

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| 1 Polynômes | 9 |
| Centrale. Factorisation de polynômes en irréductibles | 10 |
| Centrale. Triangle des racines d'un polynôme | 11 |
| X. Carré formé par les racines d'un polynôme | 13 |
| Centrale. Equations linéaires portant sur des polynômes | 13 |
| Mines. Factorisation d'un polynôme/calcul d'un produit | 15 |
| Type X. Polynômes de Tchebycheff | 16 |
| Type X. Calcul de $\zeta(2)$ à l'aide de polynômes | 18 |
| Centrale. Calcul d'un déterminant lié à un polynôme | 21 |
| Type X. Polynômes de Legendre | 23 |
| Centrale. Polynômes scindés à racines simples sur $\mathbb{R}[X]$ | 25 |
| X. Sommes des carrés dans un anneau | 26 |
| 2 Algèbre linéaire, matrices | 29 |
| Type Centrale. Travail sur des rangs | 30 |
| Centrale. Indépendance linéaire d'une famille de fonctions | 30 |
| X. Indice de nilpotence en dimension finie | 31 |
| Type X. Noyaux itérés | 32 |
| Type X. Applications des noyaux itérés | 34 |
| Type X. Produit d'endomorphismes nilpotents qui commutent | 35 |
| X. Equation matricielle sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ | 35 |
| X. Décomposition de l'identité en $uv + vu$ | 35 |
| X. Caractérisation des matrices nilpotentes par le spectre | 36 |
| Centrale. Comparaison des rangs de A , tAA et $A{}^tA$ | 37 |
| Mines. Hyperplans stables par un endomorphisme | 37 |
| Type X. Centre multiplicatif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ | 39 |
| Mines. Valeur propre commune à deux matrices | 41 |
| X. Somme nilpotente de matrices | 41 |
| Type Mines. Matrices à diagonale dominante | 42 |
| Centrale. Si $AB - BA = B \dots$ | 43 |
| Centrale. Cas d'égalité de $\text{Rg}(g \circ f)$ avec $\text{Rg}(g)$, avec $\text{Rg}(f)$ | 44 |
| Mines. Projecteurs qui commutent. | 45 |
| Mines. Un crochet de Lie | 46 |
| X. Expression du rang comme un min | 47 |
| Type X. Applications de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ conservant le produit | 47 |
| Type X. Matrices compagnon et commutant d'un cyclique | 48 |
| X. Formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ | 50 |
| X. Monoïde fini de matrices inversibles | 51 |
| Mines. Si $\text{tr}(A^k) = \text{tr}(B^k)$ pour tout $k \dots$ | 53 |
| X. Equations matricielles sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ | 55 |
| Type X. Une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ semblable à sa transposée | 56 |
| X. Hyperplans stables et formes linéaires | 58 |
| Centrale. Étude des matrices de trace nulle | 60 |
| Mines. Dualité | 63 |
| X. Une factorisation sur les endomorphismes | 64 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3 | Déterminants | 67 |
| | <i>Type Centrale.</i> Déterminant d'une matrice formée de ± 1 | 68 |
| | <i>Type Mines.</i> Déterminant par blocs | 68 |
| | <i>Type Mines.</i> Déterminant par blocs 2 | 69 |
| | <i>Centrale.</i> Matrices circulantes d'ordre 4 | 69 |
| | <i>Mines.</i> $\det(A + I_n)$ si $A^2 = 0$ | 70 |
| | <i>Mines.</i> Inverse d'une matrice à paramètres | 71 |
| | <i>Type X.</i> Déterminant des $ a_i - a_j $ | 72 |
| | <i>Type X.</i> Formule d'inversion matricielle | 73 |
| | <i>Mines.</i> Déterminants de Vandermonde | 74 |
| | <i>Type X.</i> Déterminant circulant | 76 |
| | <i>Type X.</i> Déterminants de Cauchy, de Hilbert | 78 |
| 4 | Réduction | 81 |
| | <i>Mines.</i> Caractérisation de certains projecteurs | 82 |
| | <i>Mines.</i> Polynôme annulateur | 82 |
| | <i>Type Centrale.</i> Polynôme annulateur 2 | 83 |
| | <i>Mines.</i> Polynôme annulateur 3 | 83 |
| | <i>Centrale.</i> Spectre et inverses de $\text{Id}_E - uv$ et $\text{Id}_E - vu$ | 84 |
| | <i>Mines.</i> Diagonalisation de U^1V pour U, V deux colonnes | 85 |
| | <i>Type Mines.</i> Réduction d'une matrice creuse | 86 |
| | <i>Mines.</i> Éléments propres d'une matrice | 87 |
| | <i>Mines.</i> Diagonalisabilité d'une application sur les matrices | 88 |
| | <i>Type Mines.</i> Diagonalisation simultanée | 89 |
| | <i>X.</i> Diagonalisation simultanée généralisée | 89 |
| | <i>Type Centrale.</i> Commutant d'un endomorphisme diagonalisable | 90 |
| | <i>Type Mines.</i> Un cas de décomposition des noyaux | 92 |
| | <i>Centrale.</i> Etude d'endomorphismes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ | 94 |
| | <i>Centrale.</i> Un endomorphisme sur les endomorphismes | 95 |
| | <i>Centrale.</i> Trigonalisation d'un endomorphisme nilpotent | 97 |
| | <i>Centrale MAPLE.</i> Réduction de matrices à paramètres | 99 |
| | <i>Mines.</i> Un spectre non trivial | 102 |
| | <i>X.</i> Sous-espaces stables par une matrice | 104 |
| | <i>Mines.</i> Caractérisation de la diagonalisabilité | 105 |
| | <i>Type X.</i> Diagonalisabilité d'un produit tensoriel d'ordre 2 | 107 |
| | <i>Centrale.</i> Diagonalisabilité, nilpotence de $f \mapsto f \circ g - g \circ f$ | 108 |
| | <i>Mines.</i> Diagonalisabilité et hyperplans stables | 109 |
| | <i>Centrale.</i> Valeur propre commune | 110 |
| | <i>X.</i> Que dire si u^2 est diagonalisable? | 111 |
| | <i>X.</i> Diagonalisation par blocs | 112 |
| | <i>X.</i> Diagonalisation par blocs 2 | 113 |
| | <i>X.</i> Diagonalisabilité de u , de $P(u)$ si $P'(u) \in \text{GL}(E)$ | 115 |
| 5 | Espaces préhilbertiens ou euclidiens | 117 |
| | <i>Centrale.</i> Différence de bases orthonormales directes | 118 |
| | <i>Mines.</i> Endomorphismes symétriques et orthogonaux | 119 |
| | <i>X.</i> Extrema d'une fonction sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$ | 119 |
| | <i>Centrale.</i> Matrices orthogonales d'ordre 3 | 120 |
| | <i>X.</i> Trace d'un produit de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ | 121 |
| | <i>Centrale.</i> Sur le double produit vectoriel | 122 |
| | <i>Mines.</i> Produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, norme du produit | 124 |

| | |
|--|-----|
| Mines. Orthogonalité d'une matrice par blocs | 125 |
| Mines. Endomorphisme symétrique sur $\mathbb{R}_n[X]$ | 126 |
| Type X. Réduction d'une matrice creuse symétrique | 127 |
| Centrale. Matrices symétriques positives | 128 |
| Mines. Racine carrée d'un endomorphisme symétrique positif | 130 |
| Mines. Endomorphismes et matrices antisymétriques | 132 |
| Centrale MAPLE. Projection orthogonale dans $\mathbb{R}_{2n}[X]$ | 134 |
| Type Mines. Orthogonalité des polynômes d'Hermite | 136 |
| X. Orthogonalité et minimisation avec les polynômes de Tchebycheff | 138 |
| Type X. Orthogonalité des polynômes de Legendre | 140 |
| Centrale. Minimisation d'intégrale et projection orthogonale | 142 |
| Type X. Matrices de Gram | 144 |
| X. Familles obtusangles | 146 |
| X. Théorème du minimax de Courant-Fischer | 148 |
| Type X. Polynômes orthogonaux associés à un poids | 149 |

Géométrie, courbes et surfaces 153

| | |
|---|-----|
| Centrale. Réduction d'une équation de quadrique | 154 |
| Centrale. Equation polaire d'un carré | 155 |
| Centrale. Etude d'une courbe paramétrée | 155 |
| X. Polygone dont les milieux des côtés sont imposés | 156 |
| Centrale. Rayon de courbure d'une courbe en polaire | 158 |
| Centrale. Isobarycentre de trois points d'une parabole | 159 |
| Centrale. Réduction d'une équation de conique | 161 |
| Mines. Caractérisation des tangentes à une ellipse | 161 |
| Centrale MAPLE. Famille de courbes paramétrées | 162 |
| Type Centrale. Normales les plus éloignées d'une ellipse | 166 |
| Centrale. Cylindre défini par génératrices et directrice | 167 |
| Centrale. Tracé du pentagone régulier à la règle et au compas | 168 |
| Type Mines. Définition biaxiale du paraboloïde hyperbolique | 169 |
| Centrale. Plans tangents contenant une droite donnée | 170 |
| Type Centrale. Courbe orthoptique de l'ellipse | 171 |
| Centrale. Sommets des paraboles à tangente imposée | 173 |
| Type Centrale. Recherche de lieu géométrique | 175 |
| Type X. Courbe de \mathbb{R}^2 définie de manière implicite | 176 |
| Centrale. Equation cartésienne d'un cône | 178 |
| Type X. Lieu du foyer d'une parabole à tangentes prescrites | 179 |
| Centrale. Images de parties de l'espace par l'inversion | 181 |
| Type X. Equation intrinsèque d'une courbe plane | 183 |
| Type X. Equation intrinsèque d'une courbe plane 2 | 184 |
| Type X. Une surface réglée | 184 |
| Type X. Aire de la boucle du folium de Descartes | 185 |
| Mines. Tangentes à l'hippopède | 187 |
| Centrale. Podaire de l'hyperboloïde | 190 |
| Mines. Surface réglée et développable | 192 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 7 | Espaces vectoriels normés, suites | 195 |
| | <i>Type Centrale.</i> Limites de puissances de matrices | 196 |
| | <i>Type Mines.</i> Preuve de la formule de Stirling par Wallis | 196 |
| | <i>Mines.</i> Suite de complexes | 197 |
| | <i>Mines.</i> Une série spéciale alternée | 198 |
| | <i>Type Mines.</i> Limites des racines = racines de la limite | 198 |
| | <i>Type X.</i> Développement asymptotique des solutions de $x = \tan(x)$ | 200 |
| | <i>Mines.</i> Produit infini : convergence, calcul | 201 |
| | <i>Type X.</i> Normes de Hölder | 203 |
| | <i>X.</i> Radicaux imbriqués | 205 |
| | <i>Type X.</i> Lemme de Cesàro, application à $u_{n+1} = \sin(u_n)$ | 207 |
| | <i>Type X.</i> Cesàro (variante) | 209 |
| | <i>Type X.</i> Cesàro (variante 2) | 210 |
| | <i>Type X.</i> Suite récurrente linéaire d'ordre 3 | 211 |
| | <i>Mines.</i> Limite de $\sin(2\pi n!e)$ | 213 |
| | <i>X.</i> Théorème de Korovkin | 214 |
| | <i>Centrale.</i> Méthode de Newton sur les matrices | 216 |
| | <i>X.</i> Equivalent d'un produit en $+\infty$ | 220 |
| | <i>X.</i> Normes subordonnées et sous-groupes bornés de $GL_n(\mathbb{C})$ | 222 |
| 8 | Fonction d'une variable réelle | 227 |
| | <i>X.</i> Une majoration | 228 |
| | <i>Centrale MAPLE.</i> Fonction définie par une intégrale | 228 |
| | <i>Mines.</i> Intégration des relations de comparaison : application | 230 |
| | <i>Centrale.</i> Point fixe d'une fonction $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ | 232 |
| | <i>X.</i> Une fonction qui augmente les distances | 233 |
| | <i>Centrale.</i> Une équation fonctionnelle | 234 |
| | <i>X.</i> Limite pour $f \implies$ limite pour f' ? | 235 |
| | <i>X.</i> Etude d'une suite d'intégrales | 237 |
| 9 | Intégration | 239 |
| | <i>Centrale.</i> Intégrales à valeurs complexes | 240 |
| | <i>Centrale.</i> Suite simple, définie par des intégrales | 241 |
| | <i>Centrale MAPLE.</i> Calcul d'une intégrale | 242 |
| | <i>Mines.</i> Calcul d'une intégrale impropre | 243 |
| | <i>Mines.</i> Calcul de $\int_0^1 xE(1/x)dx$ | 244 |
| | <i>Mines.</i> Equivalent d'une intégrale à paramètre | 245 |
| | <i>Type Centrale.</i> Permutation somme/intégrale | 246 |
| | <i>Mines.</i> Une propriété géométrique de l'intégrale | 247 |
| | <i>Centrale.</i> Fonction implicitement définie par une intégrale | 248 |
| | <i>Centrale MAPLE.</i> Développement asymptotique d'une suite | 249 |
| | <i>X.</i> Etude d'une suite d'intégrales | 252 |
| | <i>Mines.</i> Intégrale à paramètre dans les bornes | 254 |
| | <i>X.</i> Calcul d'une intégrale par ses sommes de Riemann | 257 |
| | <i>Mines.</i> Transformée de Laplace d'arctan | 259 |
| | <i>Type X.</i> Equivalent d'une intégrale à paramètre | 261 |
| | <i>Centrale.</i> Equivalents d'une transformée de Laplace | 262 |
| | <i>Centrale.</i> Intégrale dépendant d'un paramètre | 264 |
| | <i>Type X.</i> Transformée de Fourier de la loi normale | 266 |
| | <i>Type Mines.</i> Permutation somme/intégrale | 268 |

| | |
|---|------------|
| <i>Centrale</i> MAPLE. Intégrales dépendant d'un paramètre | 269 |
| <i>Mines</i> . Convergence et valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ | 273 |
| <i>Mines</i> . Intégrale à paramètre vs. série de fonctions | 275 |
| <i>Type X</i> . Variante du lemme de Lebesgue | 277 |
| <i>Mines</i> . Une question d'intégrabilité | 279 |
| <i>Type X</i> . Equivalent d'une intégrale à paramètre | 281 |
| <i>Centrale</i> . Suite récurrente et intégrales à paramètre | 282 |
| <i>Centrale</i> . Théorème de la limite centrée | 285 |
| 10 Séries numériques | 289 |
| <i>Mines</i> . Equivalent de $\sum_{k=1}^n k^k$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ | 290 |
| <i>Centrale</i> . Convergence d'une série à paramètres | 290 |
| <i>Mines</i> . Développement asymptotique | 291 |
| <i>Centrale</i> . Développement asymptotique 2 | 292 |
| <i>Mines</i> . Développement asymptotique 3 | 293 |
| <i>Centrale</i> . Séries et produits numériques | 294 |
| <i>Mines</i> . Etude impliquant une série de Bertrand | 296 |
| <i>Mines</i> . Etude de $\sum \int_0^1 f(x)x^n dx$ | 297 |
| <i>Type X</i> . Sur la série des u_n lorsque $(u_n)_n$ est décroissante | 299 |
| X. Approximations d'un réel par des séries pseudo-alternées | 301 |
| X. Décomposition en série factorielle d'un réel | 303 |
| 11 Séries de fonctions, de Fourier | 305 |
| <i>Mines</i> . Calcul de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$ | 306 |
| <i>Mines</i> . Convergence simple, normale d'une série de fonctions | 307 |
| <i>Mines</i> . Inégalité isopérimétrique (ou de Wirtinger) | 309 |
| X. Série des primitives itérées d'une fonction | 309 |
| <i>Mines</i> . Equivalent d'une série de fonctions | 311 |
| <i>Centrale</i> MAPLE. Equivalent d'une série de fonctions 2 | 312 |
| <i>Type Mines</i> . Etude d'une série de fonctions | 315 |
| <i>Centrale</i> . Séries de fonctions monotones | 318 |
| <i>Type X</i> . Propriétés de la somme d'une série de fonctions | 319 |
| <i>Mines</i> . Série de Fourier par des développements en série entière | 321 |
| <i>Type X</i> . Série de Fourier d'une fraction trigonométrique | 323 |
| <i>Mines</i> . Calcul d'une somme à l'aide d'une série entière | 324 |
| <i>Centrale</i> MAPLE. Transformation d'Abel et série de Fourier | 325 |
| 12 Séries entières | 329 |
| <i>Centrale</i> . Rayons de convergence | 330 |
| <i>Mines</i> . Rayon de convergence d'une série entière | 330 |
| <i>Mines</i> . Equivalent d'une série entière au bord | 330 |
| X. Equivalent d'une série entière au bord 2 | 332 |
| <i>Centrale</i> . Rayon de convergence et somme d'une série entière | 332 |
| <i>Type X</i> . Fonction non développable en série entière | 333 |
| <i>Mines</i> . Produit de Cauchy | 335 |
| <i>Mines</i> . Développement en série entière | 336 |
| <i>Mines</i> . Etude et somme d'une série entière | 338 |
| <i>Type Centrale</i> . Matrice et série entière | 338 |

| | |
|---|------------|
| Mines. Noyau de Poisson | 339 |
| Type Centrale. Transformée de Laplace d'une série entière | 343 |
| Centrale MAPLE. Produit de séries entières | 345 |
| Type Mines. Série génératrice des polynômes d'Hermite | 347 |
| X. Equivalent au bord d'une série entière lacunaire | 349 |
| Centrale MAPLE. Etude d'une série génératrice | 351 |
| 13 Équations différentielles | 355 |
| Type Mines. Système différentiel en $z = x + iy$ | 356 |
| Type Centrale. Système différentiel antisymétrique | 356 |
| Type Mines. Le second membre est une exponentielle-polynôme | 357 |
| Type Mines. Equation d'ordre 1 avec raccordement | 357 |
| Type Centrale. Solutions maximales d'une équation différentielle | 358 |
| Mines. Variations des constantes | 359 |
| Mines. Equation différentielle, séries entières et raccordement | 361 |
| Type Mines. Séries entières et raccordement pour un second ordre | 362 |
| Type X. Série entière, variation de la constante et raccordement | 364 |
| Centrale MAPLE. Equation non linéaire, tracé des courbes intégrales | 367 |
| Mines. Principe de superposition sur une somme infinie | 369 |
| Centrale MAPLE. Système différentiel autonome | 370 |
| 14 Fonctions de plusieurs variables | 373 |
| Type Centrale. Calcul d'une intégrale multiple | 374 |
| X. Bornes d'une fonction de trois variables | 374 |
| Centrale. Fonctions anisotropes sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ | 375 |
| Centrale MAPLE. Extrema d'une fonction de deux variables | 376 |
| Type Mines. Changement de variable polaire | 378 |
| Centrale. Extrema d'une fonction de deux variables 2 | 379 |
| Type X. Calcul d'un Laplacien | 380 |
| Type Centrale. Calcul d'intégrale par une intégrale double | 381 |
| Type X. Centre de masse d'un demi-disque | 382 |
| Type Mines. Calcul d'intégrale double | 383 |
| Centrale. Difféomorphisme, équation aux dérivées partielles | 384 |
| Type Mines. Changement de variables dans une intégrale double | 385 |
| Type Centrale. Equation aux dérivées partielles du second ordre | 386 |
| Centrale. Optimisation d'intégrales avec contrainte au bord | 387 |
| 15 Résumé MAPLE | 391 |