INTRODUCTION À LA RELATIVITÉ RESTREINTE

Cours et exercices corrigés

Jean Hladik
Professeur émérite
à l'université d'Angers

Michel Chrysos
Professeur à l'université d'Angers

DUNOD

NOUS NOUS ENGAGEONS EN FAVEUR DE L'ENVIRONNEMENT :

PAPIER CERTIFIÉ

Nos livres sont imprimés sur des papiers certifiés pour réduire notre impact sur l'environnement.

Le format de nos ouvrages est pensé afin d'optimiser l'utilisation du papier.

Depuis plus de 30 ans, nous imprimons 70 % de nos livres en France et 25 % en Europe et nous mettons tout en œuvre pour augmenter cet engagement auprès des imprimeurs français.

Nous limitons l'utilisation du plastique sur nos ouvrages (film sur les couvertures et les livres).

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-086572-7

Table des matières

Avant-propos

Le cadre newtonien de l'espace absolu forme une sorte de scène infinie à trois dimensions dans laquelle se déroulent au cours du temps absolu les phénomènes physiques, le physicien mesurant et théorisant le spectacle. Mais à la fin du XIX^{e} siècle, l'électromagnétisme posa aux scientifiques le problème de son adéquation aux postulats fondamentaux de Newton sur l'espace et le temps. En réponse à cette interrogation, il en résulta une remise en cause de ces principes mêmes par la théorie de la relativité.

En 1905, la relativité restreinte créa un nouveau cadre infini à quatre dimensions. L'espace en lui-même et le temps en lui-même s'évanouissent, et seule l'union des deux devient la nouvelle scène formant l'espace-temps. Ce cadre redoré devient alors un nouvel absolu, ce qui conduira par la suite à une rénovation du modèle par la théorie de la relativité générale. En fait cette dernière va aller beaucoup plus loin en réalisant une théorie du cadre lui-même, l'espace-temps riemannien, en relation très étroite avec son contenu matériel.

Le propos de notre ouvrage se limite à introduire les notions essentielles concernant la première étape que constitue la relativité restreinte, mais ce sont les fondements de cette théorie qui sont peut-être les plus ardus à comprendre et à enseigner. Il se trouve, de plus, que l'enseignement des formules fondamentales de la relativité restreinte est resté jusqu'à présent basé essentiellement sur la tradition historique mettant en oeuvre, outre le principe de relativité, le fameux postulat de l'invariance de la vitesse de la lumière d'Einstein.

Or ce dernier postulat est à la fois inutile et surtout nuisible à la bonne compréhension et à l'acceptation des résultats surprenants de la relativité. Certes les étudiants posent rarement la question : « Que vient faire la lumière dans les propriétés fondamentales de l'espace et du temps ? » Mais il reste très souvent un malaise sous-jacent résultant d'une démonstration hybride où l'on postule une partie de ce qu'on veut démontrer.

Lorsque j'ai moi-même commencé l'étude de la relativité restreinte, je me souviens m'être posé des questions et avoir ressenti ce malaise. Pourquoi la lumière, même lorsqu'elle n'est pas présente dans un lieu quelconque, imposerait-elle ses propriétés à l'espace ? Pourquoi la mécanique des particules, ou tout autre phénomène physique sans rapport avec la lumière, serait-il tributaire d'un phénomène lumineux ? Aucun enseignant ne semble vraiment s'intéresser à ces questions et chacun rabâche le postulat d'invariance de la lumière. Il suffit de consulter les manuels récents pour se rendre compte que tous reprennent la même litanie d'une démonstration archaïque des formules de Lorentz-Poincaré.

Il me fallut pas mal d'années avant que je découvre que le second postulat d'Einstein n'est pas une nécessité pour fonder la relativité restreinte. Et il en fut de même pour mon « jeune » collègue auquel je fis faire la même découverte. Pourtant, ainsi que nous le montrons dans notre petite annexe sur l'historique de la transformation de Lorentz-Poincaré, on s'aperçoit que, dès 1910, l'idée que le principe de relativité entraînait nécessairement l'existence d'une vitesse limite des interactions était discutée. Ajoutée à quelques postulats sur l'espace-temps, cette idée permet d'obtenir les formules de la transformation de Lorentz-Poincaré d'où découlent les étonnantes propriétés de l'espace-temps relativiste.

Jean HLADIK

De nombreux ouvrages d'enseignement de la relativité restreinte pour débutants se contentent souvent de donner les formules et les démonstrations nécessaires sans pratiquement aucun commentaire. Or, surtout pour une théorie aussi nouvelle pour l'étudiant que la relativité, il ne faut pas hésiter à disserter longuement sur les fondements de cette théorie ainsi que sur les problèmes dont elle est issue.

Un aperçu historique de la relativité enrichit fortement l'esprit et montre également comment s'élaborent difficilement les théories scientifiques. On est également étonné en découvrant que les travaux de Poincaré sur la relativité restreinte sont peu connus contrairement à ceux d'Einstein. Cependant, avec un certain recul historique, la théorie relativiste est de plus en plus souvent considérée comme ayant Poincaré et Einstein pour cofondateurs. Les historiens des sciences ont encore en ce domaine quelques travaux novateurs à effectuer.

Nous remercions vivement toutes les personnes qui nous ont permis de réaliser le présent ouvrage qui apporte un certain renouveau à l'enseignement de la relativité restreinte. En tout premier lieu, nos remerciements vont à Monsieur Jean-Marc Lévy-Leblond auquel nous sommes redevables de l'essentiel de sa démonstration de la transformation de Lorentz-Poincaré. Monsieur Lévy-Leblond a eu également l'amabilité de nous transmettre divers documents et renseignements sur la théorie de la relativité restreinte.

Monsieur Lévy-Leblond a dirigé la thèse de Monsieur Jean-Pierre Lecardonnel portant sur l'analyse des diverses démonstrations de la transformation de Lorentz-Poincaré au cours du XX[e] siècle. Nous sommes redevables au travail de Monsieur Lecardonnel de cet aperçu historique et nous le remercions pour nous avoir aimablement fourni une copie de son ouvrage.

Nos remerciements vont également à Madame Françoise Balibar ainsi qu'à Monsieur Laurent Nottale, avec lesquels nos échanges épistolaires nous ont permis de mieux comprendre certains travaux.

Jean HLADIK et Michel CHRYSOS

— Super cette *Introduction à la relativité restreinte*. Il y a même nos portraits.
— Mais ?... Comment peut-on être à la fois dans le bouquin et en train de lire ?
— C'est peut-être expliqué dedans. Lis et tais-toi.

Chapitre 1

La relativité en mécanique classique

La relativité restreinte est l'aboutissement des travaux exceptionnellement riches de mathématiciens et physiciens de la seconde moitié du XIX^{e} siècle, et plus particulièrement de Hendrik Lorentz (1853 - 1928) et Henri Poincaré (1854 - 1912). Ils furent relayés par Albert Einstein (1879 - 1955) dont l'histoire de la relativité retint surtout le nom. En science, il faudrait toujours se rappeler la remarque que fit Newton à propos des recherches de ses prédécesseurs dont il s'inspira :

> Si j'ai vu plus loin, c'est parce que j'étais assis sur les épaules de géants.

Il ne faut pas non plus oublier le travail expérimental de recherche qui est une source importante de la théorie relativiste. C'est en particulier l'expérience d'Albert Michelson (1852 - 1931), prix Nobel de physique en 1907, dont les résultats permirent de fonder la théorie de la relativité.

Il faut même remonter bien au-delà du XIX^{e} siècle pour trouver la genèse de la relativité restreinte, car celle-ci puise aux sources de la relativité galiléenne et de la mécanique newtonienne. C'est ce que nous allons voir dans ce chapitre avant d'aborder la théorie de la relativité restreinte.

1.1 PRINCIPE DE RELATIVITÉ GALILÉENNE

1.1.1 Systèmes de référence d'inertie

Pour repérer la position d'un corps, en mécanique classique, on utilise un système de coordonnées spatiales. En relativité, on a besoin d'une horloge marquant le temps adjointe à chaque système de coordonnées, et on appelle système de référence, ou *référentiel*, un tel système de coordonnées muni d'une horloge. Ainsi le référentiel R (Fig. 1.1) est défini par les coordonnées cartésiennes x, y, z et le temps t.

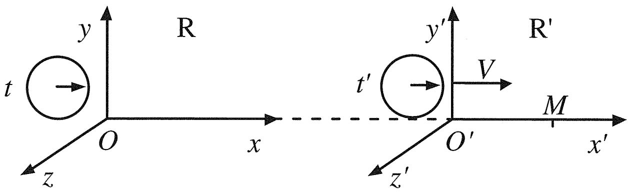

Figure 1.1

Le mouvement d'un corps qui n'est soumis à l'action d'aucune force extérieure est appelé un *mouvement libre*. Lorsque le mouvement libre d'un corps s'effectue à vitesse constante par rapport à un référentiel, on dit que celui-ci est un *système de référence d'inertie* ou *galiléen.* Si un système de référence est d'inertie, alors tout autre référentiel se déplaçant d'un mouvement rectiligne à vitesse constante par rapport au premier est également un référentiel d'inertie (puisque tout mouvement libre y est également rectiligne uniforme). À un référentiel d'inertie donné correspond donc une infinité d'autres référentiels d'inertie.

Considérons deux référentiels d'inertie, R et R$'$, en translation relative uniforme l'un par rapport à l'autre, le mouvement s'effectuant parallèlement aux axes Ox et $O'x'$ (Fig. 1.1). Le terme *translation* désignera désormais un mouvement rectiligne. Le référentiel R$'$ se déplace à la vitesse V par rapport au référentiel R, dans le sens des x et x' positifs. De plus, on suppose que le point O' de R$'$ est passé au temps $t = 0$ au point O.

Lorsque nous considérerons par la suite des référentiels R *ou* R$'$, *sans autre précision, il s'agira de ceux de la figure 1.1, soumis aux conditions ci-dessus.*

1.1.2 Le concept de temps absolu

En mécanique classique, on n'a pas besoin de préciser qu'une horloge est attachée à chaque système de coordonnées car on suppose, de manière implicite, qu'il existe une grande horloge universelle du temps. Quel que soit le référentiel utilisé, le temps est supposé s'écouler de manière identique en chaque point de l'espace et pour tous les référentiels. Ce fut Newton qui introduisit le *temps absolu* et universel :

> Le temps absolu, vrai et mathématique, sans relation à rien d'extérieur, coule uniformément.

Supposons qu'une horloge soit fixe dans chacun des référentiels R et R$'$, et notons respectivement t et t' le temps marqué par chacune des horloges. Par hypothèse, celles-ci sont considérées fonctionner, dans un même référentiel, de manière strictement identique, et, de plus, elles ont été réglées à la même heure à un moment donné. Puisque les forces internes régissant le fonctionnement des horloges ne peuvent dépendre que des positions et éventuellement des vitesses relatives de leurs composants constitutifs, ces forces doivent rester invariantes dans tous les référentiels d'inertie. En conséquence, aucune horloge (toutes basées à l'époque de Newton sur des systèmes mécaniques) n'est affectée par un mouvement uniforme de translation. Le temps mesuré par chaque horloge étant défini par la position de ses aiguilles sur le cadran, il semble que les horloges mesureront une même durée dans chaque référentiel en translation uniforme, et l'on a $t = t'$. On retrouve le temps absolu de Newton.

1.1.3 La transformation de Galilée

Pour mieux introduire le principe de relativité galiléenne qu'on définira par la suite, nous allons rappeler ce qu'on appelle la *transformation de Galilée*, du nom du fondateur de la mécanique, *Galileo Galilei* dit Galilée.

Pour cela, considérons les deux référentiels de la figure 1.1 soumis aux conditions ci-dessus. Après un temps t de déplacement, les points O et O' se trouvent à une distance Vt l'un de l'autre. Notons x une distance quelconque OM sur l'axe Ox, et x' la distance $O'M$. On a :

$$OM = OO' + O'M \tag{1.1.1}$$

d'où :

$$x = Vt + x' \tag{1.1.2}$$

La translation des référentiels laisse inchangées les autres coordonnées, d'où les relations suivantes entre les coordonnées spatiales et le temps des deux référentiels :

$$x' = x - Vt \; ; \quad y' = y \; ; \quad z' = z \; ; \quad t' = t \tag{1.1.3}$$

Ces quatre relations forment une transformation particulière de Galilée. Dans le cas général, pour un mouvement relatif quelconque des référentiels, à vitesse constante $\mathbf{V}$, les rayons-vecteurs $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ d'un point M sont tels que :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t \; ; \quad t' = t \tag{1.1.4}$$

Les équations (1.1.4), qui généralisent les relations (1.1.3), forment ce qu'on appelle la *transformation de Galilée*.

La loi d'addition des vitesses résulte simplement de la transformation de Galilée. Si un corps est mobile par rapport au référentiel R$'$ avec une vitesse $\mathbf{v}'$, sa vitesse $\mathbf{v}$ par rapport au référentiel R est alors égale, selon (1.1.4), à la somme des vitesses :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} \tag{1.1.5}$$

En mécanique du point, on retrouve les trois vitesses qui figurent dans la relation (1.1.5) respectivement sous les noms de vitesses absolue, relative et d'entraînement.

1.1.4 Principe de relativité et invariance des lois de la mécanique

Toutes les observations montrent l'existence d'un *principe de relativité* selon lequel toutes les lois de la mécanique sont identiques dans tous les référentiels d'inertie.

Cela signifie que les équations qui décrivent les phénomènes mécaniques, en fonction des coordonnées et du temps, ont la même forme quel que soit le référentiel d'inertie considéré. C'est le *principe de relativité galiléenne*.

Selon la loi fondamentale de la dynamique, la force **F** appliquée à un corps de masse m lui communique une accélération **a** proportionnelle à cette force. En mécanique classique, la masse m est une constante intrinsèque indépendante du référentiel considéré. Si ces grandeurs sont mesurées dans le référentiel R, on a :

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a} \tag{1.1.6}$$

La transformation de Galilée donne pour expression de l'accélération $\mathbf{a}'$ dans R′ :

$$\mathbf{a}' = \frac{d^2\,\mathbf{r}'}{d\,t'^2} = \frac{d^2(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)}{d\,t^2} = \frac{d^2\,\mathbf{r}}{d\,t^2} = \mathbf{a} \tag{1.1.7}$$

D'autre part, la force $\mathbf{F}'$ appliquée à la masse m, et mesurée dans R′, doit être indépendante du référentiel par rapport auquel elle est mesurée. Elle ne peut en effet dépendre que des positions et éventuellement des vitesses relatives des corps avoisinants avec lesquels interagit le corps considéré, ainsi que nous l'avons vu au cours du paragraphe 1.1.2 ; elle peut, par exemple, être déterminée par l'allongement d'un ressort. On a donc : $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$, d'où, selon (1.1.6) et (1.1.7) :

$$\mathbf{F}' = m\,\mathbf{a}' = m\frac{d^2\,\mathbf{r}'}{d\,t'^2} \tag{1.1.8}$$

La forme de la loi de la dynamique est donc identique quel que soit le référentiel d'inertie considéré. On dit que la loi est *invariante* lorsqu'on lui applique la transformation de Galilée. On peut alors exprimer le principe de relativité galiléenne sous la forme suivante :

Les lois de la mécanique classique sont invariantes par rapport à la transformation de Galilée.

1.2 PROPAGATION DE LA LUMIÈRE

Les interrogations des physiciens sur la nature de la lumière et de son mode de propagation sont à l'origine de la théorie de la relativité restreinte. Ce ne fut qu'à partir du XVII^e^ siècle qu'ils commencèrent à se poser des questions : la lumière est-elle une substance particulière qui se déplace ou bien simplement est-ce un mouvement transmis par un milieu inconnu imprégnant tout l'espace ?

Selon René Descartes, l'univers était empli d'une matière qui transmettait la « pression » engendrée par les corps lumineux. Les théories issues du cartésianisme vont attribuer à la lumière une nature purement cinétique : la lumière n'est pas un corps particulier qui se déplace mais c'est un mouvement spécifique au sein d'un milieu, appelé *éther lumineux*, qui emplit l'espace.

En opposition à la théorie de Descartes, Newton proposa, en 1672, une théorie entièrement substantielle de la lumière. Il imagina que la lumière est constituée de particules infiniment petites, lancées à très grande vitesse par les corps lumineux. Cette théorie corpusculaire s'imposa jusqu'au début du XIX^e^ siècle.

Ce fut Augustin Fresnel qui réussit à démontrer que la lumière a bien une nature vibratoire, grâce à l'interprétation des phénomènes d'interférences et de diffraction. Il fallait donc un support pour transmettre de telles vibrations, comme, par exemple, l'air pour les vibrations sonores. L'éther lumineux faisait ainsi sa réapparition ; ce devait être une substance élastique qui aurait imprégné tous les corps, ainsi que le vide. De nombreux expérimentateurs essayèrent alors en vain de mettre en évidence ce milieu éthéré. Retenons deux expériences qui furent faites dans ce but, et qui montrent essentiellement que la loi d'addition des vitesses de la relativité galiléenne n'est pas vérifiée par la lumière.

1.2.1 Expérience de Fizeau

L'expérience réalisée par Hippolyte Fizeau, en 1851, partait de l'idée que si un milieu réfringent était en mouvement, on pouvait penser que l'éther lumineux serait entraîné par ce milieu. La vitesse de la lumière devait alors résulter de l'addition de la vitesse de la lumière dans l'éther et de celle de l'éther éventuellement entraîné.

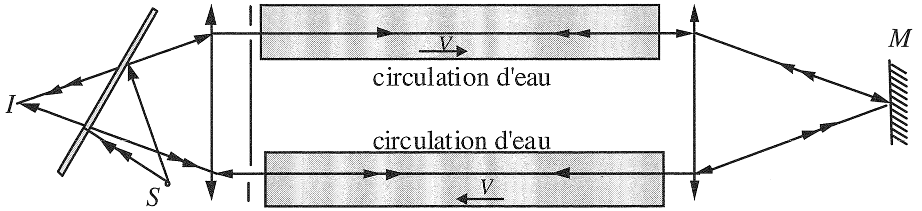

Figure 1.2

Afin de mettre en évidence un entraînement de l'éther, Fizeau étudia l'influence de la vitesse V d'un courant d'eau sur la vitesse de la lumière. Le principe de l'expérience est décrit par la figure 1.2. De l'eau circule dans un tube coudé en verre dont les deux branches parallèles sont de même longueur. Deux rayons lumineux issus d'une même source ponctuelle S, donc en phase au départ, sont envoyés à l'aide d'une lame semi-transparente, à travers les deux branches du tube. Les trajets parcourus par les rayons sont de même longueur ; ils sont renvoyés par un miroir M, et ils viennent interférer en I en fin de parcours.

Lorsque l'eau est immobile, la vitesse de la lumière est égale à $c' = c/n$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide et n, l'indice de l'eau. Si l'on suppose que l'éther lumineux est un milieu entraîné par le courant d'eau, la vitesse du rayon lumineux marqué par des flèches simples devrait être égale à $c/n + V$, et l'autre, marqué par des flèches doubles, à $c/n - V$. Les chemins optiques suivis par les deux rayons qui interfèrent sont donc différents, et l'on devrait observer un déplacement des franges d'interférence en fonction de la vitesse de l'eau.

Fizeau observa bien un déplacement des franges d'interférence, mais les résultats expérimentaux montrèrent que la vitesse de la lumière dans un courant d'eau allant dans un même sens que le rayon lumineux, est donnée par l'expression :

$$c'' = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) V \tag{1.2.1}$$

L'éther n'est donc pas complètement entraîné par l'eau puisque la formule d'addition des vitesses de la relativité galiléenne n'est pas vérifiée. On ne peut pas non plus en conclure que l'éther est immobile. À l'époque, Fizeau conclut prudemment que la loi trouvée exprime simplement « le changement de la vitesse de la lumière par l'effet du mouvement des corps » sans faire d'hypothèse sur l'origine de ce changement. Ce sera seulement cinquante ans plus tard que la théorie de la relativité restreinte permettra d'apporter une justification à la formule expérimentale de Fizeau.

1.2.2 Expérience de Michelson et Morley

Dans l'expérience de Fizeau, la vitesse de la lumière est mesurée par rapport au référentiel que constitue le laboratoire, et non par rapport à l'éther. Or, si l'on voulait vraiment détecter l'éther, il fallait arriver à déceler un mouvement par rapport à l'éther lui-même. Pour cela, il faut que la source de lumière et l'observateur participent au mouvement étudié.

Puisqu'on supposait que l'éther était une substance imprégnant tout l'Univers, la Terre, dans son mouvement autour du Soleil devenait un vaisseau idéal se mouvant dans l'éther immobile. Certes la vitesse orbitale de la Terre, de l'ordre de $V = 30$ km/s, est relativement faible par rapport à celle de la lumière, mais certaines techniques optiques atteignaient déjà à cette époque une très grande précision. On pouvait donc espérer montrer que la vitesse de la Terre allait s'ajouter à celle de la lumière, l'éther jouant le rôle d'un référentiel fixe.

L'expérience de Michelson et Morley, réalisée en 1887, allait miner tous les espoirs. Dans cette expérience (Fig. 1.3), la lumière qui provient d'une source S est divisée en deux rayons par une lame semi-transparente L. Ces deux rayons cheminent perpendiculairement l'un à l'autre jusqu'aux miroirs M_1 et M_2. Là, ils sont réfléchis et renvoyés sur la lame L, d'où ils partent réunis vers la lunette d'observation F, où ils interfèrent.

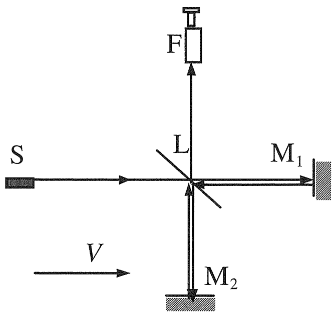

Figure 1.3

Si les distances LM_1 et LM_2 sont égales, et si l'on place le bras de l'appareil portant le miroir M_1 dans la direction du mouvement terrestre sur son orbite autour du Soleil, les deux rayons devraient avoir des vitesses différentes, selon la loi galiléenne d'addition des vitesses. Le calcul de la différence entre les durées de parcours d'un même chemin, parallèle ou perpendiculaire au mouvement de la Terre, est cependant assez délicat car il faut tenir compte du déplacement des miroirs, dû à la translation de la Terre, durant le trajet de chaque rayon. On démontre ainsi que le phénomène optique d'interférences ne devrait pas être le même que si la Terre était immobile par rapport à l'éther.