – **$\mathscr{H}$ est homéomorphe à l'espace $\mathscr{D}^*$ des droites de E^*.**

Notons γ la bijection naturelle de $\mathscr{D}^*$ sur $\mathscr{H}$ (I.**9**.3.*3*, 3°) ; $\mathscr{D}^*$ étant muni de la topologie finale associée à :

$$\varphi_1^* : E^*\backslash\{0\} \to \mathscr{D}^* \qquad u \longmapsto \mathbb{R}u,$$

nous avons $f = \gamma \circ \varphi_1^*$; d'où la continuité de l'application bijective γ qui, compte tenu de la compacité de $\mathscr{D}^*$ et de la séparation de $\mathscr{H}$, est un homéomorphisme. □

COROLLAIRE II. — **Soit e $= (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. L'application de $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ dans $\mathscr{H}$ qui à $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ associe l'hyperplan admettant $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i = 0$ pour équation dans e est continue.**

On utilise le théorème II et l'isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur E^* qui est associé à la base e. □

1.1.4. Cas des espaces affines normés

1° Nous aurons besoin par la suite du résultat suivant :

THÉORÈME. — **Soient $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine de dimension finie, d_1 et d_2 les distances sur $\mathscr{E}$ associées aux normes N_1 et N_2 sur E ; on sait qu'il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que : $\alpha d_1 \leqslant d_2 \leqslant \beta d_1$. Alors pour tout $m \in \mathscr{E}$ et pour toute variété affine $\mathscr{V}$ de $\mathscr{E}$:**

$$\alpha d_1(m, \mathscr{V}) \leqslant d_2(m, \mathscr{V}) \leqslant \beta d_1(m, \mathscr{V}) \qquad (1)$$

Soit $m \in \mathscr{E}$. Nous avons :

$$\forall p \in \mathscr{V} \qquad \alpha d_1(m, p) \leqslant d_2(m, p) \leqslant \beta d_1(m, p).$$

Il en résulte :

$$\alpha . \inf_{p \in \mathscr{V}} d_1(m, p) \leqslant \inf_{p \in \mathscr{V}} d_2(m, p) \leqslant \beta . \inf_{p \in \mathscr{V}} d_1(m, p)$$ □

2° Dans la suite du paragraphe $(\mathscr{E}, E, \|.\|)$ désigne un $\mathbb{R}$-e.a.n. de dimension finie $n > 0$. $\mathscr{E}$ est muni de la topologie associée à la distance de la norme $\|.\|$, topologie d'ailleurs indépendante du choix de cette norme.

• Soient a un point de $\mathscr{E}$, et $\mathscr{E}_a$ le vectorialisé de a. Pour tout $p \in \mathbb{N}_n$, $\mathscr{G}_{a,p}$ désigne l'ensemble des variétés affines de dimension p de $\mathscr{E}$ qui contiennent a, c'est-à-dire la grassmannienne d'ordre p de $\mathscr{E}_a$ (que l'on munit de la topologie introduite au **1.1.3**). Abréviativement on écrit $\mathscr{D}_a$ pour $\mathscr{G}_{a,1}$ et $\mathscr{H}_a$ pour $\mathscr{G}_{a,n-1}$.

Le lecteur vérifiera aisément les propriétés suivantes :

a) $m \longmapsto \overrightarrow{am}$ *est un homéomorphisme* (et même une isométrie) *de* $\mathscr{E}$ *sur* E ;

b) $m \longmapsto \mathrm{Aff}(a, m)$ *est une application continue de* $\mathscr{E} \setminus \{a\}$ *dans* $\mathscr{D}_a$ (composée de $m \longmapsto \overrightarrow{am}$ et de $\mathbf{x} \longmapsto \mathbb{R}\mathbf{x}$) ;

c) Étant donné $\mathscr{V} \in \mathscr{G}_{a,p}$ (avec ici $n \geqslant 2$ et $p \leqslant n-2$), $m \longmapsto \mathrm{Aff}(\mathscr{V} \cup \{m\})$ *est une application continue de* $\mathscr{E} \setminus \mathscr{V}$ *dans* $\mathscr{G}_{a,p+1}$.

• Soient F un sous-espace vectoriel de E et $\mathscr{W}$ l'ensemble des variétés affines de $\mathscr{E}$ dont la direction est F. Le lecteur vérifiera que les topologies suivantes sur $\mathscr{W}$ coïncident :

a) La topologie finale associée à $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{W}$, avec $\varphi(m) = m + F$;

b) La topologie finale associée à la restriction de φ à une variété affine $\mathscr{V}'$ de $\mathscr{E}$, de direction supplémentaire de F ;

c) La topologie associée à la distance d sur $\mathscr{W}$ obtenue en notant $d(\mathscr{V}_1, \mathscr{V}_2)$ la distance des variétés parallèles $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$, au sens de la distance de deux espaces métriques.

Il s'agit d'une topologie métrisable, donc séparée.

Notons qu'en *b*), $m \longmapsto m + F$ est un homéomorphisme de $\mathscr{V}'$ sur $\mathscr{W}$.

3° ***Étude pratique de la limite d'une droite d'un plan.*** — Ici $\mathscr{E}$ est un plan affine normé rapporté à un repère affine $(O\,; \mathbf{i}, \mathbf{j})$; a est un point de $\mathscr{E}$. On considère une application $\lambda \longmapsto \mathscr{F}_\lambda$ d'une partie A d'un espace topologique Λ dans l'ensemble $\mathscr{D}_a$ des droites affines de $\mathscr{E}$ qui contiennent a ; λ_0 est un point de $\bar{A}$.

Si, pour $\lambda \in A$, la direction F_λ de $\mathscr{F}_\lambda$ ne contient pas le vecteur **j**, on dispose du *coefficient directeur* de $\mathscr{F}_\lambda$ (*coefficient angulaire* si le repère est orthonormal), qui est le réel $\mu(\lambda)$ défini par $F_\lambda = \mathbb{R}(\mathbf{i} + \mu(\lambda)\mathbf{j})$.

THÉORÈME. — **La condition $\mathbf{j} \notin F_\lambda$ étant supposée remplie pour tout $\lambda \in A$:**

i) Si $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0, \lambda \in A} \mu(\lambda) = \mu \in \mathbb{R}$, **alors** $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0, \lambda \in A} \mathscr{F}_\lambda = a + \mathbb{R}(\mathbf{i} + \mu\mathbf{j})$ **;**

ii) Si $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0, \lambda \in A} |\mu(\lambda)| = +\infty$, **alors** $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0, \lambda \in A} \mathscr{F}_\lambda = a + \mathbb{R}\mathbf{j}$ **;**

iii) Dans tout autre cas, $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0, \lambda \in A} \mathscr{F}_\lambda$ **n'existe pas.**

Preuve. — Dans chaque cas, on utilise **1.1**.*2*, 5°. Plus précisément :

i) De $F_\lambda = \mathbb{R}(\mathbf{i} + \mu(\lambda)\mathbf{j})$ on déduit $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0, \lambda \in A} F_\lambda = \mathbb{R}(\mathbf{i} + \mu\mathbf{j})$. □

ii) Il existe $V \in \mathscr{V}(\lambda_0)$ tel que, pour tout $\lambda \in V \cap A$, $\mu(\lambda) \neq 0$ et donc

$$F_\lambda = \mathbb{R}(1/\mu(\lambda).\mathbf{i} + \mathbf{j}), \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{\lambda \to \lambda_0, \lambda \in A} F_\lambda = \mathbb{R}\mathbf{j}. \qquad \square$$

iii) Supposons que $\mathscr{F}_\lambda$ (i.e. F_λ) admette une limite. Il existe $\xi : A \to \mathbb{R}$, $\eta : A \to \mathbb{R}$ et $(\xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ vérifiant les deux assertions :

α) Pour tout $\lambda \in A$, $\xi(\lambda)\mathbf{i} + \eta(\lambda)\mathbf{j}$ est un vecteur non nul de F_λ ;

β) $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0, \lambda \in A} (\xi(\lambda)\mathbf{i} + \eta(\lambda)\mathbf{j}) = \xi_0\mathbf{i} + \eta_0\mathbf{j}$.

La condition $\mathbf{j} \notin F_\lambda$ impose $\xi(\lambda) \neq 0$; on a $\mu(\lambda) = \eta(\lambda)/\xi(\lambda)$. Si $\xi_0 \neq 0$, alors $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0, \lambda \in A} \mu(\lambda) = \eta_0/\xi_0$; on est dans le cas i). Si $\xi_0 = 0$, alors $\eta_0 \neq 0$ et $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0, \lambda \in A} |\mu(\lambda)| = +\infty$; on est dans le cas ii). □

REMARQUES. — *a*) Le théorème s'applique s'il existe $W \in \mathscr{V}(\lambda_0)$ tel que $\mathbf{j} \notin F_\lambda$ soit vrai pour tout $\lambda \in W \cap A$.

b) Inversement si $\mathscr{F}_\lambda$ admet une limite différente de $a + \mathbb{R}\mathbf{j}$, $\mu(\lambda)$ est défini au voisinage de λ_0.

Si $\mathscr{F}_\lambda$ admet $a + \mathbb{R}\mathbf{j}$ pour limite, on ne peut affirmer l'existence de $\mu(\lambda)$; on a alors la possibilité d'intervertir les rôles de **i** et **j**.

1.2. ARCS PARAMÉTRÉS (OU COURBES PARAMÉTRÉES)

($\mathscr{E}$, E, $\|.\|$) désigne un $\mathbb{R}$-e.a.n. de dimension finie $n > 0$, qui pourra être $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure affine canonique; dans la pratique : $n = 2$ ou $n = 3$. Les intervalles de $\mathbb{R}$ considérés sont supposés d'intérieur non vide.

1.2.*1*. Définitions générales

Rappel de topologie. — Nous utiliserons la définition du III.**8**.1.*1*, 9°, étendue aux espaces affines sous la forme :

DÉFINITION. — **Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux espaces affines de dimensions finies p et n, et f une application continûment différentiable d'un ouvert U de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{B}$. On dit que f est une** *immersion* **(resp.** une *submersion*) **si, et seulement si, pour tout $x \in U$, $\mathrm{d}f(x)$ est injective (resp. surjective) i.e. de rang p (resp. n). On dit que f est un** *plongement* **si et seulement si d'une part elle est une immersion, d'autre part elle est une injection qui induit un homéomorphisme $x \longmapsto f(x)$ de U sur $f(U)$, considéré comme sous-espace topologique de $\mathscr{B}$.**

Dans le cas où $\mathscr{A} = \mathbb{R}$, nous étendrons cette définition au cas où U est un intervalle de $\mathbb{R}$, pas nécessairement ouvert.

1° *Arcs paramétrés (ou courbes paramétrées).* — DÉFINITION. — **On appelle** *arc paramétré* (**ou** *courbe paramétrée*) **de $\mathscr{E}$ tout couple** ([1]) (I, f) **où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une application continue de I dans $\mathscr{E}$; $f(I) \subset \mathscr{E}$ est le** *support* **de l'arc, on le note supp (I, f). Dans le cas où I est compact, on parle d'***arc paramétré compact,* **ou encore de** *chemin* (*cf.* III.**2**.6.*3*).

Image continue d'un connexe de $\mathbb{R}$, *le support est un connexe de $\mathscr{E}$. Si l'arc est compact* ($I = [a, b]$) *c'est un compact connexe de* $\mathbb{R}$; les points $f(a)$ et $f(b)$ en sont alors respectivement l'*origine* et l'*extrêmité.*

Sauf avis contraire, supp (I, f) est muni de la topologie induite par celle de $\mathscr{E}$.

Une question de vocabulaire. — **Toutes les fois que** (nous conformant à une notation traditionnelle qui a l'avantage d'éviter d'introduire une acception supplémentaire du mot «courbe») **nous allons écrire** *arc paramétré*, **le lecteur pourra lire** *courbe paramétrée* (notation utilisée dans les programmes des C.P.).

([1]) La donnée d'une application implique celle de son ensemble de départ; il peut donc paraitre inutile d'introduire (I, f) là où f suffirait; dans la pratique, cette précaution s'avère cependant commode.

2° *Étude d'un arc paramétré*

• ***Points de l'arc : multiplicité d'un point du support.*** — DÉFINITION I. — **Soient** $\gamma = (I, f)$ **un arc paramétré et** t **un élément de** I. **On dit que le triplet** $M(t) = (I, f, t)$ **est** *le point de* γ *de paramètre* t **et que** $m = f(t)$ **est l'image de ce point.**

On dit que Card $\{f^{-1}(m)\}$ — étant entendu que ce symbole désigne $+\infty$ si l'ensemble $\{f^{-1}(m)\}$ est infini — **est la** *multiplicité de m relativement à* γ.

REMARQUE. — La multiplicité dépend de l'arc, et pas seulement du support. C'est ainsi que si $\mathscr{E} = \mathbb{R}^2$ et si f est $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, le point $(1, 0)$ du support a pour multiplicité 1, 2 ou $+\infty$ selon que I est $[0, 2\pi[$, $[0, 2\pi]$ ou $\mathbb{R}$; pourtant, dans les trois cas, le support est le même.

• ***Sous-arcs.*** — DÉFINITION II. — **Soient** (I, f) **un arc paramétré et** I' **un sous-intervalle de** I ; **on note** $f|I'$ **la restriction de** f **à** I'. **Alors** $(I', f|I')$ **est un arc paramétré qui est dit** *sous arc* **de** (I, f).

Nous savons en effet que $f|I'$ est continue.
Notons que le support d'un sous-arc est une partie de celui de l'arc.

Avec les notations de la définition I, *pour tout* $t_0 \in I'$ *nous identifierons le point* $(I', f|I', t_0)$ *de* $(I', f|I')$ *et le point* (I, f, t_0) de (I, f).

• ***Arcs simples.*** — DÉFINITION III. — **On dit qu'un arc paramétré** (I, f) **est** *simple* **si, et seulement si** f **est une injection. Un arc paramétré compact et simple est appelé** *arc de Jordan*.

REMARQUES. — *a*) Tout sous-arc d'un arc simple est simple.

b) Si (I, f) est un arc simple, la bijection $\bar{f} : t \longmapsto f(t)$ de I sur $\mathscr{S} = \operatorname{supp}(I, f)$ induite par l'injection f permet de transporter sur $\mathscr{S}$ la structure d'ordre total de I, et fournit une topologie de l'ordre sur $\mathscr{S}$, qui ne coïncide pas nécessairement avec la topologie habituelle de $\mathscr{S}$ (induite par celle de $\mathscr{E}$).

PROPOSITION I. — **Si** (I, f) **est un arc de Jordan, alors** f **induit un homéomorphisme de** I **sur** $\mathscr{S} = \operatorname{supp}(I, f)$.

La bijection $\bar{f} : I \to \mathscr{S}$ induite par f est continue; I est compact, $\mathscr{S}$ est une partie de $\mathscr{E}$ qui est séparé; on applique III.2.5.*1*, 6°. □

REMARQUE. — Si (I, f) n'est qu'un arc simple, I et $\mathscr{S} = \operatorname{supp}(I, f)$ ne sont pas nécessairement homéomorphes. Considérons par exemple l'arc paramétré $(\mathbb{R}, f)$ de $\mathbb{R}^2$, avec $f : t \longmapsto (t/(1+t^4), t^3/(1+t^4))$, dont le support $\mathscr{S}$ (lemniscate de Bernoulli) est représenté par la figure 3; s'il existait un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathscr{S}$, il induirait un homéomorphisme de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ *sur* $\mathscr{S}\setminus\{f(1)\}$, ce qui est impossible car ces deux espaces topologiques n'ont pas le même nombre de composantes connexes.

Notons que $O = (0, 0)$ est de multiplicité 1, et non 2 comme le laisserait supposer l'examen du seul support.

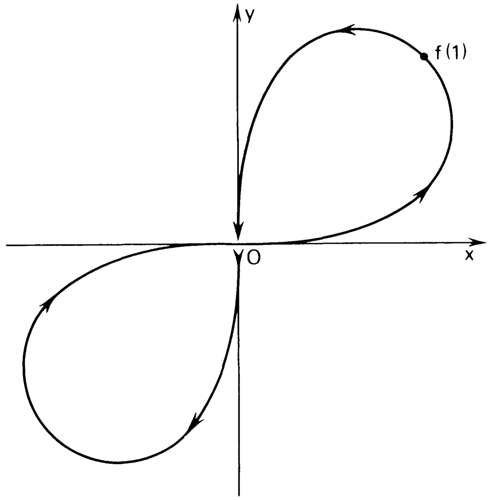

FIG. 3.

• ***Arcs fermés simples.*** — DÉFINITION IV. — **On dit qu'un arc paramétré compact** $([a,b], f)$ **est** *fermé* **si, et seulement si,** $f(a) = f(b)$. **Si, en outre** $f|[a, b[$ **est injective, on parle d'***arc fermé simple.*

PROPOSITION II. — **Le support d'un arc fermé simple** $([a,b], f)$ **est homéomorphe à** $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, **et donc à tout cercle de rayon non nul d'un plan affine euclidien.**

Il existe en effet une unique application $F : \mathbb{R} \to \mathscr{E}$ telle que $F(t) = F(t')$ si, et seulement si, $t - t' \in (b-a)\mathbb{Z}$. On l'appelle *prolongement de f à* $\mathbb{R}$ *par périodicité ;* elle est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad F(t) = f\left(t - E\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\cdot(b-a)\right).$$

Elle est continue. En raisonnant comme au **1.1.***1*, 3°, *in fine*, on constate que $F(\mathbb{R})$, qui est aussi $f([a,b])$, est homéomorphe à $\mathbb{R}/(b-a)\mathbb{Z}$, et donc à U.

□

• ***Arcs paramétrés de classe*** C^k. — DÉFINITION V. — **Pour** $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, **on appelle** *arc paramétré de classe* C^k, **ou abréviativement,** C^k*-arc paramétré*, **tout arc paramétré** (I, f) **tel que l'application** f **soit de classe** C^k.

L'étude des arcs paramétrés qui ne sont que continus conduit à des êtres mathématiques compliqués (1). C'est pourquoi nous nous limiterons le plus souvent à $k \geqslant 1$.

---

(1) Peano a montré en 1890 qu'il existe un C^0-arc paramétré de $\mathbb{R}^2$ dont le support est le carré $[0,1] \times [0,1]$, (cf. exercice **1.01**).

• ***Point régulier, point stationnaire.*** — DÉFINITION VI. — **On dit que le point $M_0 = M(t_0)$ du C^k — arc paramétré (I, f), $k \geqslant 1$, est** *régulier* **ou** *stationnaire* **selon que $f'(t_0) \neq 0$ ou $f'(t_0) = 0$. Un arc dont tous les points sont réguliers est dit** *régulier.*

La continuité de f' fait que **si M_0 est un point régulier de (I, f), alors il existe un sous arc régulier de (I, f) dont un point est M_0.**

• ***Plongements.*** — DÉFINITION VII. — **On dit qu'un C^k-arc paramétré (I, f), $k \geqslant 1$, est** *immergé* **(resp.** *plongé*) **si, et seulement si, f est une immersion** (resp. **un plongement)** de I **dans $\mathscr{E}$; un arc plongé est ainsi un arc simple.**

Un C^k-arc paramétré est donc régulier si et seulement s'il est immergé.

• ***Arcs cartésiens.*** — DÉFINITION VIII ET PROPOSITION. — **On dit qu'un C^k-arc paramétré (I, f) est cartésien si, et seulement s'il existe un repère $(O; \mathbf{e})$ de $\mathscr{E}$ tel que l'on ait :**

$$\forall t \in I \qquad f(t) = O + te_1 + \sum_{j=2}^{n} f_j(t) e_j.$$

Un tel arc est simple. S'il est de classe C^k, $(k \geqslant 1)$, alors il est plongé.

Pour un tel arc, $f(t') = f(t)$ exige $t' = t$; d'où l'injectivité de f, qui induit ainsi une bijection, évidemment continue, $\bar{f}$ de I sur le support $\mathscr{S}$; $\bar{f}^{-1}$ est continue car elle coïncide sur $\mathscr{S}$ avec l'application continue de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout point associe sa première coordonnée dans $(O, \mathbf{e})$; $\bar{f}$ est donc un homéomorphisme. Enfin, si f est dérivable en $t_0 \in I$, alors $f'(t_0)$ dont la première composante dans la base $\mathbf{e}$ de E est 1, est non nul. □

3° *Arcs géométriques*

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **On obtient une relation d'équivalence sur l'ensemble des C^k-arcs paramétrés de $\mathscr{E}$ en convenant que : « (I, f) est C^k-équivalent à (J, g) signifie qu'il existe une bijection $\theta : J \to I$ de classe C^k ainsi que sa réciproque, telle que $g = f \circ \theta$ ».**

Les classes de C^k-équivalence sont appelés arcs géométriques de classe C^k ou, abréviativement, C^k-arcs géométriques.

Voici la démonstration pour $k \geqslant 1$ (à la notation près, elle vaut pour $k = 0$). $\mathrm{Diff}^k(J, I)$ désigne l'ensemble des difféomorphismes [1] de classe C^k de J sur I. Soient (I, f), (J, g), (K, h) des C^k-arcs paramétrés de $\mathscr{E}$.

---

[1] Rappelons (III.*4.3.3*, 3°) que, pour $k \geqslant 1$, $\theta \in \mathrm{Diff}^k(J, I)$ signifie que $\theta : J \to I$ est une bijection de classe C^k telle que θ' ne prenne pas la valeur 0 ; image du connexe J de $\mathbb{R}$ par θ', qui est de classe C^{k-1} et donc continue, $\theta'(J)$ est un connexe de $\mathbb{R}$; il en résulte que l'application $\mathrm{sgn} \circ \theta'$ est constante. Selon que θ est strictement croissante ou strictement décroissante, on écrit $\theta \in \mathrm{Diff}^k_+(J, I)$ ou $\theta \in \mathrm{Diff}^k_-(J, I)$.

Réflexivité : on a $f = f \circ \mathrm{Id}_I$, avec $\mathrm{Id}_I \in \mathrm{Diff}^\infty(I, I)$;

Symétrie : si $g = f \circ \theta$ avec $\theta \in \mathrm{Diff}^k(J, I)$, alors $f = g \circ \theta^{-1}$, avec $\theta^{-1} \in \mathrm{Diff}^k(I, J)$;

Transitivité : si $g = f \circ \theta$ et $h = g \circ \varpi$, avec $\theta \in \mathrm{Diff}^k(J, I)$ et $\varpi \in \mathrm{Diff}^k(K, J)$, alors $h = f \circ (\theta \circ \varpi)$, avec $\theta \circ \varpi \in \mathrm{Diff}^k(K, I)$. □

REMARQUE. — Si les arcs paramétrés (I, f) et (J, g) sont C^k-équivalents, alors les intervalles I et J sont de même nature topologique (ouverts, fermés, ou semi-ouverts). C'est ainsi que parmi les trois arcs paramétrés introduits dans la première remarque du 2° ne figurent pas deux arcs C^∞-équivalents.

NOTATION. — **Les représentants d'un C^k-arc géométrique Γ sont appelés** *paramétrages admissibles*, **ou, abréviativement,** *paramétrisations* **de Γ. Avec la notation du théorème précédent, on dit que θ est un** *changement de paramétrisation.*

REMARQUE. — Deux arcs paramétrés C^k-équivalents sont $C^{k'}$-équivalents pour tout k' tel que $0 \leqslant k' \leqslant k$, mais deux C^{k+1}-arcs paramétrés peuvent être C^k-équivalents sans être C^{k+1}-équivalents, ainsi que le montre l'exemple suivant, dans lequel $\mathscr{E} = \mathbb{R}^2$:

$I = [0, 2]$; f est $t \longmapsto (t^2, 0)$; (I, f) est de classe C^∞;
$J = [0, 1]$; g est $u \longmapsto ((u + u^{3/2})^2, 0)$; (J, g) est de classe C^2.

Tout $\theta \in \mathrm{Diff}\,(J, I)$ tel que $g = f \circ \theta$ doit vérifier :

$$\forall u \in [0, 1] \qquad \theta(u) \in \{u + u^{3/2},\ -(u + u^{3/2})\} \cap [0, 2].$$

La seule solution possible est donc $u \longmapsto u + u^{3/2}$ qui appartient à $\mathrm{Diff}^1(J, I)$, mais non à $\mathrm{Diff}^2(J, I)$.

• ***Points d'un arc géométrique.*** — DÉFINITION II. — **On appelle** *point d'un arc géométrique* Γ **toute classe d'équivalence de triplets (I, f, t), où (I, f) est une paramétrisation de Γ et t un point de I, pour la relation $\sim$ définie par « $(I, f, t) \sim (J, g, u)$ signifie qu'il existe $\theta \in \mathrm{Diff}^k(J, I)$ tel que $g = f \circ \theta$ et $t = \theta(u)$ ». Le point $f(t)$ du support de Γ est appelé** *image* **du point de Γ représenté par (I, f, t).**

Le lecteur justifiera cette définition en vérifiant que $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des triplets (I, f, t) et que, si $(I, f, t) \sim (J, g, u)$, alors $f(t) = g(u)$. □

• ***Sous-arcs d'un arc géométrique.*** — DÉFINITION III. — **Soient Γ un C^k-arc géométrique et (I, f) l'une de ses paramétrisations. Pour tout sous-intervalle I' de I, le C^k-arc géométrique Γ' dont une paramétrisation est le sous-arc $(I', f|I')$ de (I, f), est dit** *sous-arc* **de Γ.**

Cette définition est justifiée par le fait que si (J, g) est une autre paramétrisation de Γ et si $\theta \in \mathrm{Diff}^k(J, I)$ vérifie $g = f \circ \theta$, on constate, en posant $J' = \theta^{-1}(I')$, que Γ' admet $(J', g|J')$ pour paramétrisation. □

Avec les notations de la définition III, *pour tout* $t_0 \in I'$ *nous identifierons le point de* Γ' *représenté par* $(I', f|I', t_0)$ *et le point de* Γ *représenté par* (I, f, t_0).

4° ***Propriétés C^k-invariantes d'un C^k-arc paramétré; propriétés d'un arc géométrique.*** — DÉFINITION. — **Soit γ un C^k-arc paramétré. On dit qu'une propriété de γ est** *C^k-invariante* **si et seulement si tout arc paramétré C^k-équivalent à γ la possède.**

On définit de même une propriété C^k-invariante du couple constitué par γ et l'un de ses points.

CONVENTION. — **On attribue à un C^k-arc géométrique toute propriété C^k-invariante de l'un de ses représentants.**

Voici des exemples :

PROPOSITION I. — **Toutes les paramétrisations d'un arc géométrique Γ ont un support commun, qui est dit** *support de* Γ, **et noté** supp Γ.

Avec les notations habituelles, $g = f \circ \theta$ entraîne $g(J) = f[\theta(J)] = f(I)$. □

Notons que, d'après la première remarque du **3°**, **deux arcs géométriques distincts peuvent avoir le même support.**

COROLLAIRE. — **La multiplicité d'un point m du support d'un arc géométrique Γ relativement à une paramétrisation de Γ est indépendante du choix de celle-ci. On l'appelle** *multiplicité de m relativement à* Γ.

Avec les notations habituelles :

$$f^{-1}(\{m\}) = \theta[g^{-1}(\{m\})] \text{ où } \theta \text{ est une bijection.}$$ □

PROPOSITION II. — **Soit M_0 un point d'un C^k-arc géométrique Γ, $k \geqslant 1$. Si pour un représentant (I, f, t_0) de M_0 on a $f'(t_0) \neq 0$, alors il en est de même pour tout représentant de M_0, et on dit que M_0 est un** *point régulier* **de Γ; dans le cas contraire, on dit que M_0 est un** *point stationnaire* **de Γ.**

Pour tout $u \in J$: $g'(u) = \theta'(u).f'(\theta(u))$ et $\theta'(u) \neq 0$. □

PROPOSITION III. — **Si une paramétrisation d'un arc géométrique Γ est un arc paramétré simple (resp. de Jordan ; resp. fermé simple ; resp. immergé ; resp. plongé), il en est de même pour toute paramétrisation de Γ, qui est dit** *arc géométrique simple* (**resp.** *de Jordan;* **resp.** *fermé simple;* **resp.** *immergé;* **resp.** *plongé*).

Le début est trivial. La fin résulte de ce que, si f induit un homéomorphisme $\bar{f}$ de I sur $\mathscr{S} = \operatorname{supp} \Gamma$, alors $\bar{f} \circ \theta$ est un homéomorphisme de J sur $\mathscr{S}$, et il est induit par g. □

REMARQUES. — *a*) Un C^1-arc géométrique sans point stationnaire est un arc immergé.

b) Le support d'un C^1-arc géométrique est réduit à un point si, et seulement si, tous les points de l'arc sont stationnaires.

• Le théorème qui suit va nous permettre de constater que le *support d'un arc géométrique immergé peut être considéré comme une réunion de supports d'arcs plongés.*

THÉORÈME I. — **Soit M_0 un point régulier d'un C^k-arc-géométrique Γ, $k \geqslant 1$. Alors, parmi les sous-arcs de Γ dont un point est M_0, il en existe un qui admet une paramétrisation cartésienne, et donc est plongé.**

Soit (I, f, t_0), avec $f'(t_0) \neq 0$, un représentant de M_0. Il existe (1) un repère affine $(O, \mathbf{e})$ de $\mathscr{E}$ vérifiant la condition : $f'(t_0) \notin \operatorname{Vect}(e_2, \ldots, e_n)$. En notant $f(t) = O + \sum_{i=1}^{n} f_i(t)e_i$, on a donc $f_1'(t_0) \neq 0$, ce qui permet d'appliquer le théorème d'inversion locale à f_1, au voisinage de t_0 : il existe un intervalle ouvert $I' \in \mathscr{V}_I(t_0)$, tel que f_1 induise $\varpi \in \mathrm{Diff}^k(I', \Omega)$ où $\Omega = f_1(I')$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Le sous-arc Γ' de Γ représenté par $(I', f|I')$ l'est aussi par (Ω, φ) avec :

$$\varphi = (f|I') \circ \varpi^{-1} \qquad x \longmapsto O + xe_1 + \sum_{j=2}^{n} f_j(\varpi^{-1}(x))e_j$$

ce qui montre que (Ω, φ) est un arc paramétré cartésien, et donc (proposition du 2°) un arc paramétré plongé ; on en déduit que Γ' est un arc géométrique plongé. □

• Une variante de la démonstration précédente va maintenant nous permettre de constater qu'*un arc géométrique plongé est entièrement déterminé par son support* (2).

THÉORÈME II. — **Deux C^k-arcs paramétrés plongés, $k \geqslant 1$, de $\mathscr{E}$, (I, f) et (J, g), qui ont un support commun $\mathscr{S}$ sont C^k-équivalents.**

$\bar{f}$ et $\bar{g}$ désignant les homéomorphismes de I et J sur $\mathscr{S}$ respectivement induits par f et g, $\bar{f}^{-1} \circ \bar{g}$ est un homéomorphisme de J sur I que nous notons θ. On a $g = f \circ \theta$. Il suffit de montrer que θ est de classe C^k ; la même propriété vaudra en effet pour $\theta^{-1} = \bar{g}^{-1} \circ \bar{f}$.

— Soient $u_0 \in J$ et $t_0 = \theta(u_0)$. L'arc (I, f) étant plongé, on a $f'(t_0) \neq 0$. $(O, \mathbf{e})$ étant un repère de $\mathscr{E}$ qui vérifie $f'(t_0) \notin \operatorname{Vect}(e_2, \ldots, e_n)$, en notant :

$$f(t) = O + \sum_{i=1}^{n} f_i(t)e_i, \qquad \text{on a} \qquad f_1'(t_0) \neq 0.$$

---

(1) Un tel repère peut se déduire d'un repère arbitrairement choisi de $\mathscr{E}$ par une permutation convenable des vecteurs de la base.

(2) Nous retrouverons ce résultats au 3.3.*1*, 1° sous la forme : *le support d'un arc paramétrique plongé est une courbe (au sens des sous-variétés).*