

CHAPITRE 1

NOTION DE VITESSE

1.1 Repérage dans l'espace

1.1.a Sur une droite

Dans un tel contexte, vous admettez que le repérage est particulièrement simple. Il suffit, pour localiser un point M , d'une abscisse x pour savoir où l'on se situe à condition que l'on fixe une origine O quelque part évidemment. Il est ensuite nécessaire de définir une orientation pour que la donnée d'une valeur de x positive ou négative puisse nous dire de quel côté se situe le lieu repéré. Enfin, la valeur de x ne prendra finalement du sens que si l'on fixe une échelle. La grandeur x est donc une longueur algébrique – notez que ce terme traduit le caractère positif ou négatif de x – dont l'unité légale est le mètre, voir le schéma de la figure 1.1.

Une échelle est un moyen de faire correspondre les distances réellement parcourues avec les distances mesurées sur la représentation schématique. Dans l'exemple de la figure 1.1, l'orientation a été choisie dans le sens de la circulation de la voie de droite. L'origine étant fixée sur l'une des bordures du pont, les abscisses négatives correspondent donc – toujours pour la voie de droite – aux événements ayant lieu avant d'être passé sous le pont et réciproquement pour les abscisses positives.

Considérons maintenant un point M qui se déplace au cours du temps sur la droite précédente : son abscisse devient alors une fonction du temps que l'on note $x(t)$. Afin de savoir précisément où se situe le point M au cours du temps, il est nécessaire de pouvoir associer temps et espace : $x \leftrightarrow t$. Vous êtes immédiatement plongé dans un monde à deux dimensions, cette situation nous

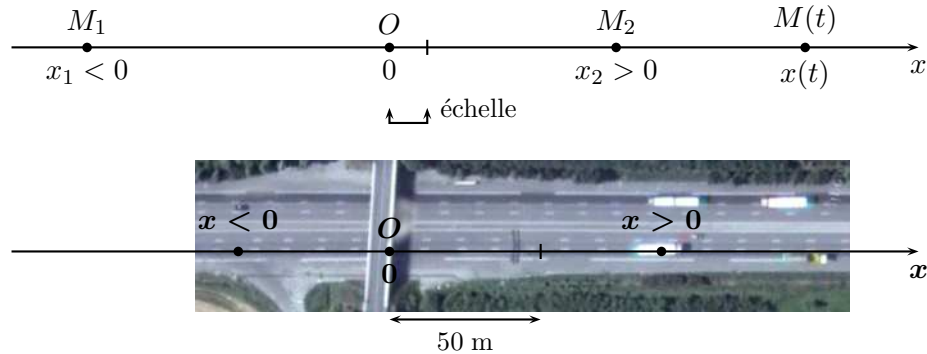


FIGURE 1.1 – Repérage sur une droite

permet de définir – dans le cadre d’un mouvement sur une droite – ce que l’on appelle en Physique un événement :

$$\text{Événement : } E = (x, t)$$

La notion d’événement tend à nous faire considérer temps t et espace x comme deux données en quelque sorte équivalentes pour étudier le mouvement du point M au cours du temps. La connaissance de x sans la donnée de t ne nous apporte rien, la connaissance de t sans la donnée de x non plus. Nous pouvons qualifier ce monde de monde 2D bien qu’il ne nous propose qu’un seul degré de liberté dans l’espace. Toutefois, il ne faudrait surtout pas commettre l’erreur de donner le même statut à t et à x . En effet, vous verrez plus tard, dans le cadre d’un cours de Thermodynamique, que le sens du temps est fixé : il s’écoule toujours du passé vers l’avenir. Il n’était nul besoin de faire référence à la Thermodynamique pour faire ce constat de bon sens. Par contre, il est important de savoir que cette perception intuitive et commune des choses trouve sa place dans les lois en Sciences Physiques. Ce sens d’écoulement du temps est plus précisément fixé par le second principe de la Thermodynamique.

Imaginons que le point M vienne de la gauche, passe par le point M_1 progresse au-delà du point M_2 puis revienne en arrière pour retourner d’où il vient. On peut ainsi voir se succéder les trois événements suivants :

$$E_1(x_1, t_1) \quad E_2(x_2, t_2 > t_1) \quad E_3(x_1, t_3 > t_1)$$

La notion de causalité se cache derrière ce constat. L’événement E_1 pourra être la cause de l’événement E_2 mais par contre l’événement E_2 ne sera jamais la cause de l’événement E_1 . Dans la phrase précédente, vous pouvez vous interroger sur le fait que nous sommes restés très prudents sur le lien de cause

à effet. Il n'est pas impossible que l'événement E_1 ne puisse jamais être la cause de l'événement E_2 , nous verrons cela plus loin dans le cadre du paragraphe 2.1.i. En conclusion, nous retiendrons que x et t ne sont donc finalement pas équivalentes ni comparables mais bien complémentaires et indispensables pour décrire le mouvement.

1.1.b Sur un plan

Nous passons, ici, à une situation qui nous réserve deux degrés de liberté dans l'espace. Cela est plutôt intéressant par le degré de liberté gagné. Mais il y a une contre-partie : le repérage d'un point va nécessiter des efforts supplémentaires. On passe d'un degré de liberté spatial à deux degrés, il faut donc réunir deux informations spatiales. On peut procéder de plusieurs façons. Commençons par la plus classique, voir le schéma de la figure 1.2. Si vous utilisez à nouveau le repérage proposé avant, la méthode consiste à aller chercher par le chemin le plus court la valeur $x(t)$ correspondant au point M . On dit que $x(t)$ est la coordonnée de M sur l'axe Ox . Maintenant, il est évident qu'un point M' , positionné comme cela est visible à la figure 1.2, possède la même coordonnée $x(t)$ que M . Il est indispensable d'avoir la seconde information. Reproduisons la méthode mais avec un axe différent de Ox . On obtient ainsi une seconde coordonnée $y(t)$. On constate bien maintenant que le couple de coordonnées $(x(t), y(t))$ permet de distinguer clairement les points M et M' .

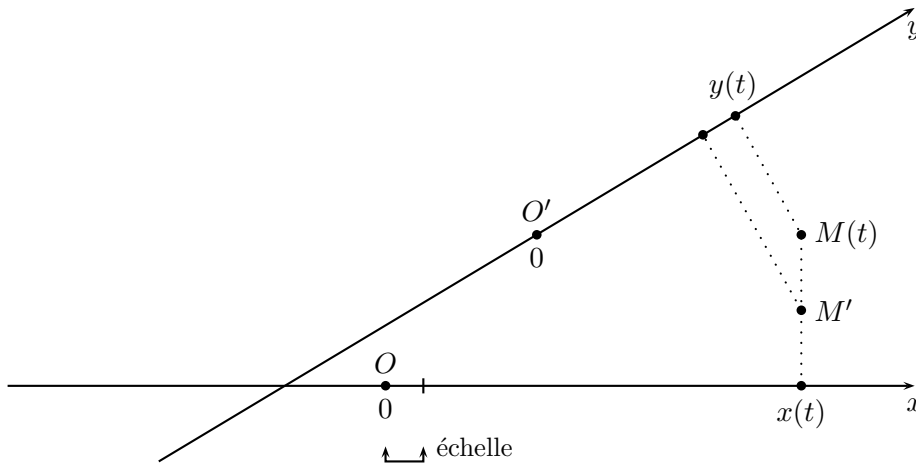


FIGURE 1.2 – Repérage sur un plan

La situation précédente est satisfaisante sur le plan théorique mais, franchement, la figure 1.2 vous a tout même surpris. Cela n'est pas très pratique. Commençons par utiliser un seul point origine plutôt que deux. De plus, dans

un contexte comme celui-là, tout le monde pense qu'un meilleur choix de l'orientation des axes de repérage est possible. Si les deux axes étaient perpendiculaires, nous nous retrouverions dans le contexte classique des coordonnées cartésiennes qui ont été particulièrement utilisées par le philosophe et mathématicien français RENÉ DESCARTES au début du XVIII^e siècle, d'où le qualificatif qui leur est attribué. La situation correspond au schéma de la figure 1.3. Le repérage du point M dans le plan est donc fixé par la donnée de deux longueurs algébriques. Si on lui ajoute la donnée du temps, l'événement est désormais défini par trois dimensions $E(x, y, t)$. Or, dans notre monde macroscopique classique, nous n'évoluons que rarement dans un espace plan. Pour décrire correctement la position d'un point, il convient donc le plus souvent d'ajouter une troisième dimension spatiale. x et y permettent alors un repérage dans un plan assimilable au sol et la troisième coordonnée z représente l'altitude. Dès lors, un événement relève de la 4D puisqu'il est défini par $E(x, y, z, t)$. Finalement, en faisant un tout petit peu de Physique, vous accédez à la 4D!

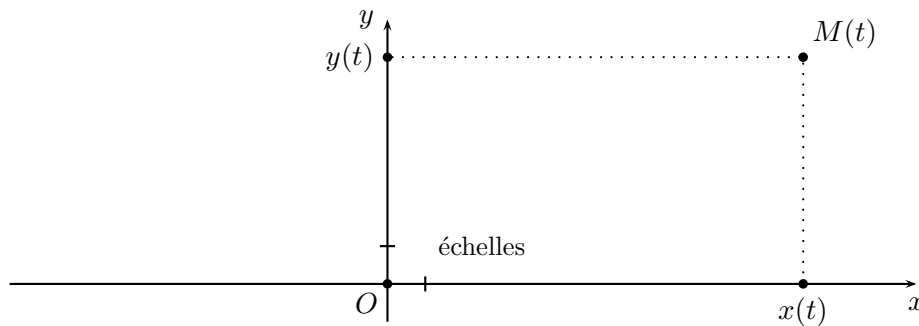


FIGURE 1.3 – Repérage cartésien sur un plan

En conclusion, nous retiendrons que cette méthode de repérage dans le plan ou dans l'espace s'est révélée très féconde pour étudier un certain nombre de mouvements, de trajectoires mais que pour d'autres, elle est nettement moins propice. On peut s'en rendre compte dans le cas de la trajectoire hélicoïdale suivie par la boule de la figure 1.4. Le repérage en trois dimensions spatiales est relativement compliqué si l'on procède avec des coordonnées cartésiennes classiques. En outre l'équation de la trajectoire qui en découle est plus difficile à obtenir et à exploiter.

1.1.c Repérage sur un plan, une autre approche

Reprenons le schéma de la figure 1.3 mais en focalisant notre attention sur la distance qui sépare le point M de l'origine O . Nous noterons $r = OM$ cette

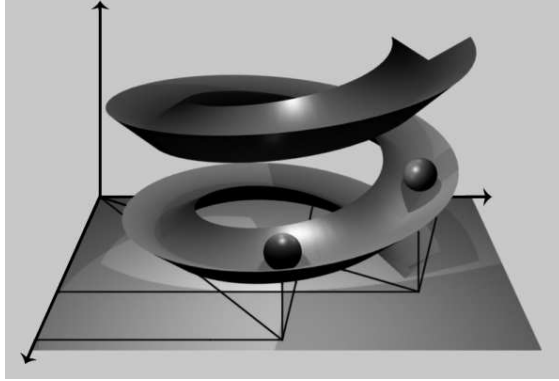


FIGURE 1.4 – Trajectoire hélicoïdale

distance que l'on considère toujours positive en Physique alors que cela n'est pas toujours le cas en Mathématiques¹. La seule donnée de $r(t)$ est insuffisante pour positionner le point M . En effet, une valeur de r autorise le point M à se situer sur une courbe que vous connaissez bien à savoir un cercle de centre O et de rayon r , voir le schéma de la figure 1.5. Il faut impérativement une seconde information comme dans le cas des coordonnées cartésiennes pour ne pas confondre M avec M' . Dans ce contexte, il est relativement naturel de se tourner vers la donnée d'un angle. Cet angle est défini entre la droite (OM) et une droite de référence. Il est assez habituel de prendre la droite Ox comme référence comme on peut le voir sur le schéma de la figure 1.5. Notez bien que la définition de l'angle impose une orientation qui va de la référence vers la direction de la droite (OM) dans le plan. L'angle θ est un angle algébrique, sur la figure il est donc exprimé par une valeur positive. Il était aussi possible de choisir comme droite de référence l'axe Oy auquel cas nous aurions défini un angle orienté allant de la droite Oy vers la droite (OM) . Compte tenu du fait que l'angle droit est de 90° ou de $\pi/2$ rad (radian), l'angle de repérage aurait été exprimé par $\pi/2 - \theta$.

Dans l'espace à 3D dans lequel nous vivons, une fois le repérage dans le plan réalisé, on ajoute l'altitude par rapport au plan notée z comme précédemment. On dispose alors d'un système de coordonnées appelées coordonnées polaires ou bien encore coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Le qualificatif de cylindrique est utilisé car ce système de coordonnées est particulièrement pratique pour définir par exemple la surface extérieure d'un cylindre. Essayons

1. On observera que considérer $r < 0$ revient à partir dans l'autre sens sur la droite (OM) . On peut se retrouver exactement au même point en considérant $r > 0$ mais en ajoutant l'angle π à l'angle θ correspondant, ce qui revient à faire un demi-tour. C'est pourquoi, on ne considérera que le cas $r > 0$.

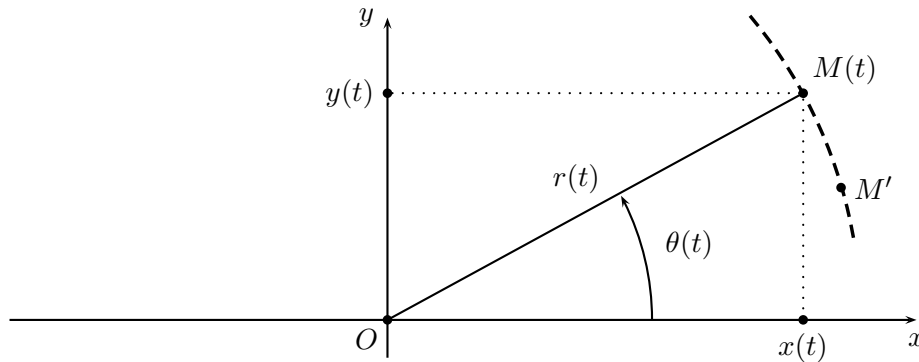


FIGURE 1.5 – Repérage polaire sur un plan

donc : cela donne $r = R$ (on vient de définir le rayon du cylindre), $\theta \in [0, 2\pi]$ (on dit que l'on fait le tour du cylindre) et $z \in [0, h]$ (on dit que la hauteur du cylindre est h). L'expression de la surface extérieure du cylindre aurait été plus délicate avec les coordonnées cartésiennes (x, y, z) .

Pour étudier un problème physique, le choix du système de coordonnées (x, y, z) ou bien (r, θ, z) – pour les deux seuls systèmes que nous connaissons, il en existe d'autres – sera effectué en fonction des propriétés de symétries que pourra posséder le système qui fera objet de notre étude.

Un événement sera défini par les données des trois paramètres d'espace et du paramètre temporel : $E = (r, \theta, z, t)$.

1.1.d Lien entre les deux repérages

Il est nécessaire de pouvoir transiter du repérage cartésien (x, y, z) vers le repérage cylindrique (r, θ, z) et réciproquement du repérage cylindrique vers le repérage cartésien. Dans chaque type de repérage z a la même signification. Les choses sont un peu différentes pour (x, y) et (r, θ) . Le problème de ces transitions est que cela implique des connaissances mathématiques en matière de triangle et de trigonométrie. Dans l'enseignement supérieur, la maîtrise de ces connaissances et leur utilisation de façon autonome vont vite devenir indispensables. Sur le schéma de la figure 1.6, on observe un triangle rectangle. Nous allons pouvoir appliquer le théorème de PYTHAGORE :

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{ou bien} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Il faut compléter cette relation d'au moins une seconde relation puisque nous utilisons à chaque fois un système de deux variables. Cette relation fait appel aux fonctions trigonométriques :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{OH}{OM} = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{\text{opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{HM}{OM} = \frac{y}{r} \\ \tan \theta = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{HM}{OH} = \frac{y}{x} \end{cases}$$

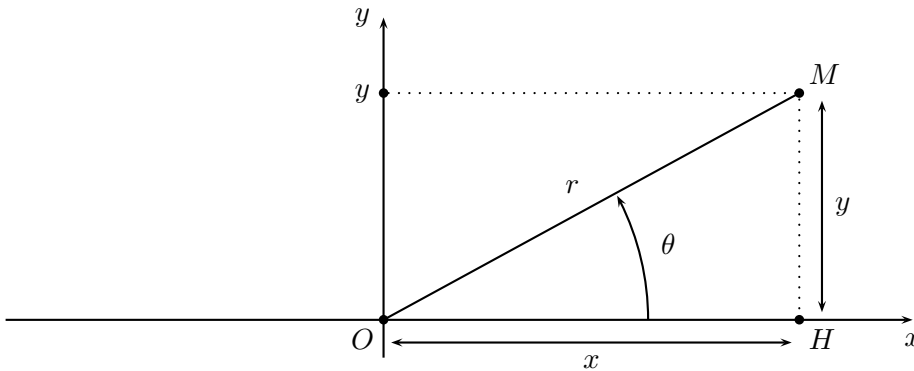


FIGURE 1.6 – Repérage polaire et repérage cartésien sur un plan

Il est alors sans doute plus simple d'exprimer x et y au moyen des coordonnées polaires :

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y = r \sin \theta$$

C'est l'occasion de rappeler une propriété importante des fonctions trigonométriques. Nous avons vu par le théorème de PYTHAGORE que $r^2 = x^2 + y^2$. Avec les relations que nous venons de définir, on obtient $r^2 = x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$. Nous n'avons pas le choix, il faut écrire :

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

1.1.e Représentation complexe

Nous nous limitons, dans ce paragraphe, au problème du repérage dans un plan pour lequel nous avons besoin de deux informations. Mais ce que vous allez voir est très utile en Sciences Physiques pour représenter toutes sortes de grandeurs. Pour apporter les deux informations nécessaires au repérage

du point M , on utilise un nombre complexe. Celui-ci est très souvent noté² en Mathématiques \underline{z} : le soulignement est une aide pour se souvenir que ce nombre a un statut spécial et qu'il fait intervenir un nombre très étonnant que l'on note i . On peut craindre le pire avec un qualificatif comme *complexe* or il n'est pas question de faire des Mathématiques mais juste d'utiliser un outil très pratique mis au point par d'éminents mathématiciens et inventé dès le XVI^e siècle par le mathématicien italien CARDAN. À partir des deux nombres réels x et y , on construit le nombre complexe \underline{z} selon :

$$\underline{z} = x + iy$$

C'est le mathématicien EULER qui a proposé la notation i à la fin du XVIII^e siècle. i est un nombre très surprenant, il l'était tellement pour DESCARTES³ que ce dernier avait proposé de le qualifier d'*imaginaire*, comme s'il était en quelque sorte le fruit de l'imagination débordante des mathématiciens sans que l'on puisse vraiment le concrétiser. Introduisons un peu de vocabulaire : x est appelée partie réelle de \underline{z} et y sa partie imaginaire. Le corollaire est donc le suivant :

- si $y = 0$ alors le nombre $\underline{z} = x$ est dit réel,
- si $x = 0$ alors le nombre $\underline{z} = iy$ est dit imaginaire pur,
- si $x \neq 0$ et $y \neq 0$ alors le nombre $\underline{z} = x + iy$ est dit complexe.

D'une façon générale, tout nombre complexe s'écrit comme la somme d'une partie réelle et d' i fois une partie imaginaire. On peut s'inspirer du repérage dans le plan pour construire ce que l'on appelle le plan complexe constitué par un axe des réels généralement représenté horizontalement et un axe des imaginaires – sous-entendu pur – qui, lui, sera vertical. Voir le schéma de la figure 1.7.

Imaginez que vous vouliez vous servir du plan des nombres complexes pour avoir une image du repérage dans le plan. Vous avez compris que la position du point M de coordonnées cartésiennes (x, y) correspond exactement à celle du nombre complexe \underline{z} . Dans ces conditions, on est nécessairement amené à déterminer la distance OM . Comment s'y prendre avec la représentation par un nombre complexe ? Avec la géométrie traditionnelle, on a $OM^2 = x^2 + y^2$ qui est un nombre on ne peut plus réel que l'on mesure avec une règle par exemple. Compte tenu de la remarque précédente, la première idée qui peut venir à l'esprit est de s'intéresser au carré du nombre complexe. Calculons : on a $\underline{z}^2 = (x + iy)^2 = x^2 + (iy)^2 + 2ixy$ en utilisant l'identité remarquable

2. Désolé, mais la lettre z n'a rien à voir avec l'altitude par rapport au plan vue avant, c'est juste le symbole fréquemment utilisé lorsqu'on parle de nombre complexe.

3. DESCARTES ayant vécu un siècle avant EULER, le nombre i était appelé imaginaire bien avant qu'EULER ne le note i .