

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Arithmétique, groupes et anneaux</b>	<b>13</b>
	<i>Mines.</i> Une divisibilité par 19 . . . . .	14
	X. Nombres de Fermat . . . . .	14
	<i>Classique.</i> Racines $n$ -ème d'un rationnel . . . . .	14
	X. Congruence de matrices . . . . .	15
	X. Une divisibilité grâce aux déterminants. . . . .	16
	X. Dichotomie radicale . . . . .	16
	<i>Mines.</i> Maximisation sur les permutations . . . . .	17
	<i>Centrale.</i> Partie entière et arithmétique . . . . .	18
	<i>Classique.</i> Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ . . . . .	19
	<i>Centrale MAPLE.</i> Fonction et inversion de Möbius . . . . .	20
	X. Élément idempotent dans un magma associatif fini. . . . .	21
	<i>Centrale MAPLE.</i> Calcul des polynômes cyclotomiques . . . . .	22
	X. Groupes multiplicatifs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . . . . .	24
	X. Sous-groupe compact de $(\mathcal{G}_n(\mathbb{R}), \times)$ contenant $\mathcal{O}(n)$ . . . . .	25
	<i>Classique.</i> Théorème chinois et fonction indicatrice d'Euler . . . . .	26
	<i>Mines.</i> Une équation dans $\mathbb{N}^*$ . . . . .	27
	X. Nombre moyen de point fixes d'une permutation . . . . .	28
	X. Matrice d'un sous-groupe fini de $\mathcal{G}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\text{tr}(M) = n$ . . . . .	30
	<i>Classique.</i> Théorème de Lagrange, sous-groupe distingué et quotient . . . . .	31
	X. Normes subordonnées et sous-groupes bornés de $\mathcal{G}_n(\mathbb{C})$ . . . . .	33
	X. Sommes des carrés dans un anneau . . . . .	36
	<i>Classique.</i> Groupe formé d'éléments involutifs . . . . .	37
	X. Invariants d'une action de groupe . . . . .	38
	<i>Mines.</i> Inversibles de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times, )$ . . . . .	40
	<i>Centrale.</i> Forme irréductible de la somme partielle harmonique . . . . .	41
	X. Théorème de Liouville . . . . .	41
<b>2</b>	<b>Polynômes et fractions</b>	<b>45</b>
	<i>Centrale.</i> Irrationalité de l'exponentielle d'un rationnel non nul . . . . .	46
	X. Carré formé par les racines d'un polynôme . . . . .	47
	X. Equation polynomiale . . . . .	48
	X. Polynômes scindés 1 . . . . .	49
	<i>Mines.</i> Polynômes scindés 2 . . . . .	50
	<i>Classique.</i> Polynômes de Tchebycheff . . . . .	51
	<i>Centrale.</i> Polynômes stables . . . . .	53
	<i>Classique.</i> Une relation entre les racines de $P$ et celles de $P'$ . . . . .	54
	X. Polynôme annulateur et trace . . . . .	54
	<i>Classique.</i> Polynômes de Legendre . . . . .	55
	X. Polynômes de Hilbert, fractions associées . . . . .	56
	<i>Mines.</i> Application des déterminants de Vandermonde . . . . .	58
	X. Polynômes et dérivées itérées . . . . .	59
	<i>Classique.</i> Continuité des racines d'une suite de polynômes . . . . .	61
	<i>Mines.</i> Dualité sur un espace de polynômes . . . . .	62
	<i>Centrale MAPLE.</i> Suites, polynômes et fractions . . . . .	63
	<i>Centrale MAPLE.</i> Discriminant généralisé . . . . .	66
<b>3</b>	<b>Espaces vectoriels et matrices</b>	<b>69</b>
	X. Indice de nilpotence en dimension finie . . . . .	70
	<i>Mines.</i> Caractère libre d'une famille de fonctions . . . . .	71
	X. Inégalité de Frobenius . . . . .	71
	<i>Mines.</i> Si $f + g$ est bijectif et $f \circ g$ est nul . . . . .	72
	<i>Mines.</i> Caractérisation de la nilpotence par les traces . . . . .	72
	<i>Mines.</i> Calcul matriciel . . . . .	73
	X. Racine carrée de matrice . . . . .	73
	<i>Mines.</i> Comparaison des rangs de $A$ , ${}^tAA$ et $A{}^tA$ . . . . .	74

X. Inversibilité des composantes d'une matrice par blocs . . . . .	74
Mines. Polynômes de matrices . . . . .	75
Mines. Utilisation des matrices de rang 1 . . . . .	75
Centrale. Inverse dans une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . . . . .	76
Classique. Noyaux itérés . . . . .	76
Mines. Vecteur propre commun à deux projecteurs . . . . .	78
Centrale. Projecteur défini par une moyenne arithmétique . . . . .	78
Mines. Si $AB - BA = B$ ... . . . .	79
Centrale. Dimension d'un commutant . . . . .	80
Centrale MAPLE. Algèbre de Lie . . . . .	81
Mines. Semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . . . . .	83
Classique. Matrices compagnon et commutant d'un cyclique . . . . .	83
Centrale. Effet d'un hyperplan affine stable . . . . .	85
X. Somme nilpotente de matrices . . . . .	86
X. Matrices de même noyau . . . . .	86
Classique. Centre multiplicatif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . . . . .	87
X. Matrices à diagonale dominante . . . . .	88
Mines. Sous-espaces stables par une matrice . . . . .	89
Classique. Sous-espaces stables par un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (dualité) . . . . .	90
Centrale. Propriétés de la comatrice . . . . .	91
Centrale. Equation $A = \text{com}(A)$ . . . . .	92
Centrale. Supplémentaires anticommuntant dans $\mathcal{L}(E)$ . . . . .	93
Centrale. Etude des matrices de trace nulle . . . . .	94
X. Automorphismes d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . . . . .	96
Classique. Théorème de Carathéodory . . . . .	98
X. Une factorisation sur les endomorphismes . . . . .	99
<b>4 Déterminants</b> . . . . .	<b>101</b>
X. Déterminant de la transposition . . . . .	102
Centrale. Spectre et déterminant . . . . .	102
Classique. Déterminants de Vandermonde . . . . .	103
Classique. Déterminant tridiagonal . . . . .	104
Mines. Déterminant à paramètres et expression d'un inverse . . . . .	105
X. Bases de même orientation . . . . .	106
Classique. Rang et déterminants extraits . . . . .	107
Centrale. Calcul d'un déterminant lié à un polynôme . . . . .	107
Classique. Déterminant des $ a_i - a_j $ . . . . .	109
Mines. Déterminant et dérivation . . . . .	110
Classique. Déterminant circulant . . . . .	111
X. Somme des cofacteurs d'une matrice antisymétrique . . . . .	113
Mines. Calcul par adjonction d'une dimension . . . . .	114
Centrale. Déterminants dans des ensembles particuliers de matrices . . . . .	115
X. Déterminants de Cauchy, de Hilbert . . . . .	116
X. Déterminant résultant de deux polynômes . . . . .	118
<b>5 Réduction</b> . . . . .	<b>121</b>
Mines. Antécédent d'une matrice diagonalisable par un polynôme . . . . .	122
Mines. Stabilité par une matrice réelle . . . . .	122
X. Un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ peut-il être minimal pour une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ? . . . . .	122
Centrale. Inversibilité de $f + g$ si $f$ est bijectif . . . . .	123
Mines. Dimension d'un commutant et réduction . . . . .	123
Classique. Diagonalisation ou trigonalisation simultanée . . . . .	124
X. Application de la base incomplète . . . . .	125
Mines. Trigonalisation simultanée 2 . . . . .	126
X. Trigonalisation simultanée 3 . . . . .	126
Mines. Sous-espaces stables par un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . . . . .	127
Mines. Revenir à un système d'équations . . . . .	128
X. Polynômes annulateurs . . . . .	129

X. Matrice hermitienne	130
<i>Classique.</i> Critère de non-diagonalisabilité sur $\mathbb{C}$	131
<i>Mines.</i> Existence d'un polynôme annulateur fonction du rang	132
X. Etude de projecteurs de même rang	132
<i>Mines.</i> Vecteurs propres et transposée de la comatrice	133
X. Un spectre non trivial	133
X. Un endomorphisme sur les endomorphismes	135
<i>Centrale.</i> Caractérisation de spectres non disjoints	136
<i>Mines.</i> Si $M^2 + 4M$ est diagonalisable...	137
<i>Mines.</i> Etude d'une diagonalisabilité sur $\mathbb{R}_{2n}[X]$	138
<i>Classique.</i> Réduction d'une matrice creuse	138
<i>Centrale MAPLE.</i> Réduction de matrices à paramètres	139
<i>Mines.</i> Spectre de $Id_E - uv$ et $Id_E - vu$	143
<i>Mines.</i> Que dire si $u \circ u$ est diagonalisable?	143
<i>Mines.</i> Diagonalisation d'une matrice par blocs	144
<i>Classique.</i> Diagonalisabilité d'un produit tensoriel d'ordre 2	145
X. Diagonalisation par blocs	146
X. Diagonalisation par blocs 2	146
<i>Centrale.</i> Suites récurrentes linéaires et vecteurs propres	148
<i>Classique.</i> Décomposition $D + N$ (de Dunford)	152
X. Polynôme minimal d'un polynôme de l'opérateur de dérivation	153
<i>Classique.</i> Surjectivité de $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$	155
<i>Classique.</i> Diagonalisabilité de $u$ , de $P(u)$ si $P'(u) \in GL(E)$	157
<b>6 Espaces préhilbertiens</b>	<b>159</b>
<i>Mines.</i> Racine carrée d'un endomorphisme autoadjoint positif	160
X. Module d'une somme vs. somme des modules	161
X. Somme de matrices et orthogonalité	162
<i>Mines.</i> Produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , norme du produit	162
X. Une partie finie de la sphère unité d'un espace euclidien	164
<i>Mines.</i> Caractérisation des similitudes	164
<i>Mines.</i> Caractérisation des projecteurs orthogonaux	165
<i>Mines.</i> Conjugaison d'une rotation par une symétrie	165
<i>Centrale.</i> Sur les endomorphismes autoadjoints	166
<i>Mines.</i> Optimisations de sommes sur $\mathcal{O}(n)$	167
<i>Mines.</i> Matrice de rotation	168
<i>Mines.</i> Somme normalisée des endomorphismes de permutation	169
<i>Mines.</i> Décomposition d'un automorphisme orthogonal	170
<i>Classique.</i> Décomposition polaire d'une matrice	171
<i>Mines.</i> Exponentielle d'un produit vectoriel	172
<i>Centrale MAPLE.</i> Programmation de Gram-Schmidt	173
X. Minimisation d'une intégrale à paramètre	174
<i>Classique.</i> Décomposition d'Iwasawa	175
<i>Classique.</i> Décomposition de Cholesky	175
<i>Centrale.</i> Constructions d'endomorphismes remarquables	177
<i>Classique.</i> Matrices de Gram	178
X. Réduction des matrices antisymétriques	180
X. Orthogonalité et minimisation avec les polynômes de Tchebycheff	182
<i>Classique.</i> Endomorphismes et matrices antisymétriques	184
<i>Classique.</i> Orthogonalité des polynômes d'Hermite	186
<i>Classique.</i> Orthogonalité des polynômes de Legendre	188
X. Familles obtusangles	190
<i>Centrale MAPLE.</i> Projection orthogonale dans $\mathbb{R}_{2n}[X]$	192
<i>Mines.</i> Exemples d'orthogonaux	194
<i>Classique.</i> Polynômes de Laguerre	196
X. Construction d'une forme linéaire avec restriction	198
<i>Classique.</i> Polynômes orthogonaux associés à un poids	199

<b>7</b>	<b>Matrices symétriques, formes quadratiques</b>	<b>203</b>
	<i>Centrale.</i> Majoration du rayon spectral . . . . .	204
	<i>X.</i> Trace d'un produit d'éléments de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . . . . .	204
	<i>Centrale.</i> Somme orthogonale de deux matrices symétrique/antisymétrique . . . . .	205
	<i>Mines.</i> Approximations d'un vecteur propre . . . . .	207
	<i>X.</i> Action de $\mathcal{G}_n(\mathbb{R})$ sur une matrice symétrique . . . . .	208
	<i>X.</i> Inversion de l'ordre sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . . . . .	209
	<i>Mines.</i> Majoration du déterminant par la norme sup . . . . .	209
	<i>Mines.</i> Caractère défini positif d'une forme quadratique . . . . .	210
	<i>Mines.</i> Une inégalité de convexité . . . . .	211
	<i>Centrale MAPLE.</i> Bornes impliquant une forme quadratique . . . . .	212
	<i>X.</i> Comparaison des sphères unité associées à deux produits scalaires . . . . .	213
	<i>X.</i> Forme quadratique puis construction matricielle . . . . .	214
	<i>Classique.</i> Réduction simultanée de deux formes quadratiques, application . . . . .	215
	<i>X.</i> Matrice positive à termes diagonaux strictement négatifs . . . . .	216
	<i>Mines.</i> Comparaison trace-rang d'une matrice symétrique réelle . . . . .	217
	<i>X.</i> Théorème du minimax de Courant-Fischer . . . . .	218
	<i>Classique.</i> Caractère positif et défini-positif des matrices symétriques réelles . . . . .	219
	<i>X.</i> Une matrice symétrique définie positive . . . . .	220
<b>8</b>	<b>Géométrie</b>	<b>223</b>
	<i>X.</i> Géométrie élémentaire dans l'espace . . . . .	224
	<i>Centrale.</i> Réduction, tracé de coniques/quadrriques . . . . .	224
	<i>Centrale.</i> Etude d'une courbe paramétrée . . . . .	226
	<i>Centrale MAPLE.</i> Famille de courbes paramétrées . . . . .	227
	<i>Classique.</i> Aire de la boucle du folium de Descartes . . . . .	230
	<i>Centrale.</i> Orthoptique d'une parabole . . . . .	232
	<i>Centrale.</i> Cylindre défini par génératrices et directrice . . . . .	233
	<i>Centrale.</i> Etude d'une courbe orthoptique . . . . .	234
	<i>Centrale.</i> Projection de l'origine sur une famille de plans . . . . .	235
	<i>Centrale MAPLE.</i> Courbe polaire, aire d'une boucle . . . . .	236
	<i>X.</i> Point de Fermat . . . . .	238
	<i>Mines.</i> Aire d'un triangle construit sur une hyperbole . . . . .	240
	<i>X.</i> Courbe orthoptique de l'ellipse (cercle de Monge) . . . . .	241
	<i>Centrale.</i> Equation cartésienne d'un cône . . . . .	242
	<i>Centrale.</i> Ellipse inscrite dans un triangle de racines . . . . .	243
	<i>Classique.</i> Equation intrinsèque d'une courbe plane . . . . .	245
	<i>Classique.</i> Equation intrinsèque d'une courbe plane 2 . . . . .	245
	<i>Classique.</i> Une surface réglée . . . . .	246
	<i>Centrale.</i> Surface réglée et développable . . . . .	247
	<i>Centrale.</i> Tangentes à l'hippopède . . . . .	249
	<i>Centrale MAPLE.</i> Podaire de l'hyperboloïde . . . . .	253
	<i>X.</i> Dénombrabilité d'une famille de tripodes . . . . .	255
	<i>Centrale.</i> Sommets des paraboles à tangente imposée . . . . .	256
<b>9</b>	<b>Suites et espaces vectoriels normés</b>	<b>259</b>
	<i>Classique.</i> $e$ est irrationnel . . . . .	260
	<i>Classique.</i> Lemme de Cesàro, application à $u_{n+1} = \sin(u_n)$ . . . . .	260
	<i>Classique.</i> Cesàro (variante) . . . . .	262
	<i>Classique.</i> Normes de Hölder . . . . .	263
	<i>Centrale.</i> Suite récurrente et intégrales à paramètre . . . . .	265
	<i>Centrale.</i> Convergence d'une suite récurrente d'ordre deux . . . . .	268
	<i>Centrale.</i> Limite d'une suite matricielle . . . . .	269
	<i>Mines.</i> Normes subordonnées d'une forme linéaire . . . . .	270
	<i>Mines.</i> Fonction pseudo-contractante . . . . .	271
	<i>X.</i> Semi-norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . . . . .	272
	<i>Mines.</i> Limite de $\sin(2\pi n!e)$ . . . . .	274
	<i>Mines.</i> Série matricielle . . . . .	275

X. Equivalent d'un produit en $+\infty$ . . . . .	276
<i>Centrale.</i> Méthode de Jacobi . . . . .	278
<i>Mines.</i> Méthode de Newton pour une racine carrée de matrice . . . . .	279
<i>Centrale MAPLE.</i> Etude informatique d'une suite définie implicitement . . . . .	281
<i>Mines.</i> Etude de l'équivalence de deux normes . . . . .	283
X. Théorème de Korovkin . . . . .	284
<b>10 Topologie</b> . . . . .	<b>287</b>
X. Séparation d'un point et d'un compact convexe . . . . .	288
<i>Centrale.</i> Les applications linéaires surjectives forment un ouvert . . . . .	289
X. Moyenne des itérés d'un endomorphisme . . . . .	290
X. Valeurs d'adhérence de $(\cos(\ln(n)))_n$ . . . . .	290
<i>Classique.</i> Adhérence des matrices inversibles, diagonalisables . . . . .	291
X. Densité des quotients d'une suite . . . . .	292
<i>Centrale.</i> Problèmes de distance . . . . .	293
<i>Classique.</i> Intérieur d'une classe de similitude . . . . .	294
<i>Mines.</i> Fonction faiblement contractante . . . . .	295
<i>Classique.</i> Théorème de Baire . . . . .	296
<i>Classique.</i> Théorème de Banach-Steinhaus . . . . .	297
<i>Classique.</i> Lemme de la puce, application . . . . .	298
X. Intérieur des matrices diagonalisables . . . . .	299
<i>Centrale.</i> Croissance locale du rang . . . . .	300
X. Transvections, connexité de $\mathcal{S}l_n(\mathbb{R})$ . . . . .	301
X. Topologie des classes de similitudes . . . . .	303
<i>Centrale.</i> Ensemble de Julia d'un polynôme . . . . .	304
<b>11 Fonctions d'une variable</b> . . . . .	<b>307</b>
<i>Classique.</i> Convexité et signe . . . . .	308
X. Pré-image d'un segment par une application continue . . . . .	308
<i>Classique.</i> Une majoration sur les complexes . . . . .	309
<i>Classique.</i> Rolle à l'infini . . . . .	309
<i>Centrale.</i> Fonction régulières et idempotentes . . . . .	310
X. Une inéquation différentielle . . . . .	310
X. Majoration des trapèzes . . . . .	311
<i>Classique.</i> Théorème de Darboux . . . . .	312
X. Fonction sous-additive . . . . .	312
X. Minimisation d'intégrales . . . . .	313
X. Application de l'inégalité de Taylor-Lagrange . . . . .	315
X. Un théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	315
<i>Mines.</i> Fonction implicitement définie par une intégrale . . . . .	316
<i>Mines.</i> Changements de signes . . . . .	317
X. Fonctions pseudo-convexes . . . . .	318
<i>Mines.</i> Une équation fonctionnelle . . . . .	319
X. Lemme de Croft . . . . .	321
<i>Centrale.</i> Utilisation de Taylor-Young . . . . .	322
<i>Classique.</i> Problème de Monty-Hall . . . . .	324
<i>Centrale MAPLE.</i> Un calcul de probabilité . . . . .	324
<b>12 Intégration</b> . . . . .	<b>327</b>
<i>Centrale.</i> Existence, calcul d'intégrales . . . . .	328
X. Fonction intégrable et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ . . . . .	329
<i>Centrale MAPLE.</i> Fonction définie par une intégrale . . . . .	329
X. Intégrabilité et uniforme continuité sur $\mathbb{R}_+$ . . . . .	331
<i>Centrale.</i> Une identité sur les intégrales . . . . .	332
<i>Classique.</i> Une propriété géométrique de l'intégrale . . . . .	333
<i>Mines.</i> Calcul d'une intégrale impropre . . . . .	334
<i>Mines.</i> Etude d'une suite d'intégrales . . . . .	335
<i>Centrale.</i> Etude d'une suite d'intégrales 2 . . . . .	336

X. Une propriété des fonctions entières . . . . .	338
X. Etude d'une intégrabilité . . . . .	339
<i>Classique.</i> Sommes de Riemann généralisées . . . . .	340
<i>Mines.</i> Sommes de Riemann généralisées 2 . . . . .	341
X. Sommes inverses de Riemann . . . . .	342
<i>Mines.</i> Calcul d'une intégrale par ses sommes de Riemann . . . . .	343
<i>Classique.</i> Sommes de Riemann sur un intervalle . . . . .	344
<i>Mines.</i> Intégrale à paramètre complexe . . . . .	345
<i>Mines.</i> Une inégalité intégrale . . . . .	346
<i>Classique.</i> Variante du lemme de Lebesgue . . . . .	347
<i>Classique.</i> Intégration des relations de comparaisons . . . . .	349
<i>Centrale.</i> Une somme équivalente aux intégrales partielles . . . . .	351
X. Calcul d'une intégrale à deux paramètres . . . . .	352
<i>Mines.</i> Calcul d'une intégrale à paramètre . . . . .	354
<i>Mines.</i> Intégration des relations de comparaison : application . . . . .	355
<i>Centrale.</i> Théorèmes abélien, taubérien et transformée de Laplace . . . . .	356
X. Continuité d'une intégrale à paramètre . . . . .	357
<i>Classique.</i> Transformée de Fourier de la loi normale . . . . .	358
<i>Mines.</i> Intégrale à paramètre dans les bornes . . . . .	360
<i>Mines.</i> Calcul de l'intégrale de Gauss . . . . .	362
X. Equivalent d'une intégrale à paramètre . . . . .	364
X. Une preuve analytique du théorème de d'Alembert-Gauss . . . . .	365
<i>Classique.</i> Convolution et approximation de l'unité . . . . .	367
<i>Centrale.</i> Calcul d'une intégrale par convergence dominée . . . . .	368
<i>Centrale.</i> Théorème de la limite centrée . . . . .	370
<i>Mines.</i> Intégrale de Dirichlet via une intégrale à paramètre . . . . .	372
<b>13 Séries numériques</b> . . . . .	<b>375</b>
<i>Mines.</i> Nature de séries à paramètre . . . . .	376
<i>Mines.</i> Equivalent d'une somme partielle . . . . .	377
<i>Mines.</i> Sommes nulles d'une série numérique . . . . .	378
<i>Centrale.</i> Transformées d'une série numérique . . . . .	378
X. Sommes à paramètres . . . . .	379
<i>Mines.</i> Terme général intégral . . . . .	380
<i>Centrale.</i> Série et fonction $\Gamma$ . . . . .	382
<i>Classique.</i> Transformation d'Abel (sommutation par parties) . . . . .	383
<i>Mines.</i> Produit infini : convergence, calcul . . . . .	384
<i>Mines.</i> Somme de l'inverse d'une somme . . . . .	385
<i>Mines.</i> Somme et parties entières . . . . .	387
<i>Centrale.</i> Règle de Raabe . . . . .	388
<i>Classique.</i> Preuve de la formule de Stirling par Wallis . . . . .	389
X. Sommutation par paquets . . . . .	390
X. Série à termes positifs . . . . .	391
X. Autour d'une somme alternée . . . . .	391
<i>Centrale.</i> Regroupements dans une série . . . . .	393
<i>Mines.</i> Séries et intégrales impropres . . . . .	394
X. Etude d'une série double . . . . .	396
X. Etude conjointe de trois séries numériques . . . . .	397
X. Décomposition en série factorielle d'un réel . . . . .	399
X. Approximations d'un réel par des séries pseudo-alternées . . . . .	401
<b>14 Suites et séries de fonctions</b> . . . . .	<b>403</b>
X. Convergence uniforme d'une suite de fonctions polynomiales . . . . .	404
<i>Mines.</i> Calcul explicite d'une somme . . . . .	405
<i>Centrale.</i> Produit de fonctions . . . . .	405
X. Convergence simple d'une suite de fonctions équilipschitziennes . . . . .	406
<i>Mines.</i> Suite, puis série de fonctions . . . . .	407
X. Construction d'une suite de fonctions . . . . .	408

X. Second théorème de Dini . . . . .	409
<i>Centrale.</i> Weierstrass par convolution . . . . .	410
<i>Centrale.</i> Intégrabilité d'une somme . . . . .	411
<i>Mines.</i> Interverson somme/intégrale . . . . .	412
<i>Mines.</i> Equivalent d'une somme . . . . .	413
<i>Centrale.</i> Relation fonctionnelle et série de fonctions . . . . .	414
X. Développements asymptotiques d'une intégrale à paramètre . . . . .	415
<i>Mines.</i> Dérivabilité d'une somme . . . . .	416
X. Premier théorème de Dini sur les séries de fonctions . . . . .	417
<i>Mines.</i> Régularité d'une somme . . . . .	418
<i>Classique.</i> Intégration d'une série de fonctions . . . . .	420
<i>Centrale.</i> Vers le développement eulérien du sinus . . . . .	421
<i>Mines.</i> Intégrale à paramètre vs. série de fonctions . . . . .	423
<b>15 Séries entières</b> . . . . .	<b>427</b>
<i>Mines.</i> Rayon de convergence . . . . .	428
<i>Centrale MAPLE.</i> Rayon de convergence 2 . . . . .	428
X. Rayon de convergence 3 . . . . .	430
<i>Centrale.</i> Comparaison de rayons de convergence . . . . .	431
<i>Mines.</i> Développement en série entière . . . . .	431
<i>Mines.</i> Développement en série entière 2 . . . . .	432
<i>Classique.</i> Série génératrice des polynômes d'Hermite . . . . .	433
<i>Classique.</i> Fonction non développable en série entière . . . . .	435
<i>Classique.</i> Règles de Cauchy et d'Hadarnard . . . . .	437
X. Etude d'une somme au bord du disque de convergence . . . . .	438
<i>Centrale.</i> Calcul d'une série entière par une équation différentielle . . . . .	439
<i>Mines.</i> Série entière $p$ -lacunaire . . . . .	440
<i>Mines.</i> Développements en série entière d'intégrales elliptiques . . . . .	441
<i>Centrale MAPLE.</i> Produit de séries entières . . . . .	442
<i>Centrale.</i> Fonction de Bessel et intégrales de Wallis . . . . .	444
<i>Classique.</i> Théorème abélien ou taubérien sur les séries numériques . . . . .	446
<i>Classique.</i> Théorème taubérien faible . . . . .	448
<i>Centrale MAPLE.</i> Etude d'une série génératrice . . . . .	449
X. Développement en série entière d'une série de fonctions . . . . .	452
<i>Centrale.</i> Développement en série entière via une équation fonctionnelle . . . . .	453
<i>Centrale MAPLE.</i> Théorème de Paoli . . . . .	455
<i>Classique.</i> Equivalent au bord d'une série entière lacunaire . . . . .	458
X. Nombres de Catalan . . . . .	460
<i>Centrale MAPLE.</i> Nombres de Stirling de deuxième espèce, nombres de Bell . . . . .	462
<b>16 Séries de Fourier</b> . . . . .	<b>465</b>
<i>Mines.</i> Toute suite est-elle une suite de coefficients de Fourier ? . . . . .	466
<i>Classique.</i> Calcul de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$ . . . . .	466
<i>Mines.</i> $\pi$ -périodicité et coefficients de Fourier $2\pi$ -périodiques . . . . .	467
<i>Classique.</i> Si la série de Fourier converge uniformément... . . . . .	467
<i>Centrale.</i> Un développement en série de Fourier . . . . .	468
<i>Mines.</i> Coefficients à décroissance rapide . . . . .	469
<i>Mines.</i> Inégalité isopérimétrique (ou de Wirtinger) . . . . .	470
<i>Centrale.</i> Série de Fourier d'une fonction lipschitzienne . . . . .	470
<i>Mines.</i> Série de Fourier par des développements en série entière . . . . .	471
<i>Centrale.</i> Série de Fourier par des développements en série entière 2 . . . . .	472
<i>Classique.</i> Noyaux de Fejer et Weierstrass trigonométrique . . . . .	473
<i>Classique.</i> Equation différentielle anticipante . . . . .	476
<i>Centrale MAPLE.</i> Transformation d'Abel, observation du phénomène de Gibbs . . . . .	476
<i>Centrale MAPLE.</i> Convolution et séries de Fourier . . . . .	480

<b>17 Équations différentielles</b>	<b>483</b>
<i>Classique.</i> Système différentiel en $z = x + iy$	484
<i>X.</i> Stabilité des solutions d'un système différentiel	484
<i>Classique.</i> Equation d'ordre 1 avec raccordement	485
<i>Mines.</i> Variation des constantes	486
<i>Mines.</i> Variations des constantes 2	487
<i>Mines.</i> Equation différentielle linéaire d'ordre 2 avec raccordement	488
<i>Classique.</i> Equation différentielle linéaire d'ordre 2 avec raccordement 2	489
<i>Mines.</i> Equation différentielle linéaire d'ordre 2 avec séries entières	491
<i>X.</i> Solutions à support compact d'une équation différentielle	492
<i>Classique.</i> Lemme de Gronwall, application à une durée de vie	494
<i>Classique.</i> Une équation non linéaire de Bernouilli	495
<i>X.</i> Variables séparables	496
<i>X.</i> Variables séparables 2	497
<i>Centrale MAPLE.</i> Equation non linéaire, tracé des courbes intégrales	498
<i>Centrale MAPLE.</i> Système différentiel autonome	501
<i>X.</i> Etude qualitative	503
<i>Centrale MAPLE.</i> Etude qualitative 2	505
<i>X.</i> Recherche de l'ensemble de définition de solutions	507
<i>X.</i> Intégrale de Dirichlet via une équation différentielle	508
<b>18 Fonctions de plusieurs variables</b>	<b>513</b>
<i>X.</i> Fonctions concaves sur $\mathbb{R}^n$	514
<i>Centrale.</i> Nature des différentielles	514
<i>Mines.</i> Calcul d'un Laplacien	515
<i>Classique.</i> Changement de variable polaire	516
<i>Centrale MAPLE.</i> Recherche d'extrema	517
<i>Centrale MAPLE.</i> Recherche des extrema 2	519
<i>Centrale.</i> Recherche d'extrema 3	520
<i>Centrale.</i> Recherche d'extrema sur un fermé	521
<i>Classique.</i> Preuve analytique de la réduction simultanée de formes quadratiques	522
<i>Centrale.</i> Equation aux dérivées partielles	524
<i>Mines.</i> Equation aux dérivées partielles	524
<i>X.</i> Equation aux dérivées partielles	525
<i>Centrale.</i> Difféomorphisme, équation aux dérivées partielles	526
<i>Classique.</i> Intégrales doubles	527
<i>Classique.</i> Centre de masse d'un demi-disque	529
<i>X.</i> Détermination des différentielles	530
<i>X.</i> Plusieurs variables pour une application en algèbre	531
<i>Classique.</i> Primitives d'une forme différentielle	533
<i>Mines.</i> Calcul d'intégrales simples via Fubini	534
<i>Classique.</i> Intégrale de Dirichlet via Green-Riemann	536
<i>Classique.</i> Optimisation d'intégrales avec contrainte au bord	538
<i>X.</i> Applications strictement différentiables	540