Chapitre 1

Les nombres complexes

L'ensemble $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ des entiers naturels est fermé sous l'addition $m + n$ et la multiplication $m\,n$ mais pour pouvoir résoudre pour x toute équation du type

$$x + m = n \ , \ m, n \in \mathbb{N},$$

il faut passer aux entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. Et pour être capable de résoudre pour x toute équation de la forme

$$p\,x + q = 0 \ , \ p, q \in \mathbb{Z},$$

il faut aller aux nombres rationnels $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. Ce dernier système est fermé sous les quatre opérations de l'arithmétique mais on ne peut y résoudre pour x toute équation du type

$$x^2 = a \ , \ a \in \mathbb{Q}.$$

Les nombres réels $\mathbb{R}$ permettent de résoudre certaines de ces équations mais pas toutes. Ils forment un système fermé sous les quatre opérations qui est de plus complet au sens où toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ qui satisfait la condition de Cauchy

$$\lim_{m,n \to +\infty} |x_m - x_n| = 0$$

y est convergente mais on ne peut par exemple y obtenir une solution de l'équation

$$x^2 + 1 = 0.$$

Il faut pour cela construire les nombres complexes $\mathbb{C}$.

1.1 Propriétés algébriques

Si (x,y), $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, soient

$$(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v)$$

et

$$(x,y)\,(u,v)=(xu-yv,xv+yu).$$

Ces opérations créent un corps commutatif, le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ; $(0,0)$ est l'élément neutre pour l'addition, $(1,0)$ est l'élément neutre pour la multiplication et l'inverse multiplicatif de $(x,y)\neq(0,0)$ est

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right).$$

En identifiant $(x,0)\in\mathbb{R}^2$ avec $x\in\mathbb{R}$ et en posant $i=(0,1)$,

$$\mathbb{C}=\{z \mid z=x+i\,y \;\text{ avec }\; x,y\in\mathbb{R} \;\text{ et }\; i^2=-1\}.$$

On calcule donc avec les nombres complexes comme avec les nombres réels en remplaçant partout i^2 par -1.

Exemple. Si $n\in\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\ldots\}$, on a

$$1+i+i^2+i^3+\cdots+i^n=\frac{1-i^{n+1}}{1-i}$$

de telle sorte que

$$1+i+i^2+i^3+\cdots+i^n=\begin{cases}1 & \text{si } n=0 \mod 4,\\ 1+i & \text{si } n=1 \mod 4,\\ i & \text{si } n=2 \mod 4,\\ 0 & \text{si } n=3 \mod 4.\end{cases}$$

Le nombre réel x est la **partie réelle** de z, le nombre réel y sa **partie imaginaire**,

$$x=\Re z\;,\;\; y=\Im z,$$

le nombre complexe

$$\overline{z}=x-i\,y$$

est le **conjugué** de z et le nombre positif

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

est son **module**. On remarque que

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Exemple. Si $a \neq 0$, b et c sont réels, l'équation quadratique

$$az^2 + bz + c = 0$$

admet toujours deux racines données par la formule de Viète :

$$z = \begin{cases} \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & \text{si } b^2 - 4ac > 0, \\ -b/2a & \text{si } b^2 - 4ac = 0, \\ \dfrac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} & \text{si } b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$$

(la racine est de multiplicité deux dans le deuxième cas). On remarque que dans le troisième cas, les racines sont des nombres complexes conjugués.

Exemple. La droite d'équation $ax + by = c$ dans le plan correspond à l'ensemble des nombres complexes qui satisfont la relation

$$\frac{a - ib}{2} z + \frac{a + ib}{2} \overline{z} = c,$$

le cercle $x^2 + y^2 = r^2$ correspond aux nombres complexes tels que

$$|z| = r$$

et la parabole $y = x^2$ à ceux qui sont liés par

$$z^2 + 2z\overline{z} + \overline{z}^2 + 2i\, z - 2i\, \overline{z} = 0.$$

Les nombres complexes, étant des points du plan, admettent une **forme polaire**. Si $z \neq 0$, on peut écrire

$$z = r(\cos\theta + i\, \sin\theta)$$

où le nombre $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est le module de z et l'angle

$$\theta = \arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x} + \pi & \text{si } x < 0\ , y \geq 0, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0\ , y > 0, \\ \arctan \dfrac{y}{x} & \text{si } x > 0\ , \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0\ , y < 0, \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi & \text{si } x < 0\ , y < 0, \end{cases}$$

est son **argument**. Donc, par définition,

$$-\pi < \arg z \leq \pi.$$

Les formules d'addition pour les fonctions trigonométriques montrent que l'on a

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

donc que

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

et que

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \mod 2\pi.$$

En raisonnant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on obtient la formule de de Moivre :

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

Exemple. Quelques soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, l'équation $z^n = a$ admet n racines. Si $a \neq 0$, elles sont toutes distinctes :

$$z_k = |a|^{1/n} \left(\cos\left(\frac{\arg a}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin\left(\frac{\arg a}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right)$$

où $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Lorsque $a = 1$, le nombre

$$\omega_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$$

est la **racine primitive** n$^{\text{ième}}$ de l'unité :

$$z^n - 1 = (z-1)(z-\omega_n)(z-\omega_n^2)\cdots(z-\omega_n^{n-1}).$$

(figure 1.1, page 13).

1.2 Propriétés topologiques

La distance entre z_1 et z_2 est

$$|z_1 - z_2|.$$

On a, quelques soient z_1, z_2 et z_3,

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|.$$

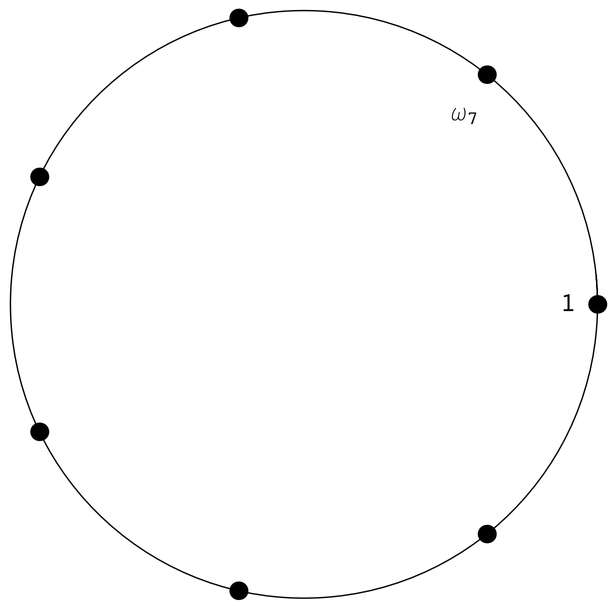

FIGURE 1.1 – Les racines $7^{\text{ième}}$ de l'unité

Une suite $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes converge vers un nombre complexe z si

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n - z| = 0.$$

En vertu des inégalités

$$\sup\{|\Re z|, |\Im z|\} \leq |z| \leq |\Re z| + |\Im z|,$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z \text{ si et seulement si } \lim_{n\to+\infty} \Re z_n = \Re z \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \Im z_n = \Im z.$$

En conséquence, les règles de calcul concernant la limite d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient restent valables. De plus, le critère de Cauchy suivant lequel la suite $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite si et seulement si

$$\lim_{m,n\to+\infty} |z_m - z_n| = 0$$

est encore vrai.

Exemple. Lorsque $z_n \to z$, $|z_n| \to |z|$ mais il n'est pas sûr que $\arg z_n \to \arg z$ car l'argument d'un nombre complexe n'est pas une fonction continue de ce nombre — il y a discontinuité tout le long de l'axe réel négatif. Ainsi $-1-i/n \to -1$ mais $\arg(-1-i/n) = \arctan 1/n - \pi \to -\pi$ alors que $\arg(-1) = \pi$.

Il suit du critère de Cauchy qu'une condition suffisante pour la convergence d'une série de nombres complexes

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$$

est sa convergence absolue (en module) :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k| < +\infty.$$

Dans le théorème suivant,

$$D(z_0, r) = \{z \mid |z - z_0| < r\}$$

et

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \mid |z - z_0| \leq r\}.$$

Théorème 1 (Cauchy) *Donnée une série entière à coefficients complexes a_k,*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k,$$

posons

$$R = \frac{1}{\limsup_k |a_k|^{1/k}}$$

(donc $0 \leq R \leq +\infty$). Alors la série converge absolument dans le disque $D(0, R)$, de façon uniforme sur tout disque $\overline{D}(0, r)$ tel que $r < R$, et elle diverge si $|z| > R$.

Démonstration. Si $R = 0$, la série diverge pour tout $z \neq 0$. En effet, quel que soit $z \neq 0$, il y a un nombre infini d'indices k pour lesquels

$$|a_k|^{1/k} > \frac{1}{|z|}$$

et la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

ne peut converger puisque que son terme général ne tend pas vers 0.

Si $0 < R < +\infty$, soient $0 < r < R$ arbitraire et $|z| \leq r$. Pour tout k suffisamment grand, on a

$$|a_k|^{1/k} < \frac{2}{R+r}$$

donc

$$|a_k z^k| < \left(\frac{2r}{R+r}\right)^k$$

et la série, éventuellement majorée par une série géométrique de raison inférieure à 1, est absolument et uniformément convergente. Si $|z| > R$ par contre, il y a un nombre infini d'indices k pour lesquels

$$|a_k|^{1/k} > \frac{1}{|z|}$$

et la série diverge pour la même raison que précédemment.

Si $R = +\infty$ enfin, le raisonnement sur la convergence du paragraphe précédent s'applique quelques soient les nombres $R > r > 0$ et la série converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. C.Q.F.D.

Exemple. La série géométrique converge si et seulement si le module de sa raison est strictement inférieur à 1 :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad \text{si et seulement si} \quad |z| < 1.$$

En y séparant le réel de l'imaginaire, on en tire les relations

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k \cos k\theta = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} r^k \sin k\theta = \frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

Un ensemble $E \subseteq \mathbb{C}$ est **fermé** si la limite de toute suite convergente $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E est dans E.

Exemples. Un disque $\overline{D}(a, R)$ est fermé. Un demi-plan

$$\{z \mid az + \overline{az} \geq 0\}$$

est fermé. Toute intersection, toute réunion finie d'ensembles fermés sont des ensembles fermés.

Un ensemble $E \subseteq \mathbb{C}$ est **ouvert** si son complémentaire $E^c = \mathbb{C} \setminus E$ est fermé.

Théorème 2 *Soit $E \subseteq \mathbb{C}$. Alors E est ouvert si et seulement si à chaque $z_0 \in E$ correspond $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subseteq E$.*

Démonstration.

La condition est nécessaire. Si elle n'était pas satisfaite, on pourrait trouver $z_0 \in E$ tel que chaque disque $D(z_0, 1/n)$ contienne un point $z_n \in E^c$. Ces points convergeraient vers z_0 et, comme E^c est fermé, on aurait $z_0 \in E^c$ ce qui est absurde.

La condition est suffisante. Si $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de E^c qui converge vers un point z, il faut que $z \in E^c$ — s'il était dans E, un petit disque centré en z ne contiendrait que des points de E et la suite donnée ne saurait y converger. C.Q.F.D.

Exemples. Un disque $D(a, R)$ est ouvert. Un demi-plan

$$\{z \mid az + \overline{az} > 0\}$$

est ouvert. Toute réunion, toute intersection finie d'ensembles ouverts sont des ensembles ouverts.

Un ensemble $E \subseteq \mathbb{C}$ est **borné** s'il existe $R > 0$ tel que $E \subseteq D(0, R)$. Un ensemble $E \subseteq \mathbb{C}$ est **compact** s'il est à la fois fermé et borné.

Exemples. Les ensembles

$$\{z \mid |\Re z| + |\Im z| \leq 1\}$$

et

$$\{z \mid \sup\{|\Re z|, |\Im z|\} \leq 1\}$$

sont compacts.

Théorème 3 (Bolzano-Weierstrass) *Soit $E \subseteq \mathbb{C}$. Alors E est compact si et seulement si toute suite $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E contient une suite partielle $\{z_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point de E.*