

Table des matières

1	Polynômes	9
	<i>Centrale.</i> Factorisation de polynômes en irréductibles	10
	<i>Centrale.</i> Triangle des racines d'un polynôme	11
	X. Carré formé par les racines d'un polynôme	13
	<i>Centrale.</i> Equations linéaires portant sur des polynômes	13
	<i>Mines.</i> Factorisation d'un polynôme/calcul d'un produit	15
	<i>Type X.</i> Polynômes de Tchebycheff	16
	<i>Type X.</i> Calcul de $\zeta(2)$ à l'aide de polynômes	18
	<i>Centrale.</i> Calcul d'un déterminant lié à un polynôme	21
	<i>Type X.</i> Polynômes de Legendre	23
	<i>Centrale.</i> Polynômes scindés à racines simples sur $\mathbb{R}[X]$	25
	X. Sommes des carrés dans un anneau	26
2	Algèbre linéaire, matrices	29
	<i>Type Centrale.</i> Travail sur des rangs	30
	<i>Centrale.</i> Indépendance linéaire d'une famille de fonctions	30
	X. Indice de nilpotence en dimension finie	31
	<i>Type X.</i> Noyaux itérés	32
	<i>Type X.</i> Applications des noyaux itérés	34
	<i>Type X.</i> Produit d'endomorphismes nilpotents qui commutent	35
	X. Equation matricielle sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$	35
	X. Décomposition de l'identité en $uv + vu$	35
	X. Caractérisation des matrices nilpotentes par le spectre	36
	<i>Centrale.</i> Comparaison des rangs de A , tAA et $A{}^tA$	37
	<i>Mines.</i> Hyperplans stables par un endomorphisme	37
	<i>Type X.</i> Centre multiplicatif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	39
	<i>Mines.</i> Valeur propre commune à deux matrices	41
	X. Somme nilpotente de matrices	41
	<i>Type Mines.</i> Matrices à diagonale dominante	42
	<i>Centrale.</i> Si $AB - BA = B$...	43
	<i>Centrale.</i> Cas d'égalité de $\text{Rg}(g \circ f)$ avec $\text{Rg}(g)$, avec $\text{Rg}(f)$	44
	<i>Mines.</i> Projecteurs qui commutent.	45
	<i>Mines.</i> Un crochet de Lie	46
	X. Expression du rang comme un min	47
	<i>Type X.</i> Applications de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ conservant le produit	47
	<i>Type X.</i> Matrices compagnon et commutant d'un cyclique	48
	X. Formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	50
	X. Monoïde fini de matrices inversibles	51
	<i>Mines.</i> Si $\text{tr}(A^k) = \text{tr}(B^k)$ pour tout k ...	53
	X. Equations matricielles sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$	55
	<i>Type X.</i> Une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ semblable à sa transposée	56
	X. Hyperplans stables et formes linéaires	58
	<i>Centrale.</i> Étude des matrices de trace nulle	60
	<i>Mines.</i> Dualité	63
	X. Une factorisation sur les endomorphismes	64

3	Déterminants	67
	<i>Type Centrale.</i> Déterminant d'une matrice formée de ± 1	68
	<i>Type Mines.</i> Déterminant par blocs	68
	<i>Type Mines.</i> Déterminant par blocs 2	69
	<i>Centrale.</i> Matrices circulantes d'ordre 4	69
	<i>Mines.</i> $\det(A + I_n)$ si $A^2 = 0$	70
	<i>Mines.</i> Inverse d'une matrice à paramètres	71
	<i>Type X.</i> Déterminant des $ a_i - a_j $	72
	<i>Type X.</i> Formule d'inversion matricielle	73
	<i>Mines.</i> Déterminants de Vandermonde	74
	<i>Type X.</i> Déterminant circulant	76
	<i>Type X.</i> Déterminants de Cauchy, de Hilbert	78
4	Réduction	81
	<i>Mines.</i> Caractérisation de certains projecteurs	82
	<i>Mines.</i> Polynôme annulateur	82
	<i>Type Centrale.</i> Polynôme annulateur 2	83
	<i>Mines.</i> Polynôme annulateur 3	83
	<i>Centrale.</i> Spectre et inverses de $\text{Id}_E - uv$ et $\text{Id}_E - vu$	84
	<i>Mines.</i> Diagonalisation de U^1V pour U, V deux colonnes	85
	<i>Type Mines.</i> Réduction d'une matrice creuse	86
	<i>Mines.</i> Éléments propres d'une matrice	87
	<i>Mines.</i> Diagonalisabilité d'une application sur les matrices	88
	<i>Type Mines.</i> Diagonalisation simultanée	89
	<i>X.</i> Diagonalisation simultanée généralisée	89
	<i>Type Centrale.</i> Commutant d'un endomorphisme diagonalisable	90
	<i>Type Mines.</i> Un cas de décomposition des noyaux	92
	<i>Centrale.</i> Etude d'endomorphismes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	94
	<i>Centrale.</i> Un endomorphisme sur les endomorphismes	95
	<i>Centrale.</i> Trigonalisation d'un endomorphisme nilpotent	97
	<i>Centrale MAPLE.</i> Réduction de matrices à paramètres	99
	<i>Mines.</i> Un spectre non trivial	102
	<i>X.</i> Sous-espaces stables par une matrice	104
	<i>Mines.</i> Caractérisation de la diagonalisabilité	105
	<i>Type X.</i> Diagonalisabilité d'un produit tensoriel d'ordre 2	107
	<i>Centrale.</i> Diagonalisabilité, nilpotence de $f \mapsto f \circ g - g \circ f$	108
	<i>Mines.</i> Diagonalisabilité et hyperplans stables	109
	<i>Centrale.</i> Valeur propre commune	110
	<i>X.</i> Que dire si u^2 est diagonalisable?	111
	<i>X.</i> Diagonalisation par blocs	112
	<i>X.</i> Diagonalisation par blocs 2	113
	<i>X.</i> Diagonalisabilité de u , de $P(u)$ si $P'(u) \in \text{GL}(E)$	115
5	Espaces préhilbertiens ou euclidiens	117
	<i>Centrale.</i> Différence de bases orthonormales directes	118
	<i>Mines.</i> Endomorphismes symétriques et orthogonaux	119
	<i>X.</i> Extrema d'une fonction sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$	119
	<i>Centrale.</i> Matrices orthogonales d'ordre 3	120
	<i>X.</i> Trace d'un produit de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$	121
	<i>Centrale.</i> Sur le double produit vectoriel	122
	<i>Mines.</i> Produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, norme du produit	124

Mines. Orthogonalité d'une matrice par blocs	125
Mines. Endomorphisme symétrique sur $\mathbb{R}_n[X]$	126
Type X. Réduction d'une matrice creuse symétrique	127
Centrale. Matrices symétriques positives	128
Mines. Racine carrée d'un endomorphisme symétrique positif	130
Mines. Endomorphismes et matrices antisymétriques	132
Centrale MAPLE. Projection orthogonale dans $\mathbb{R}_{2n}[X]$	134
Type Mines. Orthogonalité des polynômes d'Hermite	136
X. Orthogonalité et minimisation avec les polynômes de Tchebycheff	138
Type X. Orthogonalité des polynômes de Legendre	140
Centrale. Minimisation d'intégrale et projection orthogonale	142
Type X. Matrices de Gram	144
X. Familles obtusangles	146
X. Théorème du minimax de Courant-Fischer	148
Type X. Polynômes orthogonaux associés à un poids	149

Géométrie, courbes et surfaces **153**

Centrale. Réduction d'une équation de quadrique	154
Centrale. Equation polaire d'un carré	155
Centrale. Etude d'une courbe paramétrée	155
X. Polygone dont les milieux des côtés sont imposés	156
Centrale. Rayon de courbure d'une courbe en polaire	158
Centrale. Isobarycentre de trois points d'une parabole	159
Centrale. Réduction d'une équation de conique	161
Mines. Caractérisation des tangentes à une ellipse	161
Centrale MAPLE. Famille de courbes paramétrées	162
Type Centrale. Normales les plus éloignées d'une ellipse	166
Centrale. Cylindre défini par génératrices et directrice	167
Centrale. Tracé du pentagone régulier à la règle et au compas	168
Type Mines. Définition biaxiale du paraboloïde hyperbolique	169
Centrale. Plans tangents contenant une droite donnée	170
Type Centrale. Courbe orthoptique de l'ellipse	171
Centrale. Sommets des paraboles à tangente imposée	173
Type Centrale. Recherche de lieu géométrique	175
Type X. Courbe de \mathbb{R}^2 définie de manière implicite	176
Centrale. Equation cartésienne d'un cône	178
Type X. Lieu du foyer d'une parabole à tangentes prescrites	179
Centrale. Images de parties de l'espace par l'inversion	181
Type X. Equation intrinsèque d'une courbe plane	183
Type X. Equation intrinsèque d'une courbe plane 2	184
Type X. Une surface réglée	184
Type X. Aire de la boucle du folium de Descartes	185
Mines. Tangentes à l'hippopède	187
Centrale. Podaire de l'hyperboloïde	190
Mines. Surface réglée et développable	192

7	Espaces vectoriels normés, suites	195
	<i>Type Centrale.</i> Limites de puissances de matrices	196
	<i>Type Mines.</i> Preuve de la formule de Stirling par Wallis	196
	<i>Mines.</i> Suite de complexes	197
	<i>Mines.</i> Une série spéciale alternée	198
	<i>Type Mines.</i> Limites des racines = racines de la limite	198
	<i>Type X.</i> Développement asymptotique des solutions de $x = \tan(x)$	200
	<i>Mines.</i> Produit infini : convergence, calcul	201
	<i>Type X.</i> Normes de Hölder	203
	<i>X.</i> Radicaux imbriqués	205
	<i>Type X.</i> Lemme de Cesàro, application à $u_{n+1} = \sin(u_n)$	207
	<i>Type X.</i> Cesàro (variante)	209
	<i>Type X.</i> Cesàro (variante 2)	210
	<i>Type X.</i> Suite récurrente linéaire d'ordre 3	211
	<i>Mines.</i> Limite de $\sin(2\pi n!e)$	213
	<i>X.</i> Théorème de Korovkin	214
	<i>Centrale.</i> Méthode de Newton sur les matrices	216
	<i>X.</i> Equivalent d'un produit en $+\infty$	220
	<i>X.</i> Normes subordonnées et sous-groupes bornés de $GL_n(\mathbb{C})$	222
8	Fonction d'une variable réelle	227
	<i>X.</i> Une majoration	228
	<i>Centrale MAPLE.</i> Fonction définie par une intégrale	228
	<i>Mines.</i> Intégration des relations de comparaison : application	230
	<i>Centrale.</i> Point fixe d'une fonction $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$	232
	<i>X.</i> Une fonction qui augmente les distances	233
	<i>Centrale.</i> Une équation fonctionnelle	234
	<i>X.</i> Limite pour $f \implies$ limite pour f' ?	235
	<i>X.</i> Etude d'une suite d'intégrales	237
9	Intégration	239
	<i>Centrale.</i> Intégrales à valeurs complexes	240
	<i>Centrale.</i> Suite simple, définie par des intégrales	241
	<i>Centrale MAPLE.</i> Calcul d'une intégrale	242
	<i>Mines.</i> Calcul d'une intégrale impropre	243
	<i>Mines.</i> Calcul de $\int_0^1 xE(1/x)dx$	244
	<i>Mines.</i> Equivalent d'une intégrale à paramètre	245
	<i>Type Centrale.</i> Permutation somme/intégrale	246
	<i>Mines.</i> Une propriété géométrique de l'intégrale	247
	<i>Centrale.</i> Fonction implicitement définie par une intégrale	248
	<i>Centrale MAPLE.</i> Développement asymptotique d'une suite	249
	<i>X.</i> Etude d'une suite d'intégrales	252
	<i>Mines.</i> Intégrale à paramètre dans les bornes	254
	<i>X.</i> Calcul d'une intégrale par ses sommes de Riemann	257
	<i>Mines.</i> Transformée de Laplace d'arctan	259
	<i>Type X.</i> Equivalent d'une intégrale à paramètre	261
	<i>Centrale.</i> Equivalents d'une transformée de Laplace	262
	<i>Centrale.</i> Intégrale dépendant d'un paramètre	264
	<i>Type X.</i> Transformée de Fourier de la loi normale	266
	<i>Type Mines.</i> Permutation somme/intégrale	268

<i>Centrale</i> MAPLE. Intégrales dépendant d'un paramètre	269
<i>Mines</i> . Convergence et valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$	273
<i>Mines</i> . Intégrale à paramètre vs. série de fonctions	275
<i>Type X</i> . Variante du lemme de Lebesgue	277
<i>Mines</i> . Une question d'intégrabilité	279
<i>Type X</i> . Equivalent d'une intégrale à paramètre	281
<i>Centrale</i> . Suite récurrente et intégrales à paramètre	282
<i>Centrale</i> . Théorème de la limite centrée	285
10 Séries numériques	289
<i>Mines</i> . Equivalent de $\sum_{k=1}^n k^k$ lorsque $n \rightarrow +\infty$	290
<i>Centrale</i> . Convergence d'une série à paramètres	290
<i>Mines</i> . Développement asymptotique	291
<i>Centrale</i> . Développement asymptotique 2	292
<i>Mines</i> . Développement asymptotique 3	293
<i>Centrale</i> . Séries et produits numériques	294
<i>Mines</i> . Etude impliquant une série de Bertrand	296
<i>Mines</i> . Etude de $\sum \int_0^1 f(x)x^n dx$	297
<i>Type X</i> . Sur la série des u_n lorsque $(u_n)_n$ est décroissante	299
X. Approximations d'un réel par des séries pseudo-alternées	301
X. Décomposition en série factorielle d'un réel	303
11 Séries de fonctions, de Fourier	305
<i>Mines</i> . Calcul de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$	306
<i>Mines</i> . Convergence simple, normale d'une série de fonctions	307
<i>Mines</i> . Inégalité isopérimétrique (ou de Wirtinger)	309
X. Série des primitives itérées d'une fonction	309
<i>Mines</i> . Equivalent d'une série de fonctions	311
<i>Centrale</i> MAPLE. Equivalent d'une série de fonctions 2	312
<i>Type Mines</i> . Etude d'une série de fonctions	315
<i>Centrale</i> . Séries de fonctions monotones	318
<i>Type X</i> . Propriétés de la somme d'une série de fonctions	319
<i>Mines</i> . Série de Fourier par des développements en série entière	321
<i>Type X</i> . Série de Fourier d'une fraction trigonométrique	323
<i>Mines</i> . Calcul d'une somme à l'aide d'une série entière	324
<i>Centrale</i> MAPLE. Transformation d'Abel et série de Fourier	325
12 Séries entières	329
<i>Centrale</i> . Rayons de convergence	330
<i>Mines</i> . Rayon de convergence d'une série entière	330
<i>Mines</i> . Equivalent d'une série entière au bord	330
X. Equivalent d'une série entière au bord 2	332
<i>Centrale</i> . Rayon de convergence et somme d'une série entière	332
<i>Type X</i> . Fonction non développable en série entière	333
<i>Mines</i> . Produit de Cauchy	335
<i>Mines</i> . Développement en série entière	336
<i>Mines</i> . Etude et somme d'une série entière	338
<i>Type Centrale</i> . Matrice et série entière	338

Mines. Noyau de Poisson	339
Type Centrale. Transformée de Laplace d'une série entière	343
Centrale MAPLE. Produit de séries entières	345
Type Mines. Série génératrice des polynômes d'Hermite	347
X. Equivalent au bord d'une série entière lacunaire	349
Centrale MAPLE. Etude d'une série génératrice	351
13 Équations différentielles	355
Type Mines. Système différentiel en $z = x + iy$	356
Type Centrale. Système différentiel antisymétrique	356
Type Mines. Le second membre est une exponentielle-polynôme	357
Type Mines. Equation d'ordre 1 avec raccordement	357
Type Centrale. Solutions maximales d'une équation différentielle	358
Mines. Variations des constantes	359
Mines. Equation différentielle, séries entières et raccordement	361
Type Mines. Séries entières et raccordement pour un second ordre	362
Type X. Série entière, variation de la constante et raccordement	364
Centrale MAPLE. Equation non linéaire, tracé des courbes intégrales	367
Mines. Principe de superposition sur une somme infinie	369
Centrale MAPLE. Système différentiel autonome	370
14 Fonctions de plusieurs variables	373
Type Centrale. Calcul d'une intégrale multiple	374
X. Bornes d'une fonction de trois variables	374
Centrale. Fonctions anisotropes sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$	375
Centrale MAPLE. Extrema d'une fonction de deux variables	376
Type Mines. Changement de variable polaire	378
Centrale. Extrema d'une fonction de deux variables 2	379
Type X. Calcul d'un Laplacien	380
Type Centrale. Calcul d'intégrale par une intégrale double	381
Type X. Centre de masse d'un demi-disque	382
Type Mines. Calcul d'intégrale double	383
Centrale. Difféomorphisme, équation aux dérivées partielles	384
Type Mines. Changement de variables dans une intégrale double	385
Type Centrale. Equation aux dérivées partielles du second ordre	386
Centrale. Optimisation d'intégrales avec contrainte au bord	387
15 Résumé MAPLE	391