▶ X 1 **Localisation des racines d'un polynôme**

On considère le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^n$, *avec* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $0 < b_0 \leqslant b_1 \leqslant \cdots \leqslant b_n$ *des réels. On note :*

$$Q(X) = (X-1)P(X).$$

Soit z *une racine complexe de* P*, montrer que* $Q(|z|) \leqslant 0$*, en déduire que* $|z| \leqslant 1$.

▷ **Réponse**

• Remarquons que :

$$\begin{aligned} Q(X) &= \sum_{k=0}^{n} b_k X^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \\ &= b_n X^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (b_{k-1} - b_k) X^k - b_0 \qquad (*) \end{aligned}$$

donc

$$Q(|z|) = b_n |z|^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (b_{k-1} - b_k) |z|^k - b_0 \qquad (**)$$

Or $Q(z) = (z-1)P(z) = 0$ donc par $(*)$

$$b_n z^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k-1}) z^k + b_0.$$

En prenant l'inégalité triangulaire, avec les hypothèses sur les b_k :

$$\begin{aligned} b_n |z|^{n+1} &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |\overbrace{b_k - b_{k-1}}^{\geqslant 0}| |z|^k + |b_0| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k-1}) |z|^k + b_0. \end{aligned}$$

Cette inégalité, avec $(**)$, donne exactement que $Q(|z|) \leqslant 0$. On en déduit que $(|z|-1)P(|z|) \leqslant 0$ et comme $P(|z|) \geqslant b_0 > 0$ on a bien $|z| - 1 \leqslant 0$.

▶ Mines 2 **Construction d'un polynôme**

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}_7[X]$ *tels que* $(X-1)^4$ *divise* $P(X)+1$ *et* $(X+1)^4$ *divise* $P(X)-1$.

▷ **Réponse**

• *Condition nécessaire.* Soit P un tel polynôme. Remarquons que $(X-1)^3$ et $(X+1)^3$ divisent $P' \in \mathbb{R}_6[X]$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$P'(X) = \lambda (X^2-1)^3 \quad \text{donc} \quad P(X) = \lambda \left[X^7/7 - 3X^5/5 + X^3 - X \right] + \mu, \mu \in \mathbb{R}.$$

• *Est-ce suffisant ?* Si P est ainsi, alors :

➢ $\forall k \in [\![1\ ;\ 3]\!], P^{(k)}(\pm 1) = 0$ par construction ;

➢ P convient donc si et seulement si 1 est racine de $P(X)+1$ et -1 racine de $P(X)-1$, ce qui fournit deux équations sur (λ, μ). On trouve $\lambda = \dfrac{35}{16}$ et $\mu = 0$, soit un unique polynôme convenable :

$$P(X) = -\frac{35}{16}X + \frac{35}{16}X^3 - \frac{21}{16}X^5 + \frac{5}{16}X^7.$$

► MAPLE 3 ***Racine cubique d'un polynôme***

Trouver les polynômes $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$(P(X))^3 = 27X^9 + 54X^7 - 54X^6 + 36X^5 - 72X^4 + 44X^3 - 24X^2 + 24X - 8.$$

▷ **Réponse**

• S'il existe, $P(X)$ est nécessairement de degré 3. On déclare un tel polynôme à MAPLE, on l'élève au cube et on lui retranche le second membre :

```
> P:=sum(a[i]*X^i,i=0..3);
```

$$P := a_0 + a_1\,X + a_2\,X^2 + a_3\,X^3$$

```
> Q:=expand(P^3-27*X^9+54*X^7-54*X^6+36*X^5-72*X^4
> +44*X^3-24*X^2+24*X-8):
```

Il reste à voir lorsque Q est nul. On extrait ses coefficients et l'on cherche lorsqu'ils sont nuls :

```
> eqns:=seq(coeff(Q,X,i),i=0..9);
```

$$\begin{aligned}&eqns := 8 + {a_0}^3,\ -24 + 3\,{a_0}^2\,a_1,\ 24 + 3\,{a_0}^2\,a_2 + 3\,a_0\,{a_1}^2,\ 6\,a_0\,a_1\,a_2 + {a_1}^3 - 44\\ &+3\,{a_0}^2\,a_3, 6\,a_0\,a_1\,a_3 + 72 + 3\,{a_1}^2\,a_2 + 3\,a_0\,{a_2}^2,\ 6\,a_0\,a_2\,a_3 - 36 + 3\,{a_1}^2\,a_3\\ &+3\,a_1\,{a_2}^2, 6\,a_1\,a_2\,a_3 + 54 + {a_2}^3 + 3\,a_0\,{a_3}^2,\ -54 + 3\,a_1\,{a_3}^2 + 3\,{a_2}^2\,a_3,\ 3\,a_2\,{a_3}^2,\\ &{a_3}^3 - 27\end{aligned}$$

```
> solve({eqns});
```

$$\begin{aligned}&\{a_0 = -2,\ a_1 = 2,\ a_2 = 0,\ a_3 = 3\}, \{a_0 = -2\,\mathrm{RootOf}(\_Z^2 + \_Z + 1,\ label = \_L3),\\ &a_1 = 2\,\mathrm{RootOf}(\_Z^2 + \_Z + 1,\ label = \_L3),\ a_2 = 0,\\ &a_3 = 3\,\mathrm{RootOf}(\_Z^2 + \_Z + 1,\ label = \_L3)\}\end{aligned}$$

En se limitant à la seule solution réelle, on trouve :

```
> allvalues({%});
```

$$\begin{aligned}&\{\{a_0 = 1 - \sqrt{3}\,I,\ a_1 = -1 + \sqrt{3}\,I,\ a_3 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\,I\,\sqrt{3},\ a_2 = 0\},\\ &\{a_0 = -2,\ a_1 = 2,\ a_2 = 0,\ a_3 = 3\}\}\\ &,\{\{a_3 = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\,I\,\sqrt{3},\ a_0 = 1 + \sqrt{3}\,I,\ a_1 = -1 - \sqrt{3}\,I,\ a_2 = 0\},\\ &\{a_0 = -2,\ a_1 = 2,\ a_2 = 0,\ a_3 = 3\}\}\end{aligned}$$

```
> subs({a[0] = -2, a[1] = 2, a[2] = 0, a[3] = 3},P);
```

$$-2 + 2\,X + 3\,X^3$$

► CENTRALE 4 **Equations linéaires portant sur des polynômes**

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ donné. Discuter des solutions dans $\mathbb{R}[X]$ de l'équation :

$$(E_1) \ : P(X) + P(X-1) = Q(X),$$

puis de l'équation :

$$(E_2) \ : P(X) + P(1-X) = Q(X).$$

▷ **Réponse**

• Pour l'équation (E_1), on introduit l'endomorphisme

$$u \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X) + P(X-1) \end{array} \right.$$

de $\mathbb{R}[X]$. Alors :

$$(E_1) \Longleftrightarrow u(P) = Q,$$

donc (E_1) est en fait une *équation linéaire*. Ici, on va montrer que u est bijectif, elle aura donc une unique solution.

➢ *Preuve de l'injectivité de u.* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P \in \mathrm{Ker}(u)$ donc :

$$P(X) + P(X-1) = 0 \qquad (*)$$

Si P n'est pas nul, de monôme dominant aX^n avec $a \neq 0$, alors $P(X) + P(X-1)$ a pour monôme dominant $2aX^n$, ce qui est contradictoire puisqu'il est nul. Donc P est nul, c'est-à-dire que $\mathrm{Ker}(u)$ est réduit à $\{0\}$ et u est injective.

➢ *Preuve de la surjectivité de u.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par u, et il est de dimension finie. L'endomorphisme induit par u sur $\mathbb{R}_n[X]$ est donc un automorphisme : tout polynôme de degré n a un antécédent par u, donc u est surjective.

• Grâce à la bijectivité de u on peut conclure :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X], \quad \exists! P \in \mathbb{R}[X], \quad P(X) + P(X-1) = Q(X).$$

• Pour l'équation (E_2) on introduit cette fois l'endomorphisme :

$$u \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X) + P(1-X) \end{array} \right.$$

donc : $(E_2) \Longleftrightarrow u(P) = Q$ qui reste une équation linéaire. D'après le cours, l'ensemble $\mathscr{S}$ de ses solutions est soit vide, soit du type

$$\mathscr{S} = \{P_k + P_p, P_k \in \mathrm{Ker}(u)\} \qquad (**)$$

où P_p désigne une solution particulière de (E_2). Ici, l'injectivité et la surjectivité de u ne sont plus claires comme dans le cas précédent, on doit travailler un peu plus pour conclure...

• Nous allons chercher une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une solution particulière P_p à (E_2).

➢ *Condition nécessaire* à l'existence de P_p tel que $P_p(X) + P_p(1-X) = Q(X)$. Si un tel polynôme existe, alors on observe que

$$Q(1-X) = P_p(1-X) + P_p(1-(1-X)) = Q(X).$$

Donc Q satisfait nécessairement $Q(X) = Q(1-X)$.

➢ *Est-ce suffisant ?* Si $Q(X) = Q(1-X)$ alors on a bien $u(P_p) = Q$ en posant :

$$P_p(X) = \frac{Q(X)}{2}.$$

• *Finalement :*

➢ si $Q(X) \neq Q(1-X)$ alors (E_2) n'a pas de solution.

➢ sinon, le polynôme $P_p(X) = \dfrac{Q(X)}{2}$ est une solution particulière. Conformément à $(*)$, on doit examiner le noyau de l'application u déjà donnée :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad (P \in \mathrm{Ker}(u)) \Longleftrightarrow (P(X) = -P(1-X)) \qquad (***).$$

En introduisant $Q(X) = P(X+1/2)$ on trouve que $(***)$ équivaut à

$$Q(X) = -Q(-X)$$

soit au fait que $Q(X)$ soit impair. Donc $Q(X)$ admet une écriture du type :

$$Q(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k X^{2k+1},$$

où $(b_k)_k$ est une suite nulle à partir d'un certain rang. Donc

$$P(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k (X-1/2)^{2k+1},$$

où $(b_k)_k$ est une suite nulle à partir d'un certain rang.

• En conclusion, et conformément à $(**)$:

➢ **Cas 1 :** si $Q(1-X) \neq Q(X)$ alors (E_2) n'a pas de solution.

➢ **Cas 2 :** si $Q(X) = Q(1-X)$, alors l'ensemble des solutions de (E_2) est exactement l'ensemble des polynômes du type :

$$\frac{Q(X)}{2} + \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k (X-1/2)^{2k+1},$$

$(b_k)_k$ étant une suite nulle à partir d'un certain rang.

► CENTRALE 5 — ***Factorisation d'un polynôme***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = (X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}$.

a) Déterminer le terme dominant de $P(X)$.

b) Prouver que les racines de $P(X)$ sont les : $\operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$ *pour* $k \in [\![1 \,;\, 2n]\!]$.

c) Factoriser $P(X)$ sur $\mathbb{C}[X]$, en déduire la valeur du produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(4 + \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$.

▷ **Réponse**

• Par le binôme de Newton, on remarque tout d'abord que le terme dominant de ce polynôme est $2i(2n+1)X^{2n}$.

• Soit $z \in \mathbb{C}$. On remarque que $z = i$ n'est pas racine de P, on suppose donc $z \neq i$ alors :

$$P(z) = 0 \Longleftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{2n+1} = 1 \Longleftrightarrow \exists k \in [\![0 \,;\, 2n+1]\!], \frac{z+i}{z-i} = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right).$$

L'égalité précédente équivaut à :

$$z\left(1 - \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)\right) = (-i)\left(1 + \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)\right).$$

La valeur $k=0$ est à exclure car elle mène à $0=-2i$, on peut donc diviser :

$$z=(-i)\frac{1+\exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)}{1-\exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)}=\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

par les formules d'Euler. On peut donc factoriser, en notant $x_k=\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$:

$$P(X)=2i(2n+1)\prod_{k=1}^{2n}(X-x_k).$$

On remarque que $x_{2n+1-k}=-x_k$ donc en regroupant les facteurs du produit :

$$P(X)=2i(2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2-\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)\qquad(*)$$

On utilise maintenant que, d'une part :

$$P(2i)=(3i)^{2n+1}-i^{2n+1}=\left(3^{2n+1}-1\right)\times i\times(-1)^n\qquad(**).$$

Par $(*)$, on trouve :

$$P(2i)=2i(2n+1)\times(-1)^n\times\prod_{k=1}^{n}\left(4+\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right).$$

En comparant à $(**)$:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(4+\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)=\frac{3^{2n+1}-1}{2(2n+1)}.$$

► CENTRALE 6 — ***Représentation intégrale des coefficients***

Soit $E=\mathbb{R}[X]$ et $A=\left\{P\in E,\int_{-\pi}^{\pi}|P(e^{it})|dt\leqslant 1\right\}$. Montrer que la fonction

$$f:P=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kX^k\in\mathbb{R}[X]\mapsto\max_{k\in\mathbb{N}}|a_k|$$

est bornée sur A.

▷ **Réponse**

• *Remarque :* la somme définissant P et le max de l'énoncé ont bien un sens puisque, si P est un polynôme, la suite $(a_k)_k$ est nulle à partir d'un certain rang.

• L'exercice passe par une représentation intégrale des coefficients :

$$\forall k\in\mathbb{N},a_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(e^{it})e^{-ikt}dt,$$

cas particulier de la Formule de Cauchy (sur les séries entières) étudiée à l'exercice 19 page 408.

Pour la prouver, il suffit d'écrire, si $P = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{it})e^{-ikt}dt &= \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{2\pi} \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t}dt}^{2\pi\delta_j^k} \\ &= a_k\end{aligned}$$

Grace à cette relation, si $\int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{it})|dt \leqslant 1$ alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, |a_k| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{it})|\,\overbrace{|e^{-ikt}|}^{=1} \leqslant \frac{1}{2\pi}.$$

On peut passer au max dans cette inégalité, d'où le résultat.

▶ X 7 — ***Une conséquence du théorème de Lucas***

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, non constant, tel que toutes ses racines ont une partie réelle strictement positive. Montrer qu'il en va de même pour les racines de P'.

> **Remarque :** plus généralement, on peut montrer que les racines complexes de P' sont dans l'*enveloppe convexe* de celles de P, c'est-à-dire dans l'intersection de tous les ensembles convexes qui contiennent toutes les racines de P. C'est le *théorème de Lucas*, dont la preuve utilise aussi la relation $(*)$ de la correction de cet exercice.

▷ **Réponse**

• Notons

$$P(X) = \alpha \prod_{j=1}^{p} (X - z_j)^{m_j}$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $m_j \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{Re}[z_j] > 0$ par hypothèse. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $P'(z) = 0$.

➢ **Cas 1 :** $P(z) = 0$. Alors z est l'un des z_j donc $\mathrm{Re}[z] > 0$.

➢ **Cas 2 :** $P(z) \neq 0$. En dérivant $P(X)$, on trouve :

$$P'(X) = \alpha \sum_{j=1}^{p} \left(m_j (X - z_j)^{m_j - 1} \prod_{i=1, i\neq j}^{p} (X - z_i)^{m_i} \right)$$

donc :

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{z - z_j} \qquad (*)$$

On introduit les écritures cartésiennes $z = x + iy$ et $z_j = \alpha_j + i\beta_j$ (donc $\alpha_j > 0$ par hypothèse) alors la relation $(*)$ donne :

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{(x-\alpha_j)m_j - i m_j (y - \beta_j)}{(x-\alpha_j)^2 + (y-\beta_j)^2} = 0 \overset{\mathrm{Re}}{\Longrightarrow} x = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{\alpha_j m_j}{(x-\alpha_j)^2 + (y-\beta_j)^2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{(x-\alpha_j)^2 + (y-\beta_j)^2}} > 0.$$

D'où le résultat dans tous les cas.

▶ Ensam 8 **Application des relations coefficients/racines**

Trouver $k \in \mathbb{C}$ tel que le polynôme

$$P(X) = X^4 - X^3 + kX^2 + 6X - 4$$

ait deux zéros de produit égal à 2, calculer le (ou les) polynôme(s) correspondant(s).

▷ **Réponse**

• *Remarque :* le sujet parle visiblement des racines *complexes* (sinon leur existence est déjà problématique).

• *Condition nécessaire.* Soit P un polynôme satisfaisant, il est scindé sur $\mathbb{C}$. On écrit :

$$P(X) = \prod_{i=1}^{4}(X - \lambda_i),$$

avec (quitte à permuter les racines) $\lambda_1 \times \lambda_2 = 2$. Alors $P(X)$ admet une factorisation du type :

$$P(X) = (X^2 + \alpha X + 2)(X^2 + \beta X - 2)$$

avec $\alpha = -\lambda_1 - \lambda_2$ et $\beta = -\lambda_3 - \lambda_4$. En développant, on trouve

$$\alpha + \beta = -1, \beta - \alpha = 3, \alpha\beta = k$$

donc $\beta = 1, \alpha = -2$ donc $k = -2$.

• *Est-ce suffisant ?* On vérifie que, pour $k = -2$:

$$P(X) = (X^2 + X - 2)(X - (1 + i))(X - (1 - i))$$

avec $(1 + i)(1 - i) = 2$: la condition $k = -2$ est donc nécessaire et suffisante, on trouve alors :

$$P(X) = X^4 - X^3 - 2X^2 + 6X - 4.$$

▶ X 9 **Etude des racines d'un polynôme**

Soient $n \geqslant 1$, $Q \in \mathbb{R}[X]$ noté $Q(X) = a_n X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. On suppose que tous les a_k sont strictement positifs pour $k \in [\![0 \,;\, n]\!]$. Montrer que Q admet une unique racine dans $]0, +\infty[$.

▷ **Réponse**

Nous allons faire une récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

• Pour $n = 1$, le résultat est trivial, $\dfrac{a_0}{a_1}$ est l'unique racine de Q sur $]0, +\infty[$.

• Supposons le résultat au rang n. Soit $Q(X) = a_{n+1}X^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec tous les a_k strictement positifs pour $k \in [\![0 \,;\, n+1]\!]$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence au rang n à Q', qui possède dont une unique racine dans $]0, +\infty[$, notée α. Comme Q' est de signe constant sur $[0, \alpha]$ et $Q'(0) < 0$, on a $Q' < 0$ dans $]0, \alpha[$ et de même $Q' > 0$ sur $]\alpha; +\infty[$ par sa limite en $+\infty$. D'où le tableau :

x	0		α		$+\infty$
$Q'(x)$		<0	0	>0	
$Q(x)$	$Q(0)<0$	$\searrow$	$Q(\alpha)<0$	$\nearrow$	

La fonction Q étant continue sur l'intervalle $[\alpha,+\infty[$, strictement croissante sur cet intervalle, elle induit une bijection de $[\alpha,+\infty[$ sur $[Q(\alpha),+\infty[$: comme $Q(\alpha)<0$, il existe un unique $\beta>\alpha$ tel que $Q(\beta)=0$. Comme $Q<0$ sur $[0,\alpha]$, β est l'unique racine de $Q(X)$ dans $]0,+\infty[$, d'où le résultat au rang $n+1$, et la preuve par récurrence.

► MINES 10 ▬ ***L'une des racines est le produit des deux autres***

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les coefficients d'un polynôme unitaire de degré 3 pour que le carré de l'une de ses racines soit le produit des deux autres.

▷ **Réponse**

• Notons $P(X)=X^3+aX^2+bX+c$.

• *Condition nécessaire.* Supposons qu'il existe $(\lambda,\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^3$ tel que $\lambda^2=\alpha\beta$ et :

$$P(X)=(X-\lambda)(X-\alpha)(X-\beta).$$

Par les relations coefficients/racines, avec la relation précédente :

$$\begin{aligned} & \left\{\begin{array}{l} \lambda+\alpha+\beta=-a \\ \lambda^2+\lambda(\alpha+\beta)=b \\ \lambda^3=-c \end{array}\right. \\ \Longrightarrow\ & \left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta=-a-\lambda \\ \lambda^2-\lambda(a+\lambda)=b \\ \lambda^3=-c \end{array}\right. \\ \Longrightarrow\ & \left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta=-a-\lambda \\ -\lambda a=b \\ \lambda^3=-c \end{array}\right. \\ \Longrightarrow\ & ca^3=b^3 \qquad (*) \end{aligned}$$

en élevant au cube la seconde équation dans le dernier système.

• *Est-ce suffisant ?* Réciproquement, si $(*)$ est vérifiée. Soit $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que :

$$\lambda^3=-c \qquad (**)$$

Alors $(*)$ donne $b^3=(-\lambda a)^3$ donc, en notant $j=\exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right)$, on a $b\in\big\{-\lambda a,-j\lambda a,-j^2\lambda a\big\}$. Quitte à changer λ en $j\lambda$ ou $j^2\lambda$ (la condition $(**)$ restera vérifiée), on peut supposer que

$$b=-\lambda a \qquad (***)$$

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tel que :

$$(X-\alpha)(X-\beta)=X^2+(a+\lambda)X+\lambda^2,$$

ce qui assure que :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta=-a-\lambda \\ \alpha\beta=\lambda^2 \end{array}\right. \qquad (****)$$