fiche

Géométrie

I. Principaux quadrilatères

Parallélogramme

1. **Définition** : quadrilatère dont les **diagonales** se coupent en leur milieu
2. **Propriété** : quadrilatère dont les **côtés** sont parallèles et égaux deux à deux
3. **Aire** : (base × hauteur)

Rectangle

1. **Définition** : parallélogramme dont les **diagonales** ont la **même longueur**
2. **Propriété** : parallélogramme possédant deux **côtés** consécutifs **perpendiculaires**
3. **Aire** : (longueur × largeur)

Losange

1. **Définition** : parallélogramme dont les **diagonales** se coupent perpendiculairement
2. **Propriété** : parallélogramme possédant 2 côtés consécutifs égaux
3. **Aire** : (grande diagonale × petite diagonale) / 2

Carré

1. **Définition** : c'est un losange et un rectangle
2. **Propriété** : c'est un losange et un rectangle
3. **Aire** : (côté × côté)

II. Triangles

- Aire = $\dfrac{\text{Base} \times \text{hauteur}}{2}$

  NB : Dans un triangle rectangle, l'aire correspond aussi à la moitié du produit des 2 côtés perpendiculaires.

- **Théorèmes à connaître** :

  - **Théorème de Pythagore :** dans un triangle ABC rectangle en B, on a l'égalité suivante : **$AB^2 + BC^2 = AC^2$**.

  - **Théorème de Thalès :** soit un triangle ABC, et deux points D et E des droites (AB) et (AC) de sorte que la droite (DE) soit parallèle à la droite (BC). Alors, on a :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \text{ et } \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

- **Les droites particulières** :

  - Hauteur :
    - Droite issue d'un sommet qui coupe **perpendiculairement** le côté opposé.
    - Les 3 hauteurs d'un triangle sont **concourantes** : elles se croisent en un point nommé **l'orthocentre**.

  - Médiane :
    - Droite issue d'un sommet qui coupe le côté opposé en son **milieu**.

- Une médiane coupe le triangle en 2 triangles d'aires identiques. Les 3 médianes coupent le triangle en 6 triangles d'aires identiques.
- Les 3 médianes d'un triangle sont concourantes : elles se croisent en un point nommé le **centre de gravité** du triangle. Ce point se situe au 2/3 de la médiane en partant du sommet.

➤ Bissectrice :

- Droite qui coupe un angle en deux parties égales.
- Les 3 bissectrices d'un triangle sont concourantes : elles se croisent en un point qui est le **centre du cercle inscrit**.

➤ Médiatrice :

- C'est la droite qui **coupe un côté en son milieu et perpendiculairement**. Elle ne part pas forcément d'un sommet du triangle.
- Les points situés sur la médiatrice sont équidistants des extrémités du segment qu'elle coupe.
- Les 3 médiatrices d'un triangle sont concourantes : elles se croisent en un point qui est le **centre du cercle circonscrit** au triangle.

■ Remarque : Dans un triangle isocèle en B, les 4 droites particulières issues de B sont confondues. De même, dans un triangle, ces 4 droites particulières sont confondues.

III. Angles

■ Somme des angles d'un **triangle : 180°**

■ Somme des angles d'un **quadrilatère : 360°**

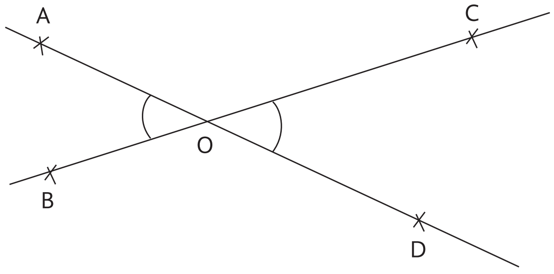
■ Angle d'une **droite : 180°**

■ Angle d'un **cercle : 360°**

■ Angles **complémentaires** : angle A + angle B = 90°

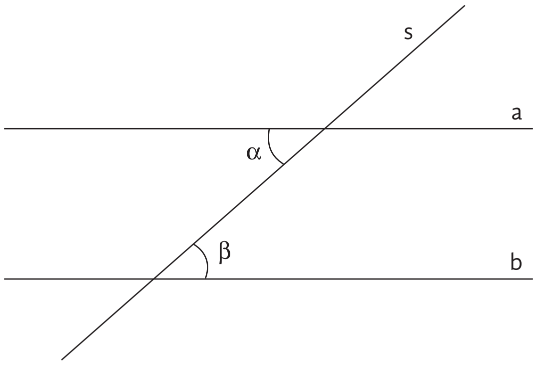
■ Angles **supplémentaires** : angle A + angle B = 180°

■ **Angles opposés :** Les angles AOB et COD sont égaux

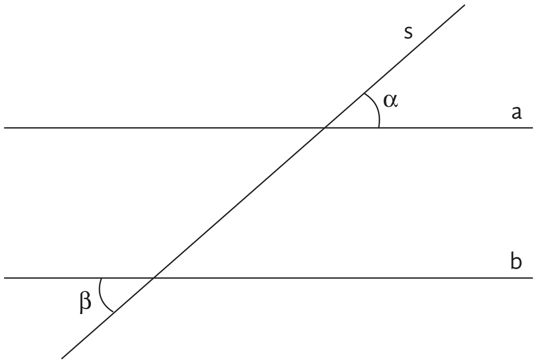


Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont opposés par le sommet.

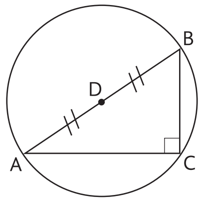
- **Angles alternes-internes :** si les droites *a* et *b* sont parallèles alors les angles α et β sont égaux.



- **Angles alternes-externes :** si les droites *a* et *b* sont parallèles alors les angles α et β sont égaux.



IV. Cercles



- **Périmètre :** $2 \times \pi \times r$
- **Aire :** $\pi \times r^2$
- **Astuce :** Un triangle inscrit dans un cercle et dont un des côtés coïncide avec un diamètre du cercle est un triangle rectangle.

V. Volumes

- Volume d'un cube d'arête a **:** $\boldsymbol{a^3}$
- Volume d'un pavé droit **: Hauteur × Longueur × Largeur**

VI. Astuces

- Diagonales d'un carré de côté c : $\sqrt{2 \times c}$
- Hauteur d'un triangle équilatéral de côté a : $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- Dans un triangle rectangle en A, la longueur de la médiane issue de A vaut la moitié de la longueur de l'hypoténuse
- Dans un triangle isocèle et rectangle en A, la hauteur issue de A vaut la moitié de la longueur de l'hypoténuse
- Certains triangles rectangles à connaître par cœur : (côté 1, côté 2, côté 3).
  (3-4-5), (6-8-10), (12-16-20) et (5-12-13).

Équations

I. Équations

- Dans les questions qui portent sur des équations, il est impératif de transformer chacune des données de votre énoncé sous forme d'équation, en gardant toujours en tête l'inconnue que vous cherchez.

- ***Remarque*** : Pour résoudre un système à *n* inconnues, il est nécessaire d'avoir *n* équations afin de connaître les valeurs de toutes les inconnues.
  En revanche, il est parfois possible de trouver la valeur d'une inconnue avec seulement 2 équations, même si on a plus de 2 inconnues !
  Ex. : A+B+C+D+E = 10 et A+B+C+D+2E = 11 à on peut ici déduire que E=1. Mais on ne peut pas déduire la valeur des autres inconnues.

II. Moyennes

- **Moyenne « Classique » (Arithmétique) :** C'est la somme des valeurs divisée par le nombre de valeurs. En d'autres termes on a :

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

  Ex. : Pour calculer la taille moyenne des individus d'un groupe, on additionne les tailles de chaque personne du groupe, et on divise cette somme par le nombre de personnes constituant le groupe.

- **Moyenne pondérée :** C'est la somme des valeurs multipliées par leurs coefficients respectifs divisée par le nombre de valeurs. En d'autres termes on a :

$$\overline{X} = \frac{c_1 \times X_1 + c_2 \times X_2 + \ldots + c_n + X_n}{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}$$

  Ex. : Une classe composée de 8 filles et 12 garçons. La moyenne des filles est de 14 et la moyenne des garçons est de 18. La moyenne de la classe sera donc égale à :

$$\text{Moyenne} = \frac{8 \times 14 + 12 \times 18}{8 + 12} = \frac{328}{20} = 16{,}4$$

III. Pourcentages

- **Augmentation de 20 % :** Prix final = (1 + 20 %) × Prix initial = **1,2 × Prix initial**

- **Baisse de 20 % :** Prix final = (1 – 20 %) × Prix initial = **0,8 × Prix initial**

Si nous avons $\frac{\text{prix final}}{\text{prix initial}}$ = 1,30, alors nous avons une **augmentation de 30 %,** car 1,3 = 1 + 30 %.

Si nous avons $\frac{\text{prix final}}{\text{prix initial}}$ = 0,60, alors nous avons une **baisse de 40 %,** car 0,6 = 1 – 40 %

IV. Intérêts

Soit C_0 le capital placé, n le nombre d'années et R le taux d'intérêt

- **Intérêts simples (cas classique) :**
  - Capital final au bout de n années : $\boldsymbol{S = C_0 \times (1 + nR)}$
  - Intérêts perçus : $\boldsymbol{C_0 \times nR}$
- **Intérêts composés :**
  - Capital final au bout de n années : $\boldsymbol{S = C_0 \times (1 + R)^n}$
  - Intérêts perçus : $\boldsymbol{C_0 \times (1 + R)^n - C_0}$

V. Vitesse, Distance, Temps

$$\text{Vitesse} = \frac{\text{Distance}}{\text{Temps}} \Leftrightarrow \text{Temps} = \frac{\text{Distance}}{\text{Vitesse}} \Leftrightarrow \text{Distance} = \text{Temps} \times \text{Vitesse}$$

- Cette unique équation vous permet de résoudre théoriquement tous les cas de vitesse – distance – temps que vous pouvez rencontrer.
  Cependant, dans de nombreux cas, il vaut mieux utiliser des astuces pour gagner du temps. Nous en parlerons dans la correction des exercices.

Probabilités

I. Probabilités

- **Probabilité d'un tirage :** $\dfrac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$

La règle de base consiste à diviser le nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles. La difficulté est alors de réussir à trouver le nombre de cas favorables ainsi que le nombre de cas possibles.

Ex. 1 : Combien ai-je de chances de tirer une dame dans un jeu de 52 cartes ?

Réponse : $\dfrac{\text{Nombre de dames}}{\text{Nombre de cartes}} = \dfrac{4}{52}$, soit 1 chance sur 13

Ex. 2 : Combien ai-je de chances de tirer une dame ou un trèfle dans un jeu de 52 cartes ?

Attention : il ne faut pas compter en double la dame de trèfle dans les cas favorables !

Réponse :

$$\frac{\text{Nombre de dames + nombre de trèfles – dame de trèfles}}{\text{Nombre de cartes}} = \frac{4 + 13 - 1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

Ex. 3 : Combien ai-je de chances de tirer un roi dans un jeu de 52 cartes, sachant que je n'ai pas tiré le roi de pique ?

Attention : Le roi de pique ne fait plus parti des cas favorables, ni même des cas possibles.

Réponse : $\dfrac{\text{Nombre de rois restants}}{\text{Nombre de cartes restantes}} = \dfrac{3}{51}$, soit 1 chance sur 17 ! (car $51 = 3 \times 17$).

II. Tableau

Voici un genre d'exercice qui revient assez fréquemment au Tage Mage®.

Ex. : Dans un groupe de 60 personnes, 37 individus parlent anglais, 20 parlent espagnols et 7 ne parlent aucune des deux langues. Combien de personnes parlent espagnol et ne parlent pas anglais ?

Dans ces exercices, il est alors très utile de réaliser un tableau pour retranscrire l'énoncé.

On retranscrit l'énoncé à l'aide d'un tableau, et on obtient :

	Anglais	~~Anglais~~	Total
Espagnol		**?**	20
~~Espagnol~~		7	
Total	37		60

Il suffit alors de compléter le tableau comme suit :

	Anglais	~~Anglais~~	Total
Espagnol		**16** (= 23 – 7)	20
~~Espagnol~~		7	
Total	37	**23** (= 60 – 7)	60

Il y a donc 16 personnes dans le groupe qui parlent espagnol et pas anglais.

Pour compléter ce tableau il faut comprendre les choses suivantes :

- La somme des 4 cases centrales est égale au grand total (ici, 60).
- De plus, horizontalement et verticalement, la somme des valeurs contenues dans les deux premières cases est toujours égale à la valeur de la troisième case.

Ainsi par exemple, la valeur de la case (anglais ; espagnol) additionnée à la valeur de la case (anglais, ~~espagnol~~) nous donne 37, qui correspond au nombre total de personnes parlant anglais.

Trucs et astuces

I. Pair / Impair

- Pour être sûr de ne jamais se tromper, remplacez « Impair » par 1 et « Pair » par 2. On obtient ainsi :

  ➤ Somme :
  Pair + Pair = Pair
  Impair +Impair = Pair
  Pair + Impair = Impair

  ➤ Produit :
  Pair × Pair = Pair
  Pair × Impair = Pair
  Impair × Impair = Impair

II. Multiplications

- **Règle du dernier chiffre** : 989 × 888 finira par un 2 (car 8x9 = 7**2**)
- Pensez aux identités remarquables :
  $19 \times 21 = (20-1) \times (20+1) = 20^2 - 1^2 = 399$
  $59^2 = (60-1)^2 = 60^2 + 1^2 - 2 \times 60 \times 1 = 3\,600 + 1 - 120 = 3\,481$
- Pour diviser par 5, on multiplie par 2 et on divise par 10.
  Ex : 325/5 = 650/10 = 65
- Pour multiplier par 5, on divise par 2 et on multiplie par 10
  Ex : 130 × 5 = 65 × 10 = 650

III. Nombres consécutifs

- **Ne posez toujours qu'une seule inconnue :** appelez n le plus petit nombre de la suite et notez les nombres ainsi : n ; $(n+1)$; $(n+2)$; etc.
- La somme de 3 nombres consécutifs est égale à 3 fois le nombre du milieu (valable pour 5, 7, etc.). Par exemple, 4 + **5** + 6 = 3 × 5 = **15**.
- La moyenne de 3 nombres consécutifs est égale au nombre du milieu (valable pour 5, 7, etc.). Par exemple, la moyenne de 6, 7, **8**, 9 et 10 est **8**.

IV. Dates

Ex. : si aujourd'hui nous sommes mardi, quel jour de la semaine serons-nous dans 100 jours ?

Il suffit de **réaliser une division euclidienne par 7**, et de rajouter le nombre de jours restants. Ici on obtient : 100 = 7 × 14 + 2. On avancera donc de 2 jours, nous serons ainsi jeudi.