Alexis Brès | Léo Quentin

L'ORAL DE PHYSIQUE AUX CONCOURS DES ENS ET DE POLYTECHNIQUE

PC-MP-MPI-PSI

ANNALES CORRIGÉES

2e édition

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

Retrouvez nos ouvrages pour les prépas scientifiques ici

http://dunod.link/prepassc

NOUS NOUS ENGAGEONS EN FAVEUR DE L'ENVIRONNEMENT :

PAPIER CERTIFIÉ

Nos livres sont imprimés sur des papiers certifiés pour réduire notre impact sur l'environnement.

Le format de nos ouvrages est pensé afin d'optimiser l'utilisation du papier.

Depuis plus de 30 ans, nous imprimons 70 % de nos livres en France et 25 % en Europe et nous mettons tout en œuvre pour augmenter cet engagement auprès des imprimeurs français.

Nous limitons l'utilisation du plastique sur nos ouvrages (film sur les couvertures et les livres).

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-086218-4

Préface

Léo Quentin fut mon étudiant il y a quelques années en PC* au lycée Saint-Louis. Il a ensuite été pendant plusieurs années interrogateur dans ma classe (« colleur » dans le langage des prépas). C'est avec plaisir que je le vois maintenant, en compagnie d'Alexis Brès, partager son expérience avec un plus large public.

C'est en physiciens qu'ils présentent des sujets d'oral parmi les plus récents posés aux concours d'entrée aux Écoles normales supérieures et à l'École polytechnique, associée à l'E.S.P.C.I pour la filière PC. Ils ont su allier l'analyse physique à un indispensable aspect technique, sans lequel il est impossible de pousser la compréhension des phénomènes étudiés à un niveau satisfaisant.

Un certain nombre de ces exercices a été proposé par Léo Quentin à mes étudiants lors de séances d'oraux blancs ces dernières années. Les conseils qu'il leur a donnés à ce moment-là sur l'attitude à adopter en face d'un problème difficile et d'énoncé parfois succinct ont été précieux.

Cet ouvrage s'adresse bien sûr aux meilleurs étudiants de C.P.G.E mais également à tout étudiant intéressé par les Sciences Physiques, ainsi qu'aux candidats à l'Agrégation. La lecture active de ce livre leur donnera sans aucun doute un complément de formation précieux qui les guidera vers la réussite.

Marie-Noëlle Sanz
Professeur de Physique en PC* au lycée Saint-Louis (Paris)

Table des matières

Avant-propos

Cet ouvrage regroupe une sélection d'exercices de physique posés aux oraux des concours d'entrée des Écoles normales supérieures et de l'École polytechnique. Tous les exercices sélectionnés sont compatibles avec le changement de programme de 2021, et reflètent dans la mesure du possible la diversité des thèmes abordés durant ces oraux.

Les motivations qui nous ont amenés à rédiger cet ouvrage sont multiples :

- Nous avons d'abord voulu démythifier le déroulement d'un oral aussi sélectif. Très souvent, la rumeur propage des sujets impossibles, souvent minimalistes, résumés en une phrase courte, devant un examinateur qui n'interagit que peu ou pas avec le candidat. Notre but est de montrer qu'un sujet d'oral est au contraire l'occasion d'une discussion réelle entre le candidat et l'examinateur, qui cherche avant tout à éprouver la robustesse des connaissances de celui-ci, mais également à tester son inventivité et sa capacité à réagir face à l'inconnu. Les situations proposées lors de ces oraux sont parfois éloignées de situations de cours « classiques », et l'examinateur attend alors du candidat qu'il fasse preuve de discernement. Savoir quand il doit trouver un chemin original, ou au contraire quand il peut mimer un raisonnement déjà vu. Par ailleurs, le candidat ne devra jamais perdre de vue que, bien que déstabilisants, les sujets ne sont jamais rigoureusement hors de portée : la physique nécessaire à leur résolution est bien celle attendue d'un élève sortant de Maths Spé. Si des notions hors programmes doivent servir, elles seront amenées par l'examinateur.
- Il y a ensuite la volonté de rendre ces oraux si spécifiques accessibles à tous. En effet, nous regrettons que trop d'élèves de CPGE ne puissent pas bénéficier d'annales accumulées par d'anciens membres de leur lycée. La démocratisation de l'accès à ces sujets nous semble indispensable à l'égalité des chances aux oraux de ces grandes écoles. En proposer des corrigés permet, selon nous, d'exhiber un certain nombre de techniques et de raisonnements, là encore souvent peu popularisés au sein de toutes les classes préparatoires.
- Enfin, au-delà de la difficulté conceptuelle de ces exercices, nous pensons que la technicité qu'ils offrent peut permettre à un étudiant de synthétiser les connaissances et réflexes mathématiques qu'il est nécessaire d'acquérir face à un problème de physique. Ce qui fait la force d'un candidat face à un problème, au-delà des connaissances qu'il a pu acquérir, c'est également sa capacité à « tenter des choses » menant à la résolution. Séparer les variables d'espace et de temps, se placer dans un référentiel adapté, faire un bilan sur un sous-système plus simple, utiliser des théorèmes énergétiques... Ces techniques peuvent servir

face à tout type de problème, et les exercices originaux présents dans cet ouvrage permettent de se rompre à leur utilisation.

On trouvera en introduction des conseils sur l'attitude et les réflexes à avoir lors de la résolution d'un problème original. Plus qu'un guide de conduite, ces quelques recommandations permettent d'embrasser la physique du problème sans nécessairement se jeter à corps perdu dans la modélisation et les calculs.

Les exercices ont été regroupés selon les grands domaines de la physique au programme des classes préparatoires. Pour certains, une telle catégorisation est illusoire, le lecteur averti s'en rendra bien compte. À chaque fois, à la suite de l'énoncé du problème, nous proposons une courte présentation introductive. Celle-ci est parfois suivie d'un encadré donnant une liste d'indications que le lecteur pourra choisir de suivre ou non, selon son degré de pugnacité face à l'exercice. Un corrigé suivant ces indications est ensuite proposé. Il va sans dire que l'originalité du déroulement des oraux des ENS et de l'X (une heure, sans préparation) incite à une discussion entre candidat et examinateur que notre corrigé ne saurait reproduire. Au maximum, nous avons essayé d'indiquer quand nous supposons qu'à tel ou tel moment l'examinateur interviendrait pour une piste, une formule ou un conseil.

Dans cette nouvelle édition, nous proposons une classification par niveau de difficulté, matérialisé dans les titres des exercices par l'adjonction d'un certain nombre d'étoiles :

- Les exercices « une étoile » sont des exercices déjà difficiles (vu le niveau des concours concernés), mais encore proches du cours ou ne demandant que de courts développements calculatoires. Ce sont parfois des exercices qui seront donnés en guise de complément si le premier exercice a été terminé par le candidat.
- Les exercices « deux étoiles » renvoient à des questions parfois plus techniques, pour lesquels un certain recul est nécessaire, ou menant à des développements plus longs.
- Les exercices « trois étoiles » sont (selon les auteurs) des développements techniques très longs, ou sont liés à des concepts délicats et/ou à un recul fort sur les thématiques abordées. Ils ne doivent être regardés que par les candidats les plus ambitieux. Il paraît probable que ces exercices ne soient jamais traités dans leur intégralité lors d'un oral.

Cette classification est bien sûr discutable et les auteurs ne prétendent en rien qu'elle soit absolue.

Cette nouvelle édition est également l'occasion de préciser les filières concernées par tel ou tel type d'exercice. Au début de chaque exercice, après l'énoncé, le lecteur trouvera une ligne décrivant les filières concernées par l'exercice.

Enfin, nous donnons en annexe un « guide pratique » de résolution d'équations différentielles, qui permet parfois d'aller au-delà des formules données par le cours de mathématiques.

Les auteurs

Introduction : comment traiter un problème de physique ?

Si l'énoncé des problèmes d'oraux des grandes écoles s'est tempéré avec le temps, il n'en reste pas moins qu'un candidat n'est jamais à l'abri d'une tournure peu familière et un peu déroutante.

Nous proposons ici quelques grandes lignes devant guider, sinon la résolution, en tout cas l'analyse du problème. Ces dix commandements devront se rappeler à l'esprit du candidat qui souhaite progresser vers la résolution de l'exercice.

1. Ne pas paniquer.

C'est bien sûr la condition *sine qua non*. Bloquer à la simple pensée du « je n'y arriverai jamais » est contre-productive. Un problème de physique peut être plus ou moins complexe et demande à être morcelé. Quoi qu'il en soit, un dialogue même partiel doit s'engager avec l'examinateur.

2. Ne pas se précipiter dans la résolution.

Il ne sert à rien de se jeter à corps perdu dans les équations et les modèles sans avoir réfléchi. Dans cet ouvrage, nous proposons systématiquement après l'énoncé du problème un court paragraphe qui résume la question : « Que se passe-t-il ? »

3. Raisonner en ordres de grandeur.

C'est la qualité première du physicien. Lorsqu'on aborde une question de physique, il est bon d'avoir en tête les ordres de grandeur qu'on va manipuler, et ceux auxquels le résultat doit se conformer. Ainsi, comme à l'écrit, il faut toujours être critique vis-à-vis de ses résultats, et être conscient, par exemple, que trouver un diamètre de cheveu en kilomètres n'est pas acceptable.

4. Faire de l'analyse dimensionnelle.

Quand on sèche complètement sur un problème, l'idée la plus simple consiste à faire un peu d'analyse dimensionnelle. Si on demande par exemple de caractériser les ondes sonores se propageant dans un ballon de basket qui rebondit sur le sol, le problème général est très compliqué. Par contre, je peux aisément mettre en évidence une longueur caractéristique $L \sim 10\,\mathrm{cm}$ et utiliser la vitesse du son dans l'air $c \approx 340\,\mathrm{m.s^{-1}}$ pour obtenir une fréquence $f \approx 3,4\,\mathrm{kHz}$, donc un son assez aigu qui correspond à peu près à la réalité. Ce n'est qu'une étape, mais c'est déjà ça !

5. Faire des graphes, des schémas.

Après deux ans passés à faire de la physique, cela peut vous paraître aberrant de rappeler cette règle. Mais notre expérience des écrits de concours nous l'a confirmé : les candidats font encore trop peu usage de schémas et de dessins pour expliciter leur propos.

Dans la majorité des cas, cela résulte en des erreurs de signe, des confusions dans les notations, des problèmes de projection des vecteurs...

Les graphes permettent également de se représenter rapidement le comportement d'une fonction, ce qui permet de trancher sur la direction à prendre dans la suite de la résolution.

6. Rationnaliser la résolution.

On ne demande pas à un élève sortant de Maths Spé d'utiliser des outils de fin de Licence ou d'entamer une résolution qui nécessiterait plusieurs heures ! Toujours penser que les exercices ont été conçus de manière à être résolus dans un temps raisonnable, avec les connaissances du programme. Donc, quand on modélise un phénomène, il faut se dire : « Est-il pensable que je traite cette situation avec ce que je connais/sans y passer trois heures ? » C'est à ce moment qu'intervient généralement l'analyse des symétries/invariances du problème, qu'on va la plupart du temps « forcer » pour simplifier la résolution : il est bien plus simple d'établir des équations différentielles quand les fonctions ne dépendent que d'une ou deux coordonnées !

7. Simplifier le modèle, mais pas trop.

C'est le pendant de la remarque précédente. S'il est tentant d'utiliser des hypothèses minimales pour obtenir une résolution relativement simple, on peut assez vite passer à côté de la physique du problème en le simplifiant trop. Par exemple, linéariser à outrance des équations peut faire passer à côté de la richesse de la physique non linéaire. Ou encore, négliger la tension de surface dans des problèmes impliquant des interfaces de fluides...

8. Se rapprocher de ce qui est connu.

On le verra dans cet ouvrage : souvent, il est possible de rapprocher un phénomène invoqué dans un problème d'une situation de cours connue. De ce point de vue, le candidat doit être irréprochable sur les connaissances qu'il a acquises pendant deux ans et la mise en œuvre de celles-ci.

À l'inverse, il est important de ne pas chercher à tout prix à coller un exercice de cours sur une situation nouvelle. Les examinateurs de l'X et de l'ENS (avec lesquels nous avons discuté pendant la rédaction de cet ouvrage) se montrent très intéressés par la capacité des candidats à se rendre compte qu'un raisonnement est nouveau, et à construire eux-mêmes une démarche scientifique de résolution.

9. Refuser la technicité au prix de la physique.

Le but d'un oral de physique n'est pas le calcul d'une intégrale particulièrement compliqué, ni de redémontrer la formule du rotationnel en coordonnées sphériques. Si l'examen d'un point du modèle amène à des développements mathématiques sans fin, c'est probablement qu'on a pris une mauvaise direction.

10. Rester fidèle à la base.

Ce n'est pas parce qu'on passe un oral d'Ulm qu'on ne définit pas les référentiels en mécanique, ni parce qu'on est à l'oral de l'X qu'on n'indique pas les systèmes étudiés en thermodynamique. La rigueur acquise dans le cours de physique doit se retrouver dans votre analyse du problème. L'intérêt est double : gagner la confiance de l'examinateur, qui sait qu'il a affaire à un candidat sérieux ; en posant clairement les bases d'une résolution de problème, on s'assure de ne pas tomber dans des pièges facilement évitables (par exemple grâce à un choix judicieux des systèmes en mécanique).

CHAPITRE

1

Mécanique

Exercice 1.1 : Mouvement d'une charge dans *E* et *B* orthogonaux - X ($\star$)

On place, sans vitesse initiale, un objet ponctuel de charge q et de masse m dans un champ électromagnétique uniforme et permanent avec $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ orthogonaux.
Étudier qualitativement puis quantitativement le mouvement.
Dans un deuxième temps, que peut-on dire si $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont parallèles ?

Cet exercice peut être traité dans le cadre de toutes les filières.

Cet exercice vise à présenter la technique relativement classique qui permet de résoudre les équations du mouvement obtenues en présence d'une force impliquant un produit vectoriel avec la vitesse comme la force magnétique, ou de Coriolis.

D'après l'énoncé, on considère un champ électrique $\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{u_x}$ et un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{u_z}$. Qualitativement, le champ électrique va accélérer la particule dans la direction des x positifs. Le champ magnétique va alors dévier la particule, qui possède désormais une vitesse non nulle, dans la direction des y négatifs. Ce mouvement dans la direction y est d'autant plus grand que la vitesse selon x est grande, et provoque à son tour une déviation vers les x négatifs. Cette déviation va venir contrebalancer l'accélération due au champ électrique, et on s'attend donc à des oscillations dans la direction x. Dans la direction y, l'accélération selon x due au champ électrique va provoquer une dérive, c'est-à-dire que la valeur moyenne de y va augmenter avec le temps, tandis que l'on verra des oscillations comme pour la direction x.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule s'écrit

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}). \tag{1}$$

On note (x, y, z) les coordonnées de la particule, de telle sorte que les équations du mouvement projetées s'écrivent

$$\begin{cases} m\ddot{x} = q(E_0 + \dot{y}B_0) \\ m\ddot{y} = -q\dot{x}B_0 \\ m\ddot{z} = 0\,. \end{cases} \tag{2}$$

On a alors deux équations différentielles linéaires couplées, que l'on peut résoudre en posant $X = x + iy$, où i est l'unité imaginaire. En multipliant la seconde équation par i et en additionnant les équations obtenues, on trouve l'équation vérifiée par X, sous la forme

$$\ddot{X} + i\frac{qB_0}{m}\dot{X} = \frac{qE_0}{m}\ . \tag{3}$$

Cette équation se résout facilement, et on trouve

$$\dot{X}(t) = -i\frac{E_0}{B_0} + Ae^{-i\omega_0 t} \ , \tag{4}$$

où A est une constante d'intégration et où l'on a posé $\omega_0 = \frac{qB_0}{m}$. À $t = 0$, il n'y a pas de vitesse initiale donc $\dot{X}(0) = 0$, c'est-à-dire que $A = i\frac{E_0}{B_0}$. On peut alors intégrer $\dot{X}$, et on trouve

$$X(t) = -i\frac{E_0}{B_0}t - \frac{mE_0}{qB_0^2}e^{-i\omega_0 t} + \frac{mE_0}{qB_0^2} \ , \tag{5}$$

où l'on a supposé que $X(0) = 0$. On peut alors facilement revenir à $x(t)$ et $y(t)$ en prenant la partie réelle et la partie imaginaire de $X(t)$, et on trouve

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{mE_0}{qB_0^2}\cos(\omega_0 t) + \dfrac{mE_0}{qB_0^2} = -\dfrac{E}{B}\dfrac{(\cos(\omega_0 t) - 1)}{\omega_0} \ , \\ y(t) = -\dfrac{E_0}{B_0}t + \dfrac{mE_0}{qB_0^2}\sin(\omega_0 t) = \dfrac{E}{B}\dfrac{\sin(\omega_0 t) - \omega_0 t}{\omega_0} \ . \end{cases} \tag{6}$$

On peut alors représenter le mouvement comme dans la figure 1.1.

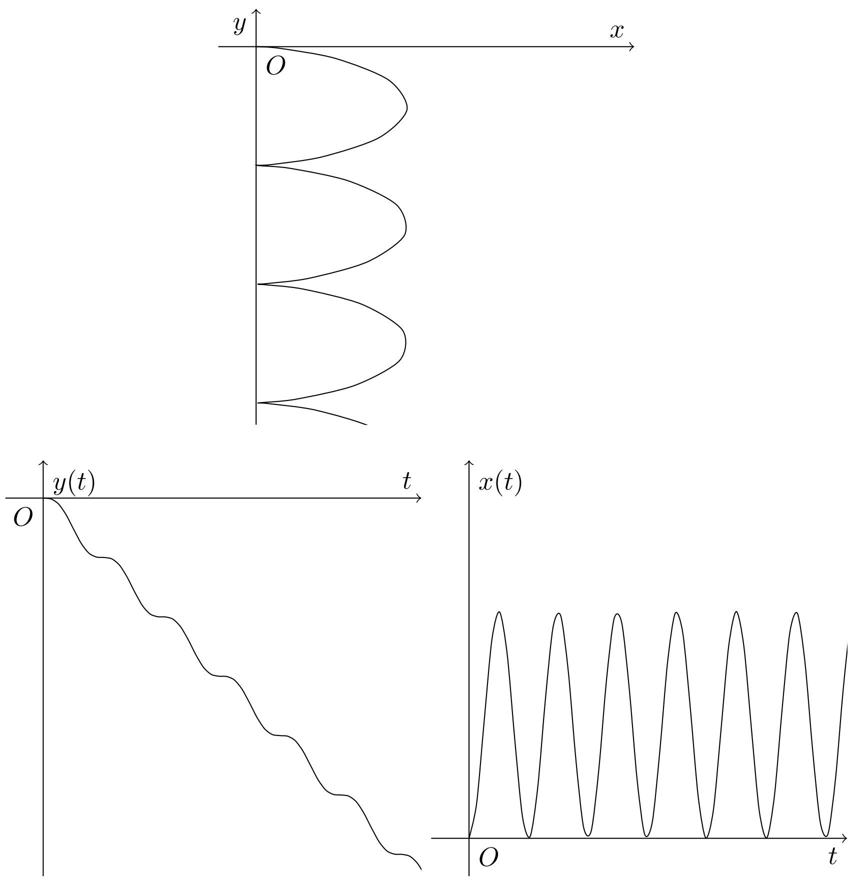

Figure 1.1. Trajectoire $y(x)$, courbes $x(t)$ et $y(t)$ ($E_0/B_0 = 1$).

Si $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont parallèles, alors les mouvements dus au champ électrique et au champ magnétique sont découplés. La charge va alors simplement être accélérée uniformément dans la direction du champ $\overrightarrow{E}$ et, si elle possède une vitesse initiale non nulle dans une des directions perpendiculaires aux champs, alors elle tournera autour de l'axe à la vitesse angulaire $\frac{qB_0}{m}$.

Exercice 1.2 : Écoulement d'un milieu granulaire - X ($\star$)

On considère un réservoir de fusée cylindrique (rayon R, hauteur H) rempli de poudre. La poudre exerce sur les grains en dessous une force verticale par unité de surface P_V, appelée *contrainte normale verticale*, et elle exerce une force latérale par unité de surface P_H, appelée *contrainte normale horizontale*. On suppose que $P_H = KP_V$. Les grains frottent sur la paroi ; pour une surface $\mathrm{d}S$, la force exercée par la paroi sur les grains s'écrit $\overrightarrow{\mathrm{d}T} + \overrightarrow{\mathrm{d}N}$ avec $\mathrm{d}T = \mu \mathrm{d}N$ (K et μ sont des coefficients proches de 1).

1. Déterminer P_V en fonction de la hauteur z, en prenant $z = 0$ en bas du réservoir.

2. Quel est l'avantage d'utiliser de la poudre plutôt qu'un carburant liquide ?

Cet exercice peut être traité dans le cadre des filières MP, PC, PSI.

Il s'agit d'un problème plutôt court, posé en fin d'oral, qui illustre la différence entre un milieu granulaire et un fluide. Ici, cette différence s'illustre par la loi reliant les contraintes normale et tangentielle exercées sur les grains, analogues aux lois de Coulomb pour des solides. Toutefois, le raisonnement que nous allons présenter est proche de celui qui permet d'établir les équations de la statique des fluides.

1. Considérons ainsi une tranche du cylindre située entre z et $z + \mathrm{d}z$. Dans la suite, nous noterons la masse volumique apparente des grains ρ. Les forces exercées sur le système sont :

— la gravité, qui exerce la force $\rho g \pi R^2 \mathrm{d}z \overrightarrow{u_z}$;

— la force exercée par les grains au-dessus, qui est $\pi R^2 P_V(z) \overrightarrow{u_z}$;

— la force exercée par les grains en dessous, qui est $-\pi R^2 P_V(z + \mathrm{d}z) \overrightarrow{u_z}$;

— la force exercée par la paroi. Nous ne sommes intéressés que par la composante verticale de cette force. Puisqu'il n'y a pas de mouvements horizontaux, on a $dN = P_H$ le long de la paroi. Ainsi, la force verticale par unité de surface exercée par la paroi sur les grains est $\overrightarrow{\tau} = -\mu P_H \overrightarrow{u_z}$, et, en utilisant l'hypothèse reliant les contraintes verticales et horizontales, on a $\overrightarrow{\tau} = -\mu K P_V \overrightarrow{u_z}$. La force verticale totale exercée par la paroi sur le système est donc $\overrightarrow{T} = -2\pi R \mathrm{d}z \mu K P_V \overrightarrow{u_z}$.

Ainsi, l'équilibre des forces sur le système s'écrit

$$\pi R^2 (P_V(z) - P_V(z + \mathrm{d}z)) + \rho g \pi R^2 \mathrm{d}z - 2\pi R \mathrm{d}z \mu K P_V = 0, \tag{1}$$

et en faisant tendre $\mathrm{d}z$ vers 0, on obtient l'équation différentielle qui régit le comportement de P_V

$$\begin{aligned} \pi R^2 \frac{\mathrm{d}P_V}{\mathrm{d}z} + 2\pi R \mu K P_V &= \rho g \pi R^2 \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}P_V}{\mathrm{d}z} + \frac{2\mu K}{R} P_V &= \rho g. \end{aligned} \tag{2}$$

On voit apparaître une longueur caractéristique $\delta = \frac{R}{2\mu K}$, qui est du même ordre de grandeur que R. De plus, la résolution de l'équation est immédiate, et on trouve

$$P_V = \rho g \delta \left(1 - \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\right). \tag{3}$$

2. Il existe ainsi deux comportements bien distincts :

— si $z \ll \delta$, un développement limité nous donne $P_V = \rho g z$, ce qui correspond au résultat hydrostatique pour un fluide classique ;

— en revanche, si $z \gg \delta$, la pression sature et devient constante $P_V = \rho g \delta$. Physiquement, cela signifie qu'une fois que l'on a dépassé la longueur δ, le poids n'est plus transmis à la verticale comme dans un fluide, mais des forces horizontales répartissent cet effort vers les parois, ce qui conduit à une pression verticale constante.

Cette saturation permet de répondre à la question suivante, et est même observable dans la vie courante. En effet, on peut remarquer que la vitesse d'écoulement d'un sablier est constante, au contraire d'une clepsydre où l'écoulement du fluide se fait de manière non linéaire. Ceci s'explique par le fait que la pression à l'endroit où le matériau granulaire s'écoule ne va pas dépendre de la hauteur de grains au-dessus d'elle, mais plutôt du diamètre du trou lui-même (tant que la hauteur de grains est grande devant ce diamètre). Ainsi, dans le cas de la fusée, ceci permet d'avoir un débit de carburant constant, et donc une poussée elle aussi constante.

Exercice 1.3 : Drôle de corde - Ulm ($\star$)

Je trouve devant moi un câble qui flotte tout seul et qui monte très haut dans le ciel. Où suis-je ? Est-il plus grand que la tour Eiffel ? Trouver le point du câble où la tension est maximale.

Cet exercice peut être traité dans le cadre des filières PC et PSI.

Même si l'énoncé est relativement inhabituel, un tel problème peut être abordé en employant les méthodes habituellement utilisées lorsque l'on étudie la dynamique des cordes. En particulier, un bon réflexe à avoir est d'étudier des portions infinitésimales de la corde.

Si la corde flotte en l'air, c'est que son poids est compensé par une autre force. Sur Terre, référentiel non galiléen, les seules possibilités sont les pseudo-forces d'inertie et de Coriolis. La situation étant statique, la deuxième doit être délaissée.

On cherche donc à quelle condition un équilibre peut se créer entre la force gravitationnelle et la force d'inertie d'entraînement. La première est radiale, alors que la seconde est dirigée vers le projeté orthogonal du point sur l'axe de rotation. Une compensation entre les deux forces ne pouvant se produire que si elles sont de même direction, on en conclut que l'on se trouve nécessairement à l'équateur. De plus, on s'attend à ce qu'une telle corde soit très longue, puisque l'extrémité de cette dernière doit nécessairement être plus loin que le point où la force d'inertie d'entraînement devient plus grande en module que la force de gravitation, ce qui se produit à l'altitude de l'orbite géostationnaire.

Considérons ainsi une corde verticale de masse μ à l'équilibre. On note M_T la masse de la Terre, R_T son rayon, ω sa pulsation de rotation sur son axe, et G la constante universelle de gravitation. Effectuons un bilan sur un élément de longueur dz situé à l'altitude z. Les forces s'exerçant sont :

— la tension en z, dirigée vers le bas, qui s'écrit $-T(z)\overrightarrow{u_z}$;

— la tension en $z + \mathrm{d}z$, dirigée vers le haut, qui s'écrit $T(z + \mathrm{d}z)\overrightarrow{u_z}$;

— l'attraction gravitationnelle, dirigée vers le bas, d'expression $-\frac{GM\mu\mathrm{d}z}{(R_T+z)^2}\overrightarrow{u_z}$;

— et finalement la force d'inertie, dirigée vers le haut, qui vaut $\mu\mathrm{d}z\omega^2(R_T + z)\overrightarrow{u_z}$.

L'équilibre s'écrit alors en sommant ces forces, puis en divisant par dz. On trouve

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \frac{GM\mu}{(R_T + z)^2} - \mu\omega^2(R_T + z). \tag{1}$$

On intègre cette équation entre 0 (où la tension s'annule, l'extrémité inférieure de la corde étant libre) et z. On obtient alors

$$T(z) = \mu\left(GM\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + z}\right) - \frac{\omega^2}{2}((R_T + z)^2 - R_T^2)\right). \tag{2}$$

On cherche maintenant à résoudre $T(l) = 0$, qui impose que l'extrémité supérieure de la corde soit libre, tout en restant en équilibre. Ceci nous donne

$$GM\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + l}\right) - \frac{\omega^2}{2}((R_T + l)^2 - R_T^2) = 0. \tag{3}$$

On multiplie ensuite cette équation par $(R_T + l)$, et on simplifie pour obtenir

$$l^3 + 3R_Tl^2 + \left(2R_T^2 - \frac{2GM}{R_T\omega^2}\right)l = 0, \tag{4}$$

dont $l = 0$ est évidemment solution. Pour les autres solutions, on divise par l, ce qui donne un trinôme du second degré, que l'on résout simplement pour obtenir

$$l_\pm = \frac{-3R_T \pm \sqrt{9R_T^2 - 8(R_T^2 - \frac{GM}{R_T\omega^2})}}{2} = \frac{-3R_T \pm \sqrt{9R_T^2 + \frac{8GM}{R_T\omega^2})}}{2}, \tag{5}$$

La dernière forme permet de s'assurer que le discriminant est bien positif, et donc que les deux solutions sont bien réelles. Les solutions sont de signes opposés, ce que l'on peut vérifier avec les coefficients du trinôme, et on ne garde que la solution physique positive

$$\boxed{l = \sqrt{\frac{R_T^2}{4} + \frac{2GM}{R_T\omega^2}} - \frac{3}{2}R_T.} \tag{6}$$

Avec les valeurs $R_T = 3\ 700\,\mathrm{km}$, $G = 6,67.10^{-11}\,\mathrm{N.m^{-2}.kg^2}$, $M = 6.10^{24}\,\mathrm{kg}$ et $\omega = \frac{2\pi}{24\times3600} = 7,3.10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$, on trouve

$$\boxed{l \approx 144\,000\,\mathrm{km}.}$$

C'est donc une très longue corde. On retrouve naturellement que le paramètre μ n'intervient pas, ce qui est classique dans les problèmes de mécanique où le poids n'intervient pas.

Maximum de tension On peut également chercher où se trouve le maximum de tension, ce qui revient à annuler $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}$. On en déduit que

$$\frac{GM}{(R_T + z_m)^2} = \omega^2 (R_T + z_m), \tag{7}$$

ce qui se produit à l'altitude

$$z_m = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3} - R_T, \tag{8}$$

et l'application numérique donne $z_m \approx 35\ 780\,\mathrm{km}$. On retrouve comme prévu la valeur de l'orbite géostationnaire.

En remplaçant cette valeur dans l'équation 2, on obtient la valeur du maximum de la tension. L'application numérique donne alors

$$T_{\max} \approx 4,9.10^7 \mu. \tag{9}$$

À ce stade, tout dépend encore de la valeur de la masse linéique du câble. Coupons cette difficulté en écrivant que $\mu = \rho S$ où S est la section du câble et ρ sa masse volumique. On peut ainsi déduire de $T_{\max}$ une pression (aussi appelée *contrainte*) maximale sous la forme

$$p_{\max} = 4,9.10^7 \rho, \tag{10}$$

et donc, pour un câble en acier ($\rho \approx 8\ 000\,\mathrm{kg.m^{-3}}$), on a $p_{\max} \approx 400$ GPa. À quoi comparer la valeur de cette contrainte ? On pourrait penser au module d'Young de l'acier, de l'ordre de 100 GPa, mais en réalité l'acier casse bien avant une telle valeur, autour de 1 GPa, au mieux. Une telle contrainte ne serait donc pas supportable avec des câbles standards.

Une première idée pour pallier ce problème serait d'autoriser une section variable, afin d'avoir une contrainte constante p_0 (et faible). Cet exercice simple peut être fait par le lecteur. On trouve qu'à l'altitude géostationnaire la section doit être maximale (ce qui est attendu), et elle vaut

$$S = S_0 \exp\left(\frac{p_{\max}}{p_0}\right), \tag{11}$$

et si on demande que p_0 ne dépasse pas le GPa, on obtient alors une augmentation de la section du câble d'un facteur exp(400), ce qui n'est évidemment pas imaginable.

Pour résoudre le problème, il faudrait miser sur des matériaux plus légers (ρ plus faible donc p_{max} plus faible) et présentant un module d'Young plus grand (donc une valeur de contrainte de rupture plus grande). Ceci pourrait être rendu possible par la nouvelle génération de nanotubes de carbone, matériau léger et très résistant.

Pour conclure, à quoi servirait un tel câble ? À construire un ascenseur spatial ne nécessitant pas de fusée pour chaque voyage. Le lecteur curieux pourra consulter l'article « L'ascenseur spatial » issu du BUP 994 (mai 2017), dont ce corrigé s'inspire en partie.

Exercice 1.4 : Force centrale répulsive - X ($\star$)

On considère un champ de force centrale $\overrightarrow{F} = \frac{km}{r^3}\overrightarrow{u_r}$ avec k positif. On considère un point matériel de masse m qui, à $t = 0$, se trouve à une distance a du centre de force, et possède une vitesse orthoradiale $\overrightarrow{v}(t = 0) = v_0\overrightarrow{u_\theta}$. Décrire la trajectoire.

Cet exercice peut être traité dans le cadre des filières PC et PSI.

Il va s'agir d'imiter la démarche bien connue pour le potentiel newtonien. Comme toujours, et bien que l'expression de la force soit donnée, écrire le principe fondamental de la dynamique sera une démarche lourde à laquelle on préférera l'utilisation de la conservation de l'énergie et du moment cinétique.

Ainsi, puisqu'il s'agit d'un mouvement à force centrale, le moment cinétique $\mathscr{L} = mr^2\dot{\theta}$ est conservé. Le mouvement est plan, donc l'utilisation des coordonnées polaires est appropriée. De plus, ce champ de force dérive d'un potentiel $V(r) = \frac{mk}{2r^2}$, l'énergie mécanique est donc conservée. Cette dernière s'écrit

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}mv^2 + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\mathscr{L}^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) \end{aligned}, \tag{1}$$

où usage a été fait de la conservation du moment cinétique. On en déduit une énergie potentielle effective $V_{\text{eff}}(r) = \frac{\mathscr{L}^2 + km^2}{2mr^2}$ dont l'étude permet de préciser la trajectoire. Toutes les constantes au numérateur étant positives, l'énergie potentielle effective a l'allure donnée dans la figure 1.2.

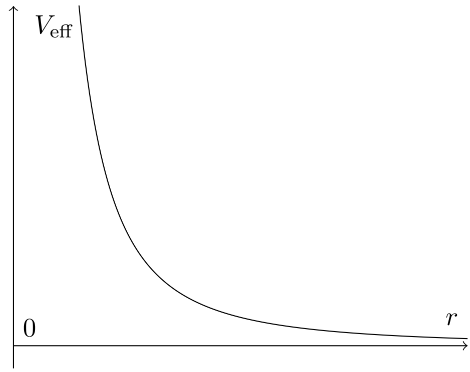

FIGURE 1.2. Énergie potentielle effective en fonction de r.

Le champ de force étant répulsif ($k > 0$), on a exclusivement des états de diffusion, et le point va partir à l'infini.

Nous allons maintenant préciser les équations horaires de la trajectoire. La conservation de l'énergie mécanique entre l'instant $t = 0$ et un instant t quelconque donne

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + m\frac{a^2v_0^2 + k}{2r^2} = m\frac{a^2v_0^2 + k}{2a^2}, \tag{2}$$

où l'on a utilisé que le moment cinétique est conservé et vaut $L = mav_0$. En posant $\alpha = a^2 v_0^2 + k$, on obtient

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\alpha}{r^2} = \frac{\alpha}{a^2}. \tag{3}$$

On sépare maintenant les variables r et t pour obtenir

$$\sqrt{\alpha}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}}} = \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1}}. \tag{4}$$

Cette expression peut être intégrée en

$$\sqrt{\alpha}t = a^2\sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1} = a\sqrt{r^2 - a^2}, \tag{5}$$

où l'on a choisi la constante d'intégration nulle car $r(t = 0) = a$. En inversant cette relation, on obtient finalement

$$r(t) = a\sqrt{1 + \frac{\alpha}{a^4}t^2}. \tag{6}$$

Cette relation confirme, comme vu précédemment, que $r \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On peut à présent chercher la loi horaire. De la conservation du moment cinétique, on peut déduire

$$\dot{\theta} = \frac{\mathscr{L}}{mr^2} = \frac{av_0}{a^2\left(1 + \frac{\alpha}{a^4}t^2\right)} = \frac{v_0}{a}\frac{1}{1 + \frac{\alpha}{a^4}t^2}, \tag{7}$$

dont l'intégration conduit à

$$\theta(t) = \frac{v_0}{a}\frac{a^2}{\sqrt{\alpha}}\arctan\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a^2}t\right) = \frac{av_0}{\sqrt{\alpha}}\arctan\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a^2}t\right). \tag{8}$$

Des lois $r(t)$ et $\theta(t)$, on peut facilement éliminer le temps pour obtenir l'équation polaire de la trajectoire

$$t = \frac{a^2}{\sqrt{\alpha}}\tan\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{av_0}\theta\right), \tag{9}$$

d'où finalement

$$r(\theta) = a\sqrt{1 + \tan^2\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{av_0}\theta\right)}. \tag{10}$$

Et avec un soupçon de trigonométrie, on a

$$\boxed{r(\theta) = \frac{a}{\left|\cos\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{av_0}\theta\right)\right|}}. \tag{11}$$

Terminons par quelques remarques.

- On pourrait penser que le cosinus au dénominateur va faire osciller r. En réalité, l'équation 8 assure que, au bout d'un temps long, θ tend vers $\frac{av_0}{\sqrt{\alpha}}\frac{\pi}{2}$, et ainsi le dénominateur de $r(\theta)$ décroît monotonement de 1 à 0.
- Par ailleurs, $\frac{av_0}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{a^2v_0^2}}} < 1$, ce qui prouve que l'angle limite est inférieur à $\frac{\pi}{2}$: le mouvement tout entier est contenu dans le premier quadrant.
- Finalement, on obtient des trajectoires de la forme présentée dans la figure 1.3.

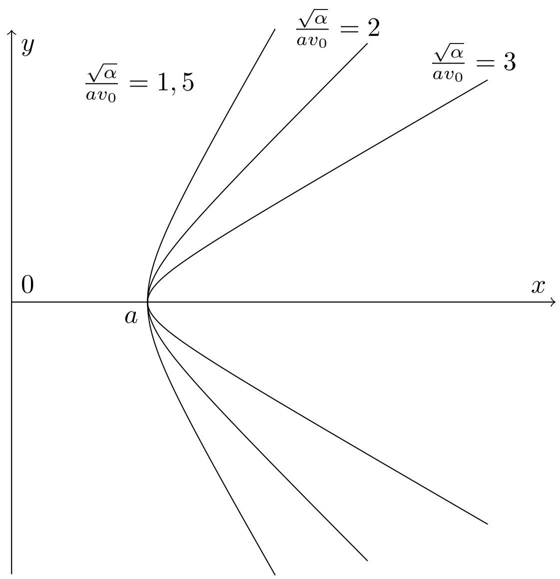

FIGURE 1.3. Quelques trajectoires $r(\theta)$ pour différentes valeurs de $\frac{\sqrt{\alpha}}{av_0}$.

Exercice 1.5 : Une fourmi sur un élastique - X ($\star$)

Un élastique infiniment extensible, de longueur initiale 1m, est fixé d'un côté à un support fixe. On tire l'autre extrémité à la vitesse constante de $1\,\mathrm{m.s^{-1}}$. Une fourmi part de l'extrémité fixée de l'élastique, et avance sur l'élastique à la vitesse constante de $1\,\mathrm{mm.s^{-1}}$. La fourmi va-t-elle atteindre le bout de l'élastique ? Si oui, combien de temps va-t-elle mettre ?

Cet exercice peut être traité dans le cadre de toutes les filières.

Voici un problème qui peut apparaître comme purement mathématique, avec un lien très distant avec le monde physique, un élastique ayant toujours une longueur finie. En conclusion, nous présenterons le lien entre ce problème et un phénomène beaucoup plus physique, l'expansion de l'univers. Au vu de la vitesse de la fourmi comparée à celle de l'extension de l'élastique, il semble impossible que cette dernière puisse atteindre le bout de l'élastique. En fait, nous allons voir que peu importe la vitesse de la fourmi et la vitesse d'extension de l'élastique, si tant est que ces vitesses restent constantes, alors l'insecte atteindra toujours le bord opposé, même si le temps nécessaire peut être colossal.

Essayons d'expliquer qualitativement cette situation *a priori* paradoxale. L'hypothèse cruciale pour obtenir ce résultat est que l'élastique va s'allonger de manière uniforme. Ainsi, lorsque la fourmi a parcouru une certaine portion de l'élastique, l'élongation ne va pas changer la part de l'élastique qui a déjà été parcourue, puisqu'il s'allonge aussi bien devant la fourmi que derrière elle. Ainsi, si l'on raisonne en termes de portion de l'élastique parcouru, la fourmi va toujours pouvoir avancer.

Plus précisément, ce sont en fait les vitesses constantes qui permettent ce résultat. Avant toute mise en équation, on peut facilement se donner une idée de pourquoi la fourmi va pouvoir parcourir n'importe quelle distance. Supposons que le temps soit discret. Alors, la première seconde, la fourmi va parcourir 1 mm sur un élastique de 1 m, soit 1/1 000 de la distance entre les deux bouts de l'élastique, puis la deuxième seconde 1/2 000 de la même manière. Facilement, on voit que la fourmi parcourt $1/(k \times 1\,000)$ de la distance entre les deux extrémités de l'élastique à la seconde k. La proportion de l'élastique parcourue au temps N évolue comme la somme

$$d(k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{1\,000}\frac{1}{k}, \tag{1}$$

et par divergence de la série harmonique, la fourmi va bien pouvoir atteindre l'autre extrémité. La série harmonique divergeant très « lentement », on voit que le temps nécessaire à la fourmi pour parcourir l'élastique sera très long. Finalement, si la vitesse d'élongation venait à augmenter, alors on ne peut garantir que la fourmi atteigne le bord.

Afin de traiter le cas le plus général possible, nous supposerons que l'élastique a initialement une longueur L_0 à $t = 0$, qu'il s'allonge uniformément, et que la vitesse de son extrémité non fixée est v_e, de telle sorte que la longueur totale à l'instant t est $L(t) = L_0 + v_e t$. On suppose de plus que la fourmi se déplace à une vitesse c. Finalement, nous notons $x(t)$ la position de la fourmi dans le référentiel du laboratoire. Nous allons présenter deux méthodes pour arriver au résultat.

Tout d'abord, pour faire écho à l'analyse qualitative du problème, on peut définir des coordonnées X qui mesurent la « part » de l'élastique qui a déjà été parcourue. Il est clair que le début de la corde est en $X = 0$, tandis que le bout sur lequel on tire est en $X = 1$. Dans ces coordonnées, la position de la fourmi est $X(t) = \frac{x(t)}{L_0+v_e t}$, et sa vitesse par rapport à l'élastique est $V(t) = \frac{c}{L_0+v_e t}$. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que la transformation n'est qu'un changement d'échelle, de la même manière que si l'on fait la transformation $x \to 2x$ sans changer l'échelle de temps, alors $v \to 2v$.

Il suffit alors d'intégrer $V(t)$ pour avoir accès à la position dans le nouveau système de coordonnées. On a ainsi

$$X(t) = \int \frac{c}{L_0 + v_e t'}\mathrm{d}t' = \frac{c}{v_e} \ln\left(\frac{L_0 + v_e t}{L_1}\right), \tag{2}$$

où L_1 est une constante d'intégration. Avec $X(0) = 0$, on trouve immédiatement que

$$X(t) = \frac{c}{v_e} \ln\left(\frac{L_0 + v_e t}{L_0}\right). \tag{3}$$

La fourmi atteint l'autre bout à T si $X(T) = 1$, ce qui donne facilement

$$T = \frac{L_0}{v_e}\left(\exp\left(\frac{v_e}{c}\right) - 1\right). \tag{4}$$

Avec $c = 10^{-3}$ m.s^{-1}, $v_e = 1$ m.s^{-1} et $L_0 = 1$ m, on obtient

$$T \simeq \frac{1}{1}\left(e^{1000} - 1\right) \simeq 2 \times 10^{434}\ \mathrm{s}. \tag{5}$$

Il s'agit d'un temps très élevé, même à l'échelle de l'univers, dont on estime l'âge à 4×10^{17} s.

Une autre approche, plus directe et calculatoire est possible. Lorsque l'on donne la vitesse de la fourmi, il faut comprendre que celle-ci est exprimée par rapport à l'élastique.