COURS ET TRAVAUX DIRIGÉS DE MATHÉMATIQUES

collection dirigée par **Nicolas Nguyen**

Analyse et probabilités

COURS DÉTAILLÉ AVEC DÉMONSTRATIONS COMMENTÉES, ASTUCES, MISES EN GARDE

L'ESSENTIEL SOUS FORME DE SYNTHÈSES, MÉTHODES ET TD

LES EXERCICES AVEC LEURS CORRIGÉS COMPLETS ET EXPLIQUÉS

L2

Olivier Arrigoni

ellipses

CHAPITRE 1

Introduction

Considérant une suite numérique (réelle ou complexe) (u_n), on va chercher à étudier sa *somme*, à savoir $u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}+u_n$ pour n entier quelconque. Toute la question des séries numériques est de savoir à quelle condition (sur (u_n)) la somme constitue une suite convergente. On verra dans un premier temps que certaines de ces sommes peuvent se calculer, mais elles sont en règle générale rares. Ainsi, il sera nécessaire d'étudier la somme sans forcément la calculer. Nombre de sujets en mathématiques sont liés aux séries. En premier lieu, les *fonctions définies par des séries* sont au cœur des thèmes d'Analyse pour envisager des fonctions spéciales aux propriétés importantes. Ensuite, les *probabilités en univers infinis*, motivées par des modèles de référence, utilisent de façon naturelle la notion de séries, comme généralisation de somme finie par leur convergence.

Objectifs

Dans un premier temps, on doit connaître le fondement de la notion de convergence d'une série numérique, qui passe par :

- ▷ La notion de *somme partielle* d'une suite numérique ;
- ▷ Les cas usuels de calculs de sommes partielles ;
- ▷ Les cas où il ne sera manifestement pas possible de calculer ces sommes (nombreux !).

Ensuite, on doit connaître les critères de convergence des séries à termes positifs, qui sont essentiellement :

- ▷ La comparaison à des intégrales ;
- ▷ Quelques règles spéciales (comme la règle de d'Alembert) ;
- ▷ La comparaison aux *séries de référence*, notamment les séries de Riemann, permettant de trouver la nature d'une multitude de séries.

Pour les séries à termes quelconques, il y aura quelques critères importants, à savoir :

- ▷ La notion d'absolue convergence d'une série, fondamentale pour un renvoi aux séries à termes positifs, mais aussi en probabilités ;
- ▷ Des propriétés calculatoires mettant en jeu l'absolue convergence, comme le *produit de Cauchy* ou les *séries doubles*.
- ▷ Les *séries alternées*, cas fréquent de séries dont le terme général n'est pas de signe fixe.

SÉRIES NUMÉRIQUES

Plan du cours détaillé

COURS DÉTAILLÉ

Section I. Convergence des séries numériques

Pour toute la suite, on se donne (u_n) une suite numérique (réelle ou complexe).

1 Sommes et restes

a. Les sommes partielles

Définition : *On appelle* ***suite des sommes partielles*** *de (u_n) la suite (S_n) définie pour tout entier n par*

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Avec une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$, $n_0 \in \mathbb{N}$, la somme débute à u_{n_0}

Le terme u_n est appelé ***terme général*** *de la suite (S_n).*
On appellera alors série associée à la suite (u_n) la suite des sommes partielles (S_n).

b. Convergence et somme d'une série convergente

Définition : *On dit que la* ***série*** *$\sum_{n \geqslant 0} u_n$ de* ***terme général*** *u_n converge (resp. diverge) si la suite de ses sommes partielles (S_n) converge dans $\mathbb{R}$ (resp. diverge). Dans le cas de la convergence, la limite ℓ de la suite (S_n) est appelée* ***somme de la série*** *(u_n) et elle est notée*

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Vocabulaire : *Savoir si une série est convergente ou divergente, c'est en étudier la* ***nature****. C'est en fait étudier la nature de la suite des sommes partielles.*

Exemples :
- Pour $u_n = 0$, $n \geqslant 0$, les sommes partielles sont nulles et la série converge, de somme nulle.
- Pour $u_n = 1$, $n \geqslant 0$, $S_n = n + 1 \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$: la série n'est pas convergente.
- Pour $u_n = (-1)^n$ pour tout n, on a $S_n = 1$ pour n pair et $S_n = 0$ pour n impair et cette suite n'admet aucune limite : la série est divergente.

Remarque : Il ne faut pas confondre dans ces notations trois objets de nature différentes

- Les *sommes partielles*, qui forment une suite : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k, \quad n \in \mathbb{N}$.
- La *somme de la série*, qui est l'éventuelle limite de la suite des sommes partielles et qui n'a de sens que si cette limite existe.

Il y a pour les suites les notations analogues $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (u_n)_{n\geqslant 0}$ ou plus simplement (u_n).

- La *série*, qui est l'objet formel dont on étudie la convergence (ou la divergence), que l'on note en général

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n, \quad \sum_{n\geqslant 0} u_n \quad \text{ou plus simplement} \quad \sum u_n.$$

Notation : *Si la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ n'a de termes qu'à partir du rang n_0, on pourra noter l'objet formel série associé sous la forme*

$$\sum_{n\geqslant n_0} u_n$$

En particulier, dans un tel cas, les sommes partielles $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ sont définies par

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k, \qquad n \geqslant n_0.$$

c. Condition nécessaire de convergence

La réciproque est fausse !

Proposition 1.1. Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Démonstration

Soit (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, que l'on suppose convergente. On note également ℓ la somme de la série. Alors on note que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$, puis par opérations élémentaires sur les limites on a

$$u_n = S_n - S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell = 0.$$

□

u_n peut avoir une autre limite ou ne pas en avoir du tout.

En pratique : C'est la contraposée de la proposition précédente qui est utilisée. Si le terme général u_n ne tend pas vers 0, alors la série diverge et on la dit même *grossièrement divergente*.

Exemple : La série $\sum_{n\geqslant 1}(1-\frac{1}{n})^n$ est grossièrement divergente, puisque

Pour $x \to 0$, on rappelle que $\ln(1-x) = -x + o(x)$

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) &= \exp\left(n\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\ &= \exp(-1+o(1)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1} \neq 0.\end{aligned}$$

Exemple : On présente ici le cas d'une série numérique divergente dont le terme général tend pourtant vers 0. On considère ici la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ que l'on nomme *série harmonique*. Si l'on note toujours (S_n) la suite de ses sommes partielles, alors on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

De cette inégalité, on tire que $S_{2n} \geqslant S_n + \frac{1}{2}$ puis par une récurrence évidente on a $S_{2^n} \geqslant \frac{n}{2} \to +\infty$ pour $n \to +\infty$. On trouve donc une suite extraite de (S_n) qui diverge, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ n'est donc pas convergente. Pourtant, son terme général tend vers 0.

d. Restes d'une série convergente

⚠ Cela n'a pas de sens si la série diverge !

Définition : *Lorsqu'une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente, en notant ℓ la somme de la série, on appelle* ***suite des restes*** *de la série la suite définie pour tout entier n par*

$$R_n = \ell - S_n = R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Pour tout entier n, le nombre R_n est appelé ***reste d'ordre*** *n de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.*

Proposition 1.2. Pour toute série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ convergente, on a

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = 0.$$

□ **Démonstration**

Si la série est convergente, par définition même, on a $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, la somme de la série. Ainsi, par différence, on a $R_n = \ell - S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell = 0$. □

La sous-partie qui suit donne un exemple fondamental de séries numériques, que sont les *séries géométriques*.

2 Séries géométriques

a. Sommes géométriques

Proposition 1.3. Pour tout q complexe différent de 1, et tout entier naturel n on a

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Pour $q = 1$, la somme en question vaut $n+1$, $n \geqslant 0$.

□ **Démonstration**

Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. On calculer $(1-q)S_n$:

$$\begin{aligned}(1-q)S_n &= (1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^n)\\ &= 1+q+q^2+\cdots+q^n-(q+q^2+q^3+\cdots+q^{n+1})\\ &= 1+\cancel{q}-\cancel{q}+\cancel{q^2}-\cancel{q^2}+\cancel{q^3}-\cancel{q^3}+\cdots+\cancel{q^n}-\cancel{q^n}+q^{n+1}\\ &= 1-q^{n+1}.\end{aligned}$$

Si $q \neq 1$, soit $1-q \neq 0$, on peut isoler S_n en divisant par $1-q$ pour avoir $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
□

Exemple : Pour tout entier n, on a $\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1}-1}{3-1} = \frac{3^{n+1}-1}{2}$.

b. Séries géométriques

Théorème 1.4. Soit $q \in \mathbb{C}$. On a les deux cas suivants sur la *série géométrique* $\sum_{n\geqslant 0} q^n$:

- Si on a $|q| \geqslant 1$, la série $\sum q^n$ diverge grossièrement.
- Si on a $|q| < 1$, la série $\sum q^n$ converge.

De plus, dans le cas de la convergence, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

□ **Démonstration**

Lorsque $|q| \geqslant 1$, on a bien sûr $|q|^n \geqslant 1$ pour tout entier n et le terme général ne tend pas vers 0. En revanche, si $|q| < 1$, on sait que q^n tend vers 0 et en reprenant les sommes partielles on a

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-q},$$

ce qui assure la convergence et donne la somme de la série. □

Exemple : La série $\sum_{n\geqslant 0} 2^{-n}$ est convergente (on prend $q = \frac{1}{2}$), avec en plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Remarque : On va voir dans la suite que cet exemple de séries est fondamental pour l'étude de nombreuses autres séries. Il s'agit de séries de *référence* à plusieurs titres : non seulement on sait déterminer leur nature dans tous les cas mais on dispose en plus de la somme de la série.

3 Propriété des sommes de séries

a. Début de la sommation

On ne change pas la nature d'une série en changeant un nombre fini de ses termes.

Proposition 1.5. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite numérique et $n_0 \in \mathbb{N}$. Alors on a l'équivalence :

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge} \iff \sum_{n\geqslant n_0} u_n \text{ converge}.$$

□ **Démonstration**

Soit n_0 un entier naturel. Pour tout $n \geqslant n_0$, on peut écrire

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

Ainsi, en notant (S_n) (resp. (S'_n)) la suite des sommes partielles de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ (resp. $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$), on a $S_n = C + S'_n$ pour tout entier n où $C = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$ est une constante qui ne dépend pas de n. Puisque les deux suites (S_n) et (S'_n) diffèrent d'une constante, la convergence de l'une entraine la convergence de l'autre et vice versa. Qui plus est, en notant ℓ et ℓ' les sommes respectives des séries, on a même $\ell = \ell' + C$. ▢

⚠ En revanche, les sommes de séries sont a priori différentes.

Exemple : Pour tout q complexe vérifiant $|q| < 1$, la série $\sum_{n\geqslant n_0} q^n$ est convergente avec en plus

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} q_n = \frac{q^{n_0}}{1-q}.$$

Notation : *Comme les premiers termes ne changent pas la nature d'une série, on pourra noter $\sum u_n$ plutôt que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ou encore $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ pour juger de la nature d'une série (convergente ou divergente) sans se préoccuper de sa somme.*

b. Combinaison linéaire de séries

Proposition 1.6. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries convergentes. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la série $\sum \lambda u_n + \mu v_n$ est convergente avec de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

En particulier, l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites de série convergente est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites et l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \to & \mathbb{K} \\ (u_n) & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{array}$$

est une *forme linéaire* sur $\mathcal{S}$.

▢ **Démonstration**

On écrit pour tout entier n par linéarité de la somme finie de termes

$$\sum_{k=0}^{n} (\lambda u_n + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \mu \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Ainsi, si les sommes partielles des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, il en est de même pour $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ avec en plus la formule sur la somme des séries. Pour ce qui est de l'ensemble des séries convergentes, on remarque que $\mathcal{S} \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (espace des suites numériques). On peut voir cet ensemble comme un sous-espace vectoriel en notant qu'il est non vide (la suite nulle est de série convergente) et si $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ sont de séries convergentes, ce qui précède montre que $\lambda u + \mu v = (\lambda u_n + \mu v_n)$ est de série convergente donc est élément de $\mathcal{S}$.
Enfin, la fonction f donnée est à valeurs scalaires ($\mathbb{K}$) et ce qui précède sur les sommes de séries montre que $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$ pour tous $u, v \in \mathcal{S}$, ce qui donne la linéarité de f. ▢

⚠ Il n'y a donc pas de réciproque.

Remarque : Si on a deux suites telles que $\sum(u_n + v_n)$ est convergente, on n'est pas certain que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ soient convergentes. On peut prendre $v_n = -u_n$ où $\sum u_n$ diverge pour s'en convaincre. C'est pour cela que l'on a supposé la convergence des séries dans la proposition précédente.

c. Séries à termes complexes

> 📌 Notons bien ici l'équivalence des convergences.

Théorème 1.7. Soit (u_n) une suite complexe. On a l'équivalence :

$$\sum u_n \text{ converge } \Leftrightarrow \sum \mathfrak{Re}\,(u_n) \text{ et } \sum \mathfrak{Im}\,(u_n) \text{ convergent }.$$

Dans le cas de la convergence, on a en plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Re}\,(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Im}\,(u_n).$$

▢ **Démonstration**

Pour tout entier n, on a les sommes sur les sommes partielles

$$\sum_{n=k}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{Re}\,(u_k) + i \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{Im}\,(u_k).$$

De plus, puisque la convergence d'une suite (ici des sommes partielles) équivaut à la convergence de ses parties réelles et imaginaires, on en déduit le résultat. ▢

Exemple : Soit $\rho \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. La série à termes complexes $\sum(\rho e^{i\theta})^n$ est convergente de somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\rho e^{i\theta})^n = \frac{1}{1-\rho e^{i\theta}} = \frac{1-\rho e^{-i\theta}}{1+\rho^2 - 2\cos(\theta)\rho}.$$

Les séries des parties réelles et parties imaginaires sont donc convergentes avec :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \cos(n\theta) = \frac{1-\rho\cos(\theta)}{1+\rho^2-2\cos(\theta)\rho}; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \sin(n\theta) = \frac{\rho\sin(\theta)}{1+\rho^2-2\cos(\theta)\rho}.$$

4 Séries télescopiques

a. Sommes télescopiques

Définition : *On appelle* ***somme télescopique*** *toute somme dont le terme général est de la forme $u_{k+1} - u_k$, pour (u_k) une suite quelconque soit*

> 💬 On peut aussi considérer $u_k - u_{k+1}$.

$$\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k).$$

> 📌 Si la sommation débute à n_0 et $n \geqslant n_0$, on remplace u_0 par u_{n_0}.

Proposition 1.8. Pour tout entier n, pour toute suite numérique (u_k), on a

$$\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

▢ **Démonstration**

On écrit la somme en extension, puis on constate des simplifications sur des termes