

LA PHYSIQUE-CHIMIE  
AUX CONCOURS  
SÉLECTION DE SUJETS PORTANT  
SUR LE PROGRAMME DE 1<sup>re</sup> ANNÉE

ANNALES CORRIGÉES



TOM MOREL | RACHEL COMTE

LA PHYSIQUE-CHIMIE  
AUX CONCOURS  
SÉLECTION DE SUJETS PORTANT  
SUR LE PROGRAMME DE 1<sup>re</sup> ANNÉE

ANNALES CORRIGÉES

*l'intégrale*

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2019

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

ISBN 978-2-10-079111-8

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup> a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

<b>Avant-propos</b> . . . . .	5
<b>Constantes fondamentales</b> . . . . .	6
<b>1 Oscillateur harmonique</b> . . . . .	<b>7</b>
1.1 Mesure du champ de pesanteur (Centrale-Supélec 2018) . . . . .	7
1.2 La toile de l'araignée (Mines-Ponts 2012) . . . . .	8
1.3 Modélisation d'un comportement (Centrale-Supélec 2017) . . . . .	14
<b>2 Ondes</b> . . . . .	<b>17</b>
2.1 Application des ondes sonores (CCINP 2016) . . . . .	17
2.2 Vibrations d'une corde de piano (Centrale-Supélec 2013) . . . . .	21
2.3 Protection acoustique (Centrale-Supélec 2015) . . . . .	25
<b>3 Optique géométrique</b> . . . . .	<b>29</b>
3.1 Lamelle de verre (CCINP 2015) . . . . .	29
3.2 Étude de fibres optiques (CCINP 2018) . . . . .	31
<b>4 Lentilles minces</b> . . . . .	<b>41</b>
4.1 Lunette astronomique (CCINP 2015) . . . . .	41
4.2 Lamelle d'épaisseur $e$ (CCINP 2015) . . . . .	43
4.3 Appareil photographique (Centrale-Supélec 2015) . . . . .	50
<b>5 Mécanique quantique</b> . . . . .	<b>53</b>
5.1 Dualité onde-corpuscule (CCINP 2016) . . . . .	53
5.2 Neutron dans le champ de pesanteur (Centrale-Supélec 2017) . . . . .	57
<b>6 Électrocinétique en régime continu</b> . . . . .	<b>61</b>
6.1 Calcul de pertes (CCINP 2018) . . . . .	61
6.2 Propulsion électromagnétique (Centrale-Supélec 2017) . . . . .	62
<b>7 Régime sinusoïdal forcé - Filtrage</b> . . . . .	<b>69</b>
7.1 Modélisation électrique d'un mur (CCINP 2016) . . . . .	69
7.2 Oscillation d'un pont (Mines-Ponts 2016) . . . . .	75
7.3 Capteur de position (Centrale-Supélec 2018) . . . . .	80

<b>8 Cinématique et dynamique</b>	<b>85</b>
8.1 Stabilité du nuage (CCINP 2015)	85
8.2 Le saut de Felix Baumgartner (Centrale-Supélec 2017)	86
8.3 Trajectoire d'un volant de badminton (X/ENS 2015)	89
8.4 Mouvement d'une plateforme de mer (CCINP 2019)	96
<b>9 Énergie en référentiel galiléen</b>	<b>105</b>
9.1 De la molécule à l'oscillateur harmonique (Mines-Ponts 2017)	105
9.2 Pression négative (Mines-Ponts 2019)	108
9.3 Chute libre (Centrale-Supélec 2017)	111
9.4 Pelage d'un ruban collé (Centrale-Supélec 2017)	112
<b>10 Particules chargées</b>	<b>117</b>
10.1 Tube d'oscilloscope (CCINP 2017)	117
10.2 Confinement magnétique (Centrale-Supélec 2016)	119
10.3 Affichage par tubes cathodiques (Centrale-Supélec 2014)	123
<b>11 Loi du moment cinétique</b>	<b>127</b>
11.1 Étude de deux pendules couplés (X/ENS 2015)	127
11.2 Gravimètre à fléau (Centrale-Supélec 2018)	130
11.3 Chute d'un arbre mort (Mines-Ponts 2019)	134
<b>12 Champ de forces centrales</b>	<b>143</b>
12.1 Mission Parker Solar Probe (Centrale-Supélec 2018)	143
12.2 Modèles de l'atome (CCINP 2019)	145
12.3 Comète 67P Churyumov-Gerasimenko (Mines-Ponts 2017)	153
<b>13 Thermodynamique</b>	<b>159</b>
13.1 Conditionnement d'air (Centrale-Supélec 2018)	159
13.2 Propriétés physiques de l'eau (CCINP 2015)	161
13.3 Refroidissement d'un capteur (Mines-Ponts 2016)	164
13.4 Circuit d'une centrale nucléaire (Centrale-Supélec 2016)	167
<b>14 Statique des fluides (PCSI)</b>	<b>177</b>
14.1 Agitation thermique (Centrale-Supélec 2016)	177
14.2 Formation et stabilité d'un nuage (CCINP 2015)	178
14.3 Modèle polytropique du Soleil (Mines-Ponts 2017)	182
<b>15 Champ magnétique</b>	<b>187</b>
15.1 Mesure du champ géomagnétique (Centrale-Supélec 2016)	187
15.2 Champ tournant (CCINP 2017)	190
15.3 Dipôles magnétiques (CCINP 2017)	192

<b>16 Induction et force de Laplace</b>	<b>197</b>
16.1 Sustentation d'un train (Centrale-Supélec 2018)	197
16.2 Catapultes électromagnétiques (X/ENS 2016)	199
16.3 Transducteur électrodynamique (Mines-Ponts 2018)	207
<b>17 Transformations physico-chimiques</b>	<b>213</b>
17.1 Dépolymérisation du paralaldéhyde (X/ENS 2015)	213
17.2 Synthèse de l'acide sulfurique (Centrale-Supélec 2017)	216
<b>18 Cinétique chimique</b>	<b>221</b>
18.1 Suivi de la décomposition du bleu brillant (CCINP 2016)	221
18.2 Propulseur à hydrazine (Centrale-Supélec 2018)	227
<b>19 Transformation en solution aqueuse</b>	<b>233</b>
19.1 Le plomb en solution (CCINP 2017)	233
19.2 Pile à hydrogène (CCINP 2018)	234
19.3 Basicité d'un béton (Mines -Ponts 2016)	236
19.4 Précipitation du iodure d'argent (Mines-Ponts 2018)	238
19.5 Chimie du lithium (Mines-Ponts 2015)	241
<b>20 Diagramme E-pH</b>	<b>247</b>
20.1 Autour du silicium (Mines-Ponts 2017)	247
20.2 Le bioéthanol (Mines-Ponts 2018)	249
20.3 Pile à hydrazine (Centrale-Supélec-Supélec 2017)	254
<b>21 Cristallographie</b>	<b>259</b>
21.1 Autour du silicium (Mines-Ponts 2017)	259
21.2 Laser au saphir (Centrale-Supélec 2014)	261
21.3 Olivines ferro-magnésiennes (CCINP 2014)	264
<b>22 Réactivité et transformations en chimie organique (PCSI)</b>	<b>267</b>
22.1 Le glucose en synthèse (X/ENS 2017)	267
22.2 Synthèse de la citréoviridine (CCINP 2013)	277
<b>23 Outils pour la physique</b>	<b>287</b>
23.1 Le vol des papillons (Mines-Ponts 2012)	287
23.2 Lanceur Ariane 5 (X/ENS 2018)	288



# Avant-propos

Cet ouvrage regroupe une sélection d'extraits de sujets des écrits de concours Centrale-Supélec, Mines-Ponts, Polytechnique/Écoles Normales Supérieures (X/ENS) et Concours Commun INP (CCINP). Tous les sujets proposés sont récents (2012-2019) et conformes aux programmes actuels. Sauf cas exceptionnels, les sujets n'ont pas été modifiés ni simplifiés et sont accessibles dès la première année de classe préparatoire.

Nous avons rédigé cet ouvrage pour trois raisons principales :

- La première est de permettre aux étudiants de première année de classe préparatoire de réviser chaque chapitre du cours avec des sujets effectivement tombés aux concours. Trop souvent, les étudiants pensent qu'il faut attendre la deuxième année pour pouvoir faire un vrai sujet de concours, mais ce n'est pas le cas. Au contraire, commencer à faire ces sujets dès le début de la formation est important : les révisions sont alors plus concrètes, plus motivantes, et adaptées au niveau demandé dans les concours les plus sélectifs.
- La deuxième est aussi d'accompagner les étudiants de deuxième année dans leurs révisions. En effet, le temps accordé aux révisions des notions vues en première année est souvent trop court : en reprenant les sujets de concours proposés dans cet ouvrage, l'entraînement peut être concis, concret et efficace.
- La troisième est de permettre aux étudiants, dès la première année, de repérer les attentes des divers concours, chacun d'entre eux étant différent sur la forme (questions plus ou moins guidées, plus ou moins longues, etc.). Il est bon de repérer ces particularités dès le début de la formation pour une meilleure préparation. À ce titre, le lecteur ne doit pas s'étonner quant à la difficulté de certains sujets issus de concours « accessibles ». Il ne s'agit que d'extraits de sujets qui comptent plusieurs dizaines de questions et ceux retenus ne sont pas forcément ceux tirés des parties les plus accessibles.

Les sujets de concours proposés ont été regroupés selon les chapitres conformes au programme de première année de classe préparatoire. Lorsqu'ils ont été modifiés, ce qui se produit rarement, les éléments ajoutés apparaissent en italique.

Chaque extrait de sujet est suivi d'une proposition de corrigé, dans laquelle nous avons choisi d'intégrer des extraits de rapports de jury. Ces rapports sont importants à lire car ils ciblent les difficultés classiques retrouvées dans les copies de concours. Ils permettront de bien mettre en avant les éléments fondamentaux à retenir ou bien les erreurs à éviter.

Enfin, nous précisons que les valeurs numériques des constantes fondamentales ne sont pas rappelées dans chaque sujet mais sont listées ci-dessous. Même si elles seront

indiquées sur les sujets le jour du concours, il est tout de même bon d'en retenir les ordres de grandeur.

Les auteurs

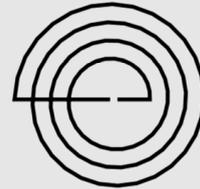
## Constantes fondamentales

- Nombre d'Avogadro :  $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Constante gravitationnelle :  $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$
- Célérité de la lumière dans le vide :  $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
- Constante de Boltzmann :  $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
- Charge élémentaire :  $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
- Constante des gaz parfaits :  $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$
- Constante de Planck :  $h = 2\pi \hbar = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$
- Constante de Faraday :  $F = 9,65 \times 10^4 \text{ C.mol}^{-1}$
- Masse de l'électron :  $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- Masse du proton :  $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
- Masse du neutron :  $m_n = 1,68 \times 10^{-27} \text{ kg}$
- Permittivité du vide :  $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
- Perméabilité du vide :  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

# Oscillateur harmonique

## Énoncé 1.1 : Mesure du champ de pesanteur (Centrale-Supélec 2018)

La mesure de l'élongation d'un ressort vertical au bout duquel est suspendue une masse permet de mesurer les variations du champ de pesanteur. L'ingénieur Lucien LaCoste a inventé un ingénieux ressort à spirale de longueur au repos nulle (figure ci-contre).



1. Si le champ de pesanteur terrestre varie de  $10 \mu\text{gal}$ , que vaut la variation de l'élongation d'un ressort usuel d'un laboratoire de lycée ? On donne  $1 \text{ gal} = 1,00 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-2}$ .
2. Quel est l'intérêt d'utiliser un ressort de longueur au repos nulle ?

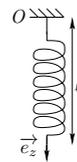
1. Prenons un point matériel de masse  $m$  attaché à un ressort vertical. Le principe fondamental de la dynamique appliqué au point M en référentiel terrestre supposé galiléen s'écrit à l'équilibre :

$$mg - k(\ell - \ell_0) = 0$$

Un ressort usuel a une constante de raideur de l'ordre de  $10 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ . L'élongation  $X$  est  $X = \ell - \ell_0$ . Pour une masse typique de l'ordre de  $100 \text{ g}$ , si  $g$  varie de  $\Delta g = 10 \mu\text{gal}$ , l'élongation du ressort devient

$$\Delta X = \frac{m}{k} \Delta g = 10^{-9} \text{ m} = 1 \text{ nm}$$

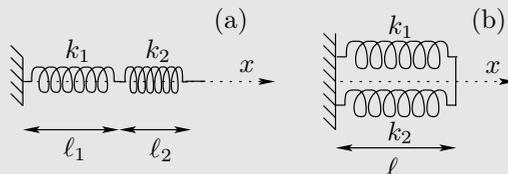
2. Un ressort de longueur à vide nulle permet de relier directement la longueur du ressort au poids donc à  $g$  sans avoir à mesurer  $\ell_0$ . **On peut donc plus facilement mesurer des variations de  $g$ .** Cependant, au vu de la valeur numérique précédente, cette mesure peut s'avérer très difficile à faire.



**Énoncé 1.2 : La toile de l'araignée (Mines-Ponts 2012)**

**Modélisation d'un fil élastique**

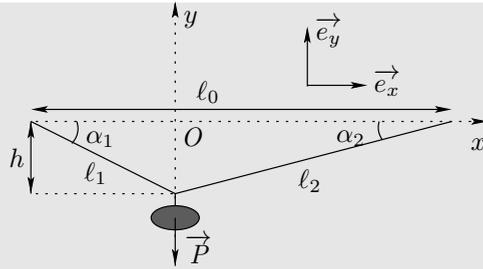
1. On considère d'abord un ressort élastique, régi par la loi de Hooke, dont on note  $k$  la raideur et  $\ell_0$  la longueur à vide ; on note aussi  $s = 1/k$  la souplesse du ressort. Quelle est la force exercée par ce ressort sur son extrémité lorsqu'il acquiert la longueur  $\ell$  ? On précisera le sens de cette force sur un schéma.
2. On associe en **série** (cf. figure a) deux ressorts élastiques, alignés, de raideurs  $k_1$  et  $k_2$ , de longueurs à vide  $\ell_{01}$  et  $\ell_{02}$ , formant un système élastique unique de longueur totale  $\ell = \ell_1 + \ell_2$ . Montrer que l'ensemble est équivalent à un ressort élastique unique de longueur à vide  $\ell_0 = \ell_{01} + \ell_{02}$  dont on exprimera la constante de raideur  $k$  en fonction de  $k_1$  et  $k_2$ . Ce ressort est-il *plus souple* ou *plus raide* que chacun des deux ressorts dont il est formé ?



3. On associe maintenant en **parallèle** (cf. figure b) les deux ressorts élastiques de la question précédente, formant un système élastique unique de longueur  $\ell = \ell_1 = \ell_2$ . Déterminer la raideur  $k$  et la longueur à vide  $\ell_0$  du ressort élastique unique équivalant à cette association. Commenter sa souplesse.
4. En vous appuyant sur les résultats des questions 2 et 3, expliquez pourquoi la force exercée sur une de ses extrémités par un fil élastique de longueur  $\ell_0$ , de section  $s$ , peut être décrite par une loi analogue à celle qui régit les ressorts élastiques (loi de Hooke) avec pour constante de raideur du fil  $k = Es/\ell_0$ . La constante  $E$ , caractéristique du matériau dont il est constitué, est appelée module de Young du fil.

Pour mesurer le module d'Young d'un fil d'araignée, le physicien procède à l'expérience suivante :

Il prélève sur une toile un fil d'araignée cylindrique de rayon  $r_0$ , de section constante  $s = \pi r_0^2$ , de longueur à vide  $\ell_0$ , et il le fixe en deux points fixes situés sur une même droite horizontale, distants de  $\ell_0$ . Il attache alors, en un point du fil, un hameçon muni d'un ou plusieurs plombs de pêche ; le module du poids de l'ensemble est noté  $P$  (cf. figure). Le fil élastique se tend et prend à l'équilibre une forme de V, les deux segments du fil, de longueurs  $\ell_1$  et  $\ell_2$ , formant avec l'horizontale les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  positifs et dans l'intervalle  $[0, \pi/2[$ . On peut aussi noter  $h$  la *flèche* du fil, c'est-à-dire la hauteur du point d'attache de l'hameçon sous l'horizontale à l'équilibre.



5. Établir, à l'équilibre du fil, les expressions des modules  $F_1$  et  $F_2$  des forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  exercées par les deux brins de fil, de longueurs respectives  $\ell_1$  et  $\ell_2$ , sur le point d'attache de l'hameçon, en fonction de  $P$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .
6. Établir les expressions de  $\cos \alpha_1$  et  $\cos \alpha_2$  en fonction de  $\ell_0$ ,  $\ell_1$  et  $\ell_2$ .
7. On suppose que la section  $s$  du fil reste constante pendant l'étirement et que les forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  peuvent être modélisées par la loi de Hooke décrite à la question 4. Montrer que la grandeur  $x = (Es)^{-1}$  est solution de l'équation

$$\ell_0 = \ell_1 (1 + x F_1)^{-1} + \ell_2 (1 + x F_2)^{-1}$$

Exprimer  $x$  en fonction des paramètres

$$a = F_1 F_2, \quad b = F_1 \left(1 - \frac{\ell_2}{\ell_0}\right) + F_2 \left(1 - \frac{\ell_1}{\ell_0}\right) \quad \text{et} \quad c = 1 - \frac{\ell_1 + \ell_2}{\ell_0}$$

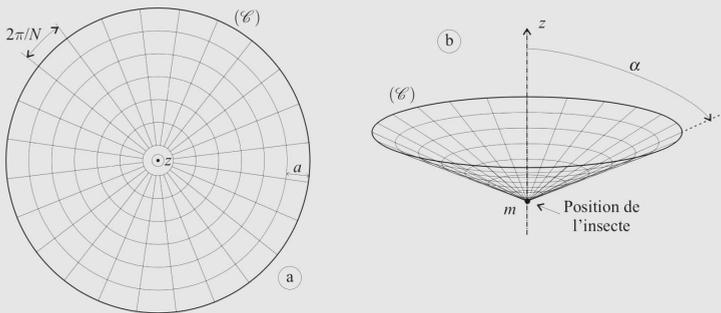
Pour chaque mesure, on note, en fonction du nombre  $n$  de plombs de pêche attachés à l'hameçon, les valeurs de  $P$ ,  $\ell_1$  et  $\ell_2$  (mesurés), de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  (calculés comme à la question 6), de  $F_1$  et  $F_2$  (calculés comme à la question 5) avant d'en déduire la valeur de  $Es$  (en résolvant l'équation du second degré proposée à la question 7). Le tableau proposé ci-après correspond à  $\ell_0 = 3,52$  cm.

$n$	$P$ (mN)	$\ell_1$ (cm)	$\ell_2$ (cm)	$\alpha_1$ (°)	$\alpha_2$ (°)	$F_1$ (mN)	$F_2$ (mN)	$Es$ (mN)
1	0,711	1,84	1,79	13,9	14,3	1,45	1,46	46,6
3	2,07	1,68	2,01	19,2	15,9	3,46	3,40	71,1
4	2,74	1,45	2,30					
5	3,42	1,56	2,24	26,8	18,3	4,59	4,31	55,7
6	4,10	1,62	2,24	28,8	20,4	5,08	4,75	50,6
7	4,77	2,32	1,56	20,1	30,7	5,29	5,78	53,7

8. Compléter la ligne manquante du tableau.
9. Le rayon du fil utilisé est mesuré au microscope :  $r_0 = 5,0 \mu\text{m}$ . En déduire une estimation du module d'Young du fil.

**Oscillations de la toile**

On étudie maintenant la toile complète, qui sera, dans la situation de repos, modélisée comme une structure circulaire horizontale comportant des fils radiaux disposés aux angles  $\theta_k = 2k\pi/N$ , avec  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$  ; le nombre de rayons de la toile est donc  $N$ . Ces fils sont tramés avec des fils circulaires disposés régulièrement aux rayons  $r_p = pa$  où  $p = 0, 1, 2, \dots$ . Le tout est représenté sur la figure ci-dessous. Le bord circulaire ( $\mathcal{C}$ ) de la toile est horizontal, rigidement fixé à la végétation de rayon  $R = 20$  cm.



On ne s'intéresse qu'aux oscillations de la toile respectant la symétrie de révolution ; les fils de la toile sont tous au repos lorsque la toile est plane. Un insecte, pris au piège au centre de la toile, provoque la déformation de la toile ; on suppose qu'elle forme alors un cône d'axe vertical ( $Oz$ ) et d'angle au sommet  $\alpha$ . On notera  $m$  la masse de l'insecte fixé au centre de la toile (donc au sommet du cône) et on négligera la masse des fils de la toile.

10. Au cours du mouvement, comment évolue la longueur des fils circulaires (de longueur au repos  $\ell_{0,c} = 2\pi r_p$ ) ? Même question pour les  $N$  fils radiaux (de longueur au repos égale au rayon de la toile :  $\ell_{0,r} = R$ ).

Chacun des fils de la toile, de longueur au repos  $\ell_0$ , exerce sur chacune de ses extrémités, lorsqu'il est étiré à la longueur  $\ell$ , une force de rappel de norme  $F = k(\ell - \ell_0)$  où  $k = Es/\ell_0$  ne dépend que de la section constante  $s$  du fil et de son module d'Young  $E$ .

11. Montrer que la position  $z$  de l'insecte sur la toile vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2z}{dt^2} + g = \frac{NEs}{m} f(\alpha)$$

où on précisera la fonction  $f(\alpha)$ .

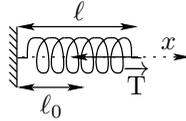
12. Montrer que l'étude des petits mouvements de l'insecte autour de sa position d'équilibre, repérée par  $\alpha = \alpha_0$ , conduit à l'équation différentielle

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{g}{R} (\alpha - \alpha_0) h(\alpha_0) \quad \text{avec} \quad h(\alpha) = \sin^2(\alpha) \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha}$$

Pour  $\alpha_0 = \pi/4$ , on obtient  $h(\alpha_0) = -2,21$ . Que peut-on en conclure ?

1. Par définition,

$$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_x$$



2. Le ressort équivalent a une longueur totale  $\ell = \ell_1 + \ell_2$ . À l'équilibre, le ressort équivalent a donc une longueur à vide totale telle que

$$\ell_{0\text{eq}} = \ell_{01} + \ell_{02}$$

Notons  $X_i = \ell_i - \ell_{0i}$  l'allongement du ressort  $i$ . Le ressort équivalent a un allongement  $X_{\text{eq}} = X_1 + X_2$ . La force équivalente s'écrit  $T_{\text{eq}} = k_{\text{eq}} X_{\text{eq}}$ . Dans le système initial, la masse attachée à l'extrémité droite du ressort 2 n'est soumise qu'à la tension du ressort  $\vec{T}_2$ . Dans le modèle équivalent, il s'agit de la force  $T_{\text{eq}}$  telle que  $T_{\text{eq}} = T_2$ . En outre, le point d'attache des deux ressorts est de masse nulle, le principe fondamental de la dynamique donne donc

$$k_1 X_1 = T_1 = T_2 = k_2 X_2$$

Notons  $T = T_{\text{eq}} = T_1 = T_2$ . On a alors

$$\frac{T}{k_{\text{eq}}} = X_{\text{eq}} = X_1 + X_2 = \frac{T}{k_1} + \frac{T}{k_2}$$

d'où

$$\frac{1}{k_{\text{eq}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

On a  $k_{\text{eq}} < k_1, k_2$  : le ressort équivalent est donc **plus souple**.

3. La masse attachée à l'extrémité des deux ressorts est soumise aux deux tensions du ressort :

$$\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = -k_1(\ell - \ell_{01}) \vec{u}_x - k_2(\ell - \ell_{02}) \vec{u}_x$$

L'expression précédente peut se mettre sous la forme :

$$\vec{T} = -k'_{\text{eq}} (\ell - \ell'_{0\text{eq}}) \vec{u}_x$$

La masse est donc soumise à un ressort équivalent de constante de raideur  $k'_{\text{eq}}$  et de longueur à vide  $\ell'_{0\text{eq}}$  telle que

$$k'_{\text{eq}} = k_1 + k_2 \quad \text{et} \quad \ell'_{0\text{eq}} = \frac{k_1 \ell_{01} + k_2 \ell_{02}}{k_1 + k_2}$$

On a  $k'_{\text{eq}} > k_1, k_2$  : le ressort équivalent est donc **moins souple**.

4. En première approximation, les interactions entre différents atomes d'un solide peuvent être approximées par des ressorts de même constante de raideur et même longueur à vide. Un solide est donc constitué de  $n$  ressorts associés en série et  $m$  ressorts associés en parallèle. La longueur  $\ell_0$  du solide est donc proportionnelle à  $n$  et la surface  $s$  à  $m$ . Or, d'après la question 2, le ressort équivalent pour une association en série de ressorts identiques est plus souple que chaque ressort pris séparément :  $k \propto 1/n \propto \ell_0$ . De même, d'après la question 3, le ressort équivalent pour une association en parallèle est moins souple :  $k \propto m \propto s$ .

$$k \propto \frac{s}{\ell_0}$$

5. À l'équilibre, le principe fondamental de la dynamique appliqué au point d'attache dans le référentiel terrestre supposé galiléen s'écrit

$$\vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

Projetons cette équation sur  $(Ox)$  et  $(Oy)$  :

$$\begin{cases} -F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 = 0 \\ -P + F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne

$$F_1 = \frac{P}{\cos \alpha_1 (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2)} \quad \text{et} \quad F_2 = \frac{P}{\cos \alpha_2 (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2)}$$

6. La formule d'Al-Kashi relative à l'angle  $\alpha_1$  s'écrit

$$\ell_2^2 = \ell_0^2 + \ell_1^2 - 2\ell_1 \ell_0 \cos \alpha_1$$

d'où

$$\cos \alpha_1 = \frac{\ell_0^2 + \ell_1^2 - \ell_2^2}{2\ell_1 \ell_0}$$

De même, avec l'angle  $\alpha_2$ ,

$$\cos \alpha_2 = \frac{\ell_0^2 + \ell_2^2 - \ell_1^2}{2\ell_1 \ell_0}$$

7. Au repos,  $\ell_0 = \ell_{01} + \ell_{02}$ . Les normes des deux forces peuvent s'écrire

$$\begin{cases} F_1 = k_1 (\ell_1 - \ell_{01}) \\ F_2 = k_2 (\ell_2 - \ell_{02}) \end{cases}$$

avec  $k_i = Es/\ell_{0i}$ . Le système précédent se réécrit

$$\begin{cases} 1 + xF_1 = \frac{\ell_1}{\ell_{01}} \\ 1 + xF_2 = \frac{\ell_2}{\ell_{02}} \end{cases}$$

Avec  $\ell_0 = \ell_{01} + \ell_{02}$ , on arrive finalement à

$$\ell_0 = \ell_1 (1 + xF_1)^{-1} + \ell_2 (1 + xF_2)^{-1}$$

Multiplions de part et d'autre par  $(1 + xF_1)(1 + xF_2)$  :

$$\ell_0 (1 + xF_1)(1 + xF_2) = \ell_1 (1 + xF_2) + \ell_2 (1 + xF_1)$$

c'est-à-dire  $ax^2 + bx + c = 0$

avec les expressions de  $a$ ,  $b$  et  $c$  données dans l'énoncé. La seule solution physiquement acceptable est

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

8. Applications numériques :

$$\alpha_1 = 25,6^\circ, \alpha_2 = 15,8^\circ, F_1 = 3,98 \text{ mN}, F_2 = 3,73 \text{ mN}, Es = 58,5 \text{ mN}$$

9. D'après la valeur de  $Es$  de la question précédente, pour  $n = 4$  et  $s = \pi r_0^2$ ,

$$E = 7,5 \times 10^8 \text{ Pa}$$

10. Pour une déformation homogène, les fils circulaires restent à la même distance de l'axe ( $Oz$ ) : **la longueur de ces fils reste la même. Cependant, la longueur des fils radiaux augmente.**

11. Appliquons le principe fondamental de la dynamique à l'insecte, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, projeté selon ( $Oz$ ) :

$$m\ddot{z} = -mg + Nk(\ell_1 - \ell_0) \cos \alpha$$

Avec  $\ell_1 = R/\sin \alpha$ ,  $k = Es/R$  et  $\ell_0 = R$ , l'équation devient

$$\ddot{z} + g = \frac{NEs}{m} \cos \alpha \left( \frac{1}{\sin \alpha} - 1 \right)$$

On arrive bien à l'équation différentielle de l'énoncé avec

$$f(\alpha) = \cos \alpha \left( \frac{1}{\sin \alpha} - 1 \right)$$

12. À l'équilibre, l'équation différentielle de la question précédente est

$$g = \frac{NEs}{m} f(\alpha_0)$$

Développons  $f(\alpha)$  pour  $\alpha \simeq \alpha_0$  :

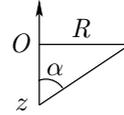
$$f(\alpha) \simeq f(\alpha_0) + (\alpha - \alpha_0) \left. \frac{df}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0}$$

Avec l'équation déterminée à l'équilibre et le développement précédent, l'équation différentielle devient

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = g (\alpha - \alpha_0) \frac{f'(\alpha_0)}{f(\alpha_0)}$$

D'après le schéma ci-contre,  $z = -R/\tan \alpha$  d'où

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{R}{\sin^2 \alpha} \frac{d\alpha}{dt} \simeq \frac{R}{\sin^2 \alpha_0} \frac{d\alpha}{dt}$$



Finalement, l'équation se réécrit avec

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \frac{g}{R} \frac{f'(\alpha_0)}{f(\alpha_0)} (\alpha - \alpha_0)$$

On retrouve l'équation de l'énoncé avec

$$h(\alpha_0) = \frac{1}{f(\alpha_0)} \left. \frac{df}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} = \left. \frac{d \ln f}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0}$$

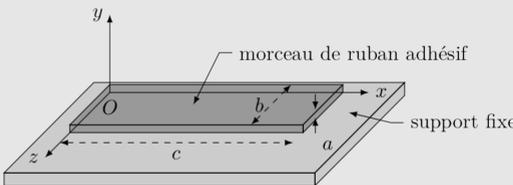
Pour  $h(\alpha_0) < 0$ , on obtient une équation d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = C^{\text{te}} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{-g h(\alpha_0)}{R}}$$

La toile d'araignée oscille autour de la position d'équilibre  $\alpha_0$ .

### Énoncé 1.3 : Modélisation d'un comportement (Centrale-Supélec 2017)

Pour tester les propriétés d'adhésion d'un ruban adhésif, on réalise généralement des essais de pelage. Pour cela, on commence par coller le ruban adhésif à tester sur un support rigide. Puis on mesure la force  $F_p$  qu'il est nécessaire d'appliquer à l'extrémité du ruban pour le décoller du support (figure ci-dessous).



Positionnement du ruban adhésif sur le support avant l'essai de pelage

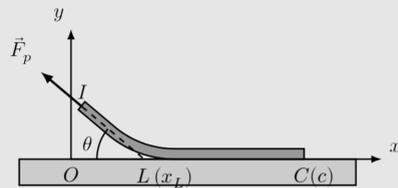


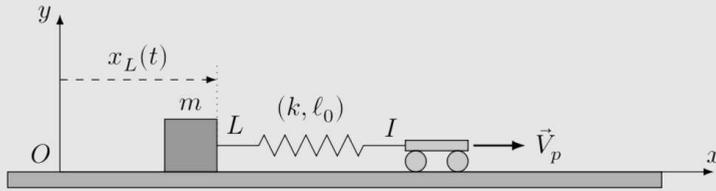
Schéma de principe et paramétrage de l'essai de pelage ;  $x_L$  désigne l'abscisse du front de pelage

On s'intéresse au décollement d'un scotch sur un support. Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  lié au support de pelage, la dynamique du front de pelage s'apparente à celle du système masse-ressort représenté ci-dessous. La portion de ruban au contact du support est modélisée par la masse  $m$  tandis que la portion décollée du ruban est modélisée par le ressort de raideur  $k$ , de longueur à vide  $\ell_0$  et dont l'extrémité  $I$  est

animée d'un mouvement rectiligne et uniforme à la vitesse  $\vec{V}_p = -\vec{V}_0$ . L'action du support sur le ruban est modélisée par une force de frottements  $\vec{f} = f \vec{u}_x$  obéissant aux lois suivantes :

- la masse  $m$  ne glisse pas sur le support tant que  $\|\vec{f}\| < F_p$  ;
- lorsque la masse  $m$  glisse sur le support, la force  $\vec{f}$  s'oppose au glissement et  $\|\vec{f}\| = (1 - \varepsilon) F_p$  (avec  $\varepsilon$  une constante telle que  $0 < \varepsilon < 1$ ).

On néglige l'action de la pesanteur sur l'évolution du système.



1. Le référentiel  $\mathcal{R}(Oxyz)$  lié au support de pelage peut-il être considéré comme galiléen ?
2. À l'instant  $t = 0$ , on a  $x_L(0) = 0$  et  $\ell(0) = \ell_0$ . Exprimer la longueur  $\ell(t)$  du ressort pour  $t > 0$ , en fonction de  $\ell_0$ ,  $V_p = \|\vec{V}_p\|$ ,  $x_L(t)$  et  $t$ .
3. On suppose de plus que  $\dot{x}_L(0) = 0$ . Montrer que l'évolution du système pour  $t > 0$  commence nécessairement par une phase où le ruban se tend sans se décoller. Déterminer à quel instant  $t_0$  se termine cette phase.
4. Établir l'équation du mouvement de la masse  $m$  lors de la phase suivante où le décollement se produit brutalement. Identifier la pulsation propre  $\omega_0$  du système.
5. La solution de l'équation précédente s'écrit sous la forme

$$x_L(t') = C_1 \cos(\omega_0 t') + C_2 \sin(\omega_0 t') + V_p t' + C_3 \quad \text{avec} \quad t' = t - t_0$$

Déterminer les expressions des constantes  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  correspondant à cette phase du mouvement.

1. Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen. De plus, le référentiel lié au support est en translation rectiligne uniforme par rapport au laboratoire : **le référentiel du support est considéré comme galiléen.**
2. D'après le schéma,  $\ell(t) = x_I(t) - x_L(t)$ . À  $t = 0$ ,  $\ell(0) = \ell_0 = x_I(0)$ . De plus, l'extrémité  $I$  a une vitesse constante de norme  $V_p$ . Son abscisse peut alors s'écrire

$$x_I(t) = V_p t + x_I(0) = V_p t + \ell_0$$

d'où

$$\boxed{\ell(t) = V_p t + \ell_0 - x_L(t)}$$

3. Le point  $M$  est soumis à la force de frottements  $\vec{f}$  et à la force exercée par le

ressort  $\vec{F}_k$  telle que  $\vec{F}_k = k(\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_x$ . À  $t = 0$ , la vitesse du point  $M$  est nulle : la masse ne glisse pas. De plus, à  $t = 0$ ,  $\ell(t) = \ell_0$  donc  $\vec{F}_k = \vec{0}$  et par conséquent  $\vec{f} = \vec{0}$ . Le point  $M$  ne se décolle pas tant que la force de frottements et donc celle du ressort ne dépasse pas  $F_p$ . À la limite,  $F_k = F_p$ . Or, d'après la question précédente,  $\ell(t) - \ell_0 = V_p t - x_L(t)$ . Tant que le système est immobile,  $x_L(t) = 0$ . La condition précédente devient donc

$$k(\ell(t) - \ell_0) = kV_p t = F_p$$

d'où

$$t_0 = \frac{F_p}{kV_p}$$

4. Lorsque le décollement se produit :  $\vec{f} = -(1 - \varepsilon) F_p \vec{u}_x$ . Le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe ( $Ox$ ) appliqué au point  $M$  dans le référentiel du support supposé galiléen s'écrit

$$m \frac{d^2 x_L}{dt^2} = k(\ell(t) - \ell_0) - (1 - \varepsilon) F_p = k(V_p t - x_L(t)) - (1 - \varepsilon) F_p$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2 x_L}{dt^2} + \frac{k}{m} x_L(t) = \frac{k}{m} V_p t - \frac{(1 - \varepsilon) F_p}{m}$$

La pulsation propre associée est  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

5. La solution donnée dans l'énoncé peut s'écrire

$$x_L(t) = C_1 \cos[\omega_0(t - t_0)] + C_2 \sin[\omega_0(t - t_0)] + V_p(t - t_0) + C_3$$

La solution particulière indépendante du temps de  $x_L(t)$  doit s'identifier au terme  $(1 - \varepsilon)F_p/m$ , d'où

$$C_3 = \frac{\varepsilon F_p}{k}$$

À  $t = t_0$  ( $t' = 0$ ),  $x_L(t = t_0) = 0$  et  $\dot{x}_L(t_0) = 0$  d'où

$$C_1 + C_3 = 0 \quad \text{et} \quad \omega_0 C_2 + V_p = 0$$

donc

$$C_1 = -\frac{\varepsilon F_p}{k} \quad \text{et} \quad C_2 = -\frac{V_p}{\omega_0}$$