

Renaud Carpentier
Benoît Dépret

PC
MP MPI
PSI PT

La physique en applications

140 problèmes corrigés contemporains

2^{ème} édition

**NOUVEAUX
PROGRAMMES** !



ellipses

CHAPITRE 1

OPTIQUE ONDULATOIRE

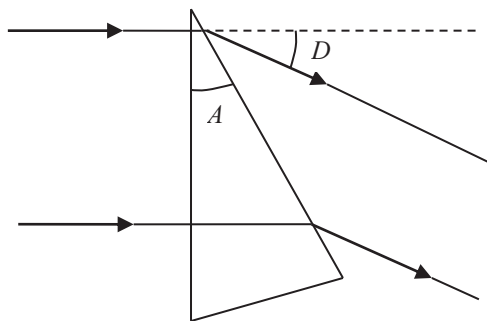
1.1 Les faisceaux de Bessel partie 1

TECHNICITE : * INITIATIVE : **

MOTS-CLES : optique géométrique, surfaces d'ondes.

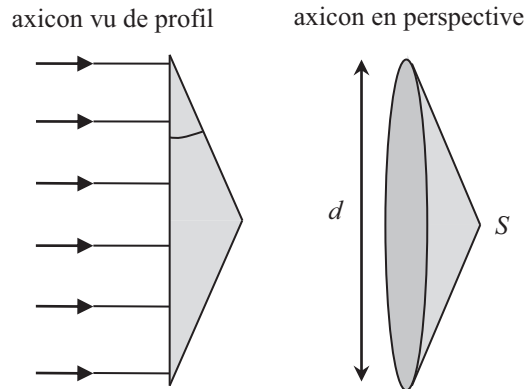
L'ablation laser est devenue une technique très répandue de structuration des matériaux. Son principe réside dans l'envoi d'impulsions lumineuses, pouvant être très brèves (de durée inférieure à la picoseconde = 10^{-12} s), à la surface de la pièce à traiter provoquant la sublimation et donc l'éjection de la matière illuminée. Une durée extrêmement courte des impulsions permet une ablation précise et localisée, la diffusion thermique dans le matériau n'ayant pas le temps de se faire. Cependant, si l'on désire effectuer une ablation sur une zone sub-micrométrique (c'est-à-dire de taille inférieure au micromètre), l'utilisation de faisceaux gaussiens entraîne de sérieuses limitations. Une solution technologique qui a été développée à la fin des années 2000 est l'utilisation de faisceaux de Bessel. Alors que la partie 1 propose d'étudier deux moyens de fabriquer de tels faisceaux, la partie 2 est consacrée à l'étude de leurs principales caractéristiques.

On considère dans un premier temps un prisme d'indice n et d'angle au sommet A . Il est éclairé par une onde plane monochromatique en incidence normale. Au passage du prisme, cette onde lumineuse est déviée d'un angle D .



- 1) A l'aide de la loi de Descartes, établir l'équation reliant A et D .
- 2) En calculant le chemin optique entre deux surfaces d'ondes de deux manières différentes, aboutir au même résultat.
- 3) Dans le cas où l'angle A est très petit, donner une expression approchée de D en fonction de A et n .

Les faisceaux de Bessel peuvent être obtenus en pratique de deux manières différentes. Une des méthodes est d'utiliser un axicon. Il s'agit d'une pièce optique ayant la forme d'un tronc de cône de révolution, constitué d'un matériau transparent d'indice n . On note d le diamètre de l'axicon à sa base et A l'angle que font les segments partant du sommet S de l'axicon avec sa base (voir figure suivante). L'axicon est éclairé par une onde plane arrivant sur sa base en incidence normale.



4) Tracer l'allure des trajectoires des différents rayons lumineux dans un plan contenant l'axe de révolution de l'axicon (ce dernier constituant l'axe optique).

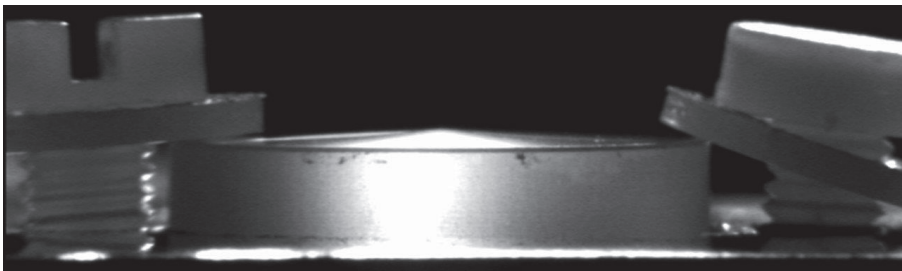
5) Exprimer la distance L entre le sommet S de l'axicon et le point T de l'axe optique au-delà duquel il n'y a plus aucun croisement de rayons lumineux.

Dans la zone où se croisent les rayons lumineux, le faisceau résultant de cette superposition forme ce que l'on appelle un faisceau de Bessel.

6) Proposer une autre méthode de création d'un faisceau de Bessel utilisant une lentille de diamètre Φ et de focale f et un diaphragme en forme d'anneau de rayon R et d'épaisseur négligeable. Quelles relations doivent vérifier Φ , f et R pour que le faisceau en sortie de ce système possède les mêmes caractéristiques que le faisceau créé à l'aide de l'axicon à proximité de l'axe optique ?

La photo ci-après représente un axicon de 12,7 mm de diamètre, en verre BK7 (indice 1,51) d'angle au sommet $A = 2^\circ$ provoquant un angle de déviation $D = 1^\circ$. Cet axicon était utilisé pour une expérience dans laquelle des atomes étaient piégés dans la figure d'interférences obtenue.

Axicon vu de profil

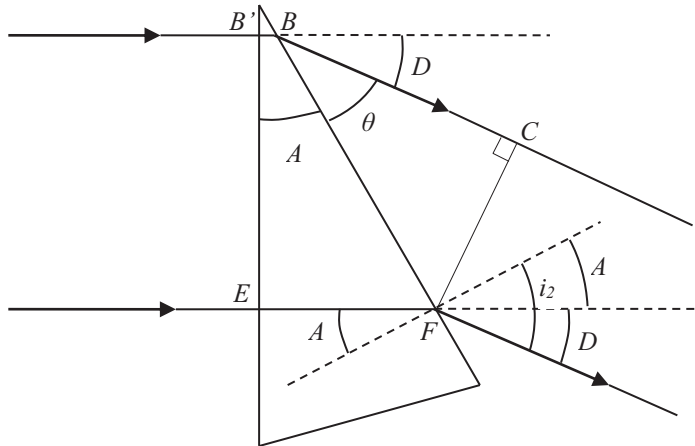


Auteur : Benoît Dépret (licence CC BY-SA)

CORRIGÉ

1) La loi de Descartes au point F donne $n \sin A = \sin i_2$. Or $i_2 = A + D$, d'où :

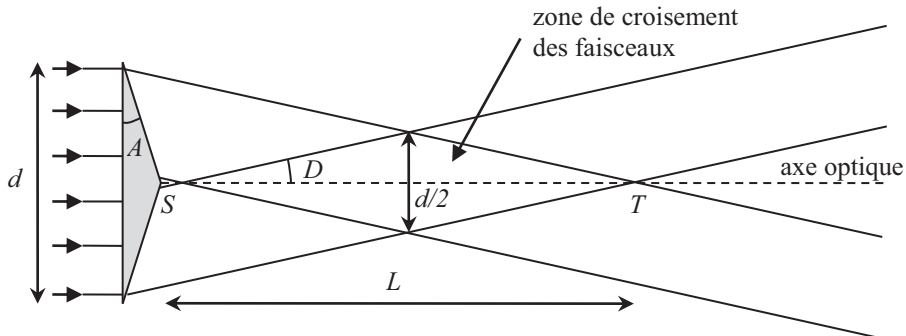
$$n \sin A = \sin(A + D)$$



2) Afin de simplifier les calculs, on peut raisonner sur un rayon passant au plus près du sommet du prisme, de sorte que la distance BB' soit négligeable. Le plan contenant la face d'entrée du prisme, et de ce fait $B'E$, est une surface d'onde car perpendiculaire aux rayons lumineux (d'après le théorème de Malus). Il en est de même pour le plan CF . Puisque le chemin optique entre deux surfaces d'onde ne dépend pas du choix du rayon, on a l'égalité des chemins optiques $(BC) = (EF)$. Or $(BC) = BC = BF \cos \theta$, avec $\theta = \frac{\pi}{2} - A - D$, d'où $(BC) = BF \sin(A + D)$. Par ailleurs, $(EF) = nEF = nBF \sin A$. On aboutit bien au résultat de la question précédente.

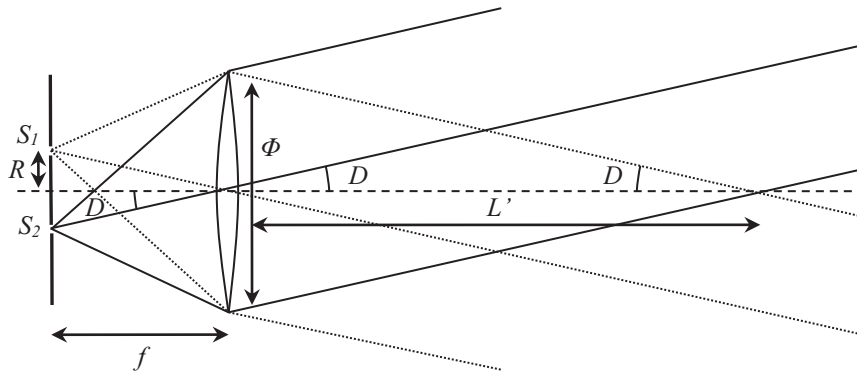
3) Si l'angle A est petit, $\sin A \approx A$. Puisque n est de l'ordre de l'unité, l'angle D sera également petit : $\sin(A + D) \approx A + D$. On obtient donc $D \approx (n - 1)A$.

4) A la sortie de l'axicon, les différents rayons vont être tous déviés d'un angle D puis vont couper l'axe optique.



5) Dans le plan de la figure, la zone de croisement a la forme d'un losange. Un constat géométrique amène à écrire $\tan D = \frac{d/4}{L/2}$, d'où $L = \frac{d}{2 \tan D} \approx \frac{d}{2D}$ si D est petit.

6) Le diaphragme annulaire doit être placé dans le plan focal objet de la lentille afin que les rayons émis par l'un des points de l'anneau soient parallèles entre eux à la sortie de la lentille. Dans la figure suivante, S_1 et S_2 sont deux points du diaphragme annulaire diamétralement opposés.



Il faut que les rayons issus d'un point de l'anneau émergent de la lentille en faisant un angle D avec l'axe optique. Ceci impose que $\frac{R}{f} = \tan D$. Le croisement des faisceaux se produit sur l'axe optique sur une distance L' en aval de la lentille telle que $\tan D = \frac{\Phi/2}{L'}$. La condition $L' = L$ impose donc que $\Phi = d$.

1.2 Masse effective d'un photon dans une microcavité

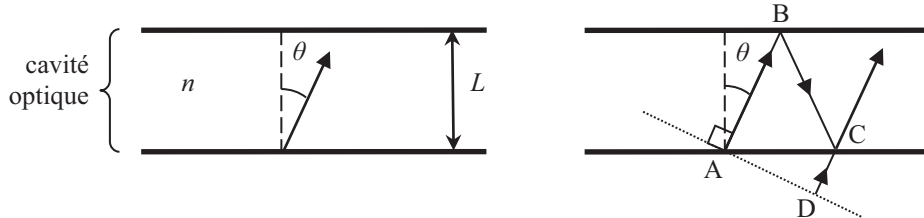
TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : Chemin optique, surface d'ondes.

Dans le cadre théorique de la mécanique quantique, il est possible de créer une cavité dans laquelle on peut associer une masse effective non nulle à un photon (qui est pourtant de masse nulle). Le but de l'exercice est de montrer que l'énergie « cinétique » d'un photon dans le plan de la cavité est similaire à celle d'une particule classique massive de masse m_{eff} que l'on propose de déterminer. On donne la constante de Planck $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J.s, la charge et la masse de l'électron $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C et $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg et enfin la vitesse de la lumière dans le vide $c = 3 \cdot 10^8$ m.s⁻¹.

La cavité est constituée d'un milieu supposé transparent d'indice n séparé par deux miroirs supposés parfaits, parallèles, de taille infinie et distants de L . On considère un photon, représenté par une onde lumineuse de fréquence f , évoluant dans la cavité en effectuant des

allers et retours entre les deux miroirs et dont la direction de propagation fait un angle θ (entre 0 inclus et $\pi/2$ exclus) par rapport à la normale aux miroirs. On montre que seuls certains modes de propagation peuvent exister dans la cavité, ceux vérifiant la condition suivante : en assimilant l'onde lumineuse à une onde plane occupant tout l'espace homogène, celle-ci doit se superposer **en phase** avec elle-même après réflexion sur chacun des miroirs.



- 1) Qu'appelle-t-on « onde plane » en optique ?
- 2) En omettant le déphasage induit par la réflexion sur les miroirs, traduire cette condition en termes de chemins optiques en utilisant les points A, B, C et D.
- 3) En déduire la relation $2nL \cos \theta = p \frac{c}{f}$ où p est un entier naturel non nul.
- 4) Exprimer la vitesse v_{\parallel} du photon selon le plan de la cavité en fonction de c , n et θ .
- 5) En se limitant aux petits angles et en effectuant un développement limité à l'ordre 2 en θ , exprimer l'énergie E du photon en fonction entre autres de v_{\parallel} .
- 6) En déduire l'expression de la masse effective m_{eff} du photon dans la cavité en assimilant celui-ci à une particule ayant une énergie non nulle au repos E_0 et se déplaçant uniquement le long de la cavité à la vitesse v_{\parallel} .

Dans un semi-conducteur, il existe des entités quantiques appelées des « excitons », formés par une paire « électron-trou » liée par interaction coulombienne. Les excitons peuvent être vus comme des quasi-particules évoluant dans le semi-conducteur. A titre informatif, l'école polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL) a mis au point en 2018 un transistor basé sur les excitons qui peut fonctionner à température ambiante. Cette technique ouvre la voie à une panoplie de nouvelles possibilités en « excitonique », branche de la physique appliquée qui, après celle de la photonique et de la spintronique, s'avère des plus prometteuses pour l'électronique du futur (source wikipédia). Si la cavité est constituée d'un matériau semi-conducteur, un photon évoluant à l'intérieur de celle-ci peut être couplé à un exciton. On montre que le couplage n'est cependant significatif que si l'énergie du photon est proche de celle de l'exciton. Selon la mécanique quantique, il se crée alors un état mixte lumière-matière, appelé un « polariton de cavité », observé expérimentalement pour la première fois en 1992.

On cherche à créer des polaritons dans une cavité de largeur $L = 1,0 \mu\text{m}$ constituée de semi-conducteur AlGaAs (arséniure de gallium-aluminium) d'indice $n = 3,5$ et dans lequel l'énergie des excitons vaut $E_{ex} = 1,58 \text{ eV}$ (légèrement inférieure à la largeur de la bande interdite du semi-conducteur).

- 7) Proposer une valeur de p du mode optique associé au polariton dans la cavité pour des angles θ proches de zéro. Calculer la longueur d'onde (calculée dans le vide) pour $\theta = 0$. Dans quel domaine du spectre électromagnétique se trouve-t-on ?

- 8) Calculer m_{eff} et comparer à la masse d'un électron.

La faible valeur de m_{eff} permet de créer des condensats de Bose-Einstein de polaritons à des températures beaucoup plus élevées qu'avec des atomes. Dans un condensat de Bose-Einstein (observé expérimentalement pour la première fois en 1995 avec des atomes de rubidium), toutes les particules occupent le même état quantique, de sorte que le nuage de particules se comporte comme une seule onde macroscopique cohérente, illustrant la dualité onde-corpuscule. Les lecteurs intéressés peuvent consulter l'article suivant, répertoriant différentes expériences réalisées avec des polaritons de cavité :

J. Bloch et A. Amo, *Fluides quantiques de lumière dans les microcavités à semi-conducteurs*, Reflets de la Physique n°49 (mai-juin 2016) pp. 4-9

CORRIGÉ

- 1) En optique, une onde est dite plane lorsque les surfaces d'ondes sont des plans.

2) Le théorème de Malus énonce que les surfaces d'ondes sont perpendiculaires aux rayons lumineux. Les points A et D appartiennent donc à la même surface d'ondes, représentée par la ligne en pointillé. En notant φ le retard de phase de l'onde, on a donc $\varphi_A = \varphi_D$ puisqu'une surface d'ondes est une surface équiphasé. Pour le rayon, noté 1, effectuant le trajet direct de D à C, le retard de phase de l'onde en C vaut

$$\varphi_{C,1} = \varphi_D + \frac{2\pi}{\lambda_0}(\text{DC}) \text{ en notant } \lambda_0 \text{ la longueur d'onde dans le vide, } (\text{DC}) = n \text{ DC désignant}$$

le chemin optique de D à C en suivant le rayon lumineux se propageant dans un milieu d'indice n . De même, pour le rayon, noté 2, partant de A et subissant les deux réflexions sur

les miroirs pour arriver à C, il vaut $\varphi_{C,2} = \varphi_A + \frac{2\pi}{\lambda_0}(\text{AC})$ avec $(\text{AC}) = n(\text{AB} + \text{BC})$.

D'après l'énoncé, les modes de propagation sont tels qu'il existe un entier relatif p tel que $\varphi_{C,2} = \varphi_{C,1} + 2\pi p$ (de manière à ce que les deux ondes se retrouvent en phase en C). La combinaison des différentes relations entraîne que $n(\text{AB} + \text{BC} - \text{DC}) = p\lambda_0$.

- 3) On remarque que $\text{AB} = \text{BC} = \frac{L}{\cos \theta}$ et $\text{DC} = \text{AC} \sin \theta$ avec $\text{AC} = 2L \tan \theta$. D'où

$$\text{AB} + \text{BC} - \text{DC} = \frac{2L}{\cos \theta} - 2L \tan \theta \sin \theta = 2L \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta} = 2L \cos \theta. \text{ Comme } \lambda_0 = \frac{c}{f}, \text{ on}$$

obtient bien la relation $2nL \cos \theta = p \frac{c}{f}$. Puisque $\cos \theta > 0$, p se trouve être nécessairement un entier naturel non nul.

4) La vitesse v du photon est celle de la lumière se propageant dans un milieu d'indice n , c'est-à-dire $v = \frac{c}{n}$. Sa composante colinéaire au plan de la cavité vaut

$$v_{\parallel} = v \sin \theta \text{ par simple projection. On a donc } v_{\parallel} = \frac{c}{n} \sin \theta.$$

5) L'énergie d'un photon dont l'onde associée possède une fréquence f vaut $E = hf$ (relation de Planck-Einstein). De la question 3, cette énergie dépend de l'angle θ par

$E = p \frac{hc}{2nL \cos \theta}$. En se limitant aux faibles angles, un développement limité à l'ordre 2 en

$$\theta \text{ donne } \frac{1}{\cos \theta} \approx \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{2}} \approx 1 + \frac{\theta^2}{2} \text{ et } \sin \theta \approx \theta. \text{ On en déduit } \boxed{E \approx p \frac{hc}{2nL} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{n^2}{c^2} v_{\parallel}^2 \right)}.$$

6) La formule précédente peut se mettre sous la forme $E = E_0 + \frac{1}{2} m_{eff} v_{\parallel}^2$, où E_0 désigne l'énergie au repos (cas où $v_{\parallel} = 0$) et $\frac{1}{2} m_{eff} v_{\parallel}^2$ est l'énergie cinétique d'une

particule de masse m_{eff} se déplaçant à la vitesse v_{\parallel} . Par identification, $\boxed{E_0 = p \frac{hc}{2nL}}$ et

$$\boxed{m_{eff} = \frac{n^2 E_0}{c^2}}.$$

7) L'énoncé précise que le couplage entre le photon et l'exciton créant le polariton n'est possible que si leurs énergies sont presque égales. Pour de faibles angles ($\theta \ll 1$), l'énergie du photon vaut environ E_0 . On cherche donc la valeur de p telle que $E_0 \approx E_{ex}$,

c'est-à-dire $\boxed{p = \frac{2nLE_{ex}}{hc}}$. Avec $n = 3,5$, $L = 1,0 \mu\text{m}$, $E_{ex} = 1,58 \text{ eV} = 2,53 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, on trouve $p = 8,94$. p devant être un entier, on choisit le plus proche $\boxed{p = 9}$. Pour $\theta = 0$, la

longueur d'onde associée au photon vaut $\boxed{\lambda_0 = \frac{hc}{E_{ex}}}$, valant environ $\boxed{780 \text{ nm}}$ qui

correspond au proche infra-rouge (la limite du spectre visible à 800 nm est une valeur approchée simple à retenir, une valeur plus précise est plutôt aux alentours de 750 nm...).

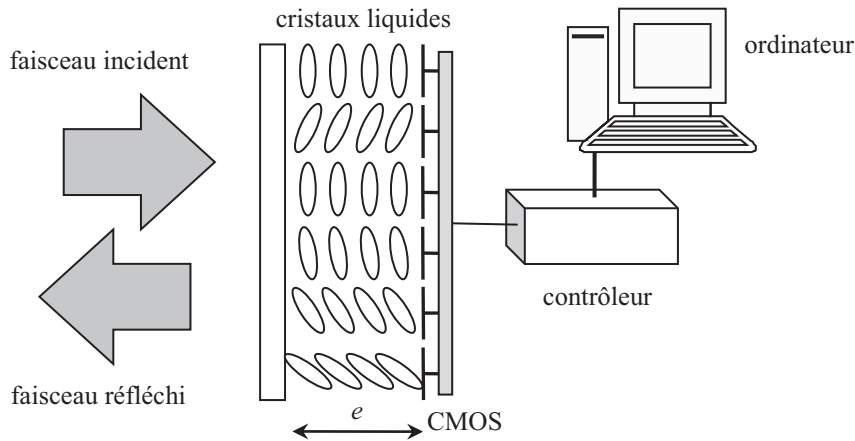
8) Lorsqu'il y a couplage, la masse effective du photon vaut $\boxed{m_{eff} = \frac{n^2 E_{ex}}{c^2}}$, valant ici $\boxed{m_{eff} = 3,4 \cdot 10^{-35} \text{ kg}}$. On constate que $\boxed{m_{eff} \approx 4 \cdot 10^{-5} m_e}$. La quasi-particule ainsi créée dans la microcavité est plus légère que l'électron de presque cinq ordres de grandeur !

1.3 Modulateur spatial de lumière

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

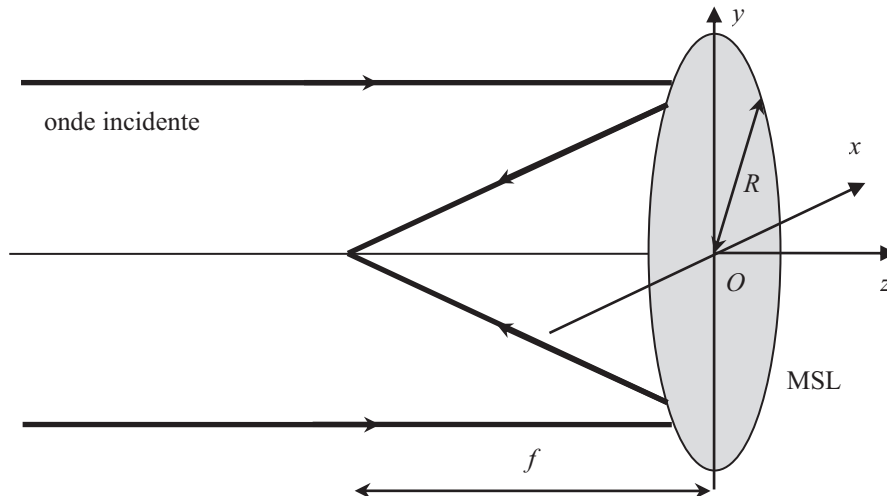
MOTS-CLES : surfaces d'ondes, chemin optique, critère de Nyquist-Shannon.

Un modulateur spatial de lumière (MSL) est un dispositif optique permettant de faire varier point par point la phase ou l'intensité d'un faisceau lumineux. Nous étudions ici un MSL de phase à cristaux liquides dont le schéma de principe est représenté sur la figure suivante.



Les cristaux liquides (CL), représentés par les ellipses sur la figure, peuvent s'orienter en fonction de la tension appliquée à chaque électrode (de technologie CMOS : *Complementary Metal Oxide Semiconductor*). Le retard de phase subi par l'onde effectuant un aller et retour dans le MSL dépend de l'alignement plus ou moins prononcé des CL. Il est ainsi possible de moduler sur chaque pixel la phase de l'onde réfléchi par le MSL.

On modélise le MSL par une lame mince circulaire de rayon R , d'épaisseur e et d'indice effectif $n(x,y)$ non uniforme. On considère une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde λ arrivant en incidence normale sur le MSL. On néglige la réflexion sur la face avant de la lame et l'on suppose que la face arrière réfléchit entièrement l'onde. On cherche à déterminer le profil d'indice $n(x,y)$ permettant de focaliser le faisceau réfléchi à une distance f du MSL (voir figure suivante).



1) Tracer les surfaces d'onde des ondes incidentes et réfléchies dans le plan Oyz .

2) A l'aide de calculs de chemin optique et en considérant que $f \gg R \gg e$, montrer que l'indice doit avoir une expression de la forme $n(x,y) = n_0 - \frac{x^2 + y^2}{4ef}$.