

---

# Table des matières

---

## partie I Calcul des probabilités

---

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| <b>I</b>  | <b>Espaces probabilisés</b>  | <b>3</b>  |
| I.1       | Vocabulaire .....  | 3         |
| I.2       | Probabilités .....   | 4         |
| I.3       | Probabilités sur un ensemble fini ou dénombrable .....             | 7         |
| I.4       | La modélisation (I).....   | 9         |
| I.5       | Dénombrement .....   | 10        |
| I.6       | Probabilités conditionnelles .....                                 | 12        |
| I.7       | Indépendance .....   | 13        |
| I.8       | Modélisation (II).....   | 14        |
| I.9       | Rappels sur les ensembles .....                                    | 15        |
| I.10      | Compléments sur les espaces mesurables et les fonctions mesurables | 15        |
| I.11      | Résumé.....  | 18        |
| I.12      | Exercices .....  | 19        |
| <b>II</b> | <b>Variables aléatoires discrètes</b>                              | <b>25</b> |
| II.1      | Variables aléatoires.....  | 26        |
| II.2      | Variables aléatoires discrètes .....                               | 27        |
| II.3      | Loi d'un vecteur, lois marginales .....                            | 29        |
| II.4      | Variables aléatoires discrètes indépendantes (I) .....             | 31        |
| II.5      | Schéma de Bernoulli et autres exemples .....                       | 32        |
| II.6      | Changement de variable .....                                       | 39        |
| II.7      | Espérance d'une variable aléatoire quelconque .....                | 39        |
| II.8      | Espérance d'une variable aléatoire discrète .....                  | 44        |
| II.9      | Variance et Covariance .....                                       | 47        |
| II.10     | Indépendance (II) .....  | 48        |
| II.11     | Loi faible des grands nombres .....                                | 51        |

---

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| II.12      | Fonctions génératrices . . . . .                             | 52         |
| II.13      | Indépendance (III) . . . . .                                 | 55         |
| II.14      | Lois conditionnelles et espérances conditionnelles . . . . . | 57         |
| II.15      | Rappels sur les séries et les séries entières . . . . .      | 62         |
| II.16      | Résumé . . . . .   | 64         |
| II.17      | Exercices . . . . .  | 68         |
| <b>III</b> | <b>Variables aléatoires à densité</b>                        | <b>79</b>  |
| III.1      | Définitions . . . . .  | 80         |
| III.2      | Lois marginales . . . . .                                    | 83         |
| III.3      | Espérance . . . . .  | 84         |
| III.4      | Lois usuelles . . . . .                                      | 85         |
| III.5      | Autres lois . . . . .  | 88         |
| III.6      | Indépendance . . . . .                                       | 90         |
| III.7      | Calcul de lois . . . . .                                     | 93         |
| III.8      | Lois conditionnelles . . . . .                               | 95         |
| III.9      | Simulation . . . . .   | 97         |
| III.10     | Rappels sur l'intégration . . . . .                          | 99         |
| III.11     | Résumé . . . . .   | 103        |
| III.12     | Exercices . . . . .  | 106        |
| <b>IV</b>  | <b>Fonctions caractéristiques</b>                            | <b>113</b> |
| IV.1       | Définitions . . . . .  | 113        |
| IV.2       | Propriétés . . . . .   | 115        |
| IV.3       | Fonctions caractéristiques usuelles . . . . .                | 118        |
| IV.4       | Résumé . . . . .   | 121        |
| IV.5       | Exercices . . . . .  | 123        |
| <b>V</b>   | <b>Convergences et théorèmes limites</b>                     | <b>125</b> |
| V.1        | Convergence presque sûre et théorèmes limites . . . . .      | 125        |
| V.2        | Convergence en probabilité et dans l'espace $L^2$ . . . . .  | 128        |
| V.3        | Convergence en loi . . . . .                                 | 132        |
| V.4        | Loi forte des grands nombres . . . . .                       | 137        |
| V.5        | Estimations de lois . . . . .                                | 141        |
| V.5.1      | Variables aléatoires discrètes . . . . .                     | 141        |
| V.5.2      | Variables aléatoires réelles . . . . .                       | 141        |
| V.5.3      | Variables aléatoires à densité . . . . .                     | 142        |
| V.6        | Théorème central limite . . . . .                            | 145        |
| V.7        | Autour du théorème central limite (I) . . . . .              | 149        |
| V.8        | Autour du théorème central limite (II) . . . . .             | 153        |
| V.9        | Résumé . . . . .   | 155        |

---

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| V.10      | Exercices .....                                       | 158        |
| <b>VI</b> | <b>Vecteurs gaussiens</b>                             | <b>165</b> |
| VI.1      | Définition et propriétés .....                        | 165        |
| VI.2      | Loi du $\chi^2$ , loi de Student, loi de Fisher ..... | 173        |
| VI.3      | Théorème central limite vectoriel .....               | 179        |
| VI.4      | Résumé .....  | 181        |
| VI.5      | Exercices .....                                       | 183        |

---

|                              |  |  |
|------------------------------|--|--|
| <b>partie II Statistique</b> |  |  |
|------------------------------|--|--|

---

|             |   |            |
|-------------|---|------------|
| <b>VII</b>  | <b>Introduction à la statistique : un exemple</b>     | <b>189</b> |
| VII.1       | Estimation ponctuelle .....                           | 189        |
| VII.2       | Test d'hypothèses .....                               | 190        |
| VII.3       | Intervalle de confiance .....                         | 191        |
| <b>VIII</b> | <b>Estimation ponctuelle</b>                          | <b>195</b> |
| VIII.1      | Hypothèses sur le modèle .....                        | 195        |
| VIII.2      | Statistiques et estimateurs .....                     | 197        |
| VIII.3      | Construction d'estimateurs convergents .....          | 198        |
| VIII.3.1    | Méthode de substitution .....                         | 198        |
| VIII.3.2    | Méthode des moments .....                             | 198        |
| VIII.3.3    | Le maximum de vraisemblance .....                     | 199        |
| VIII.4      | Choix d'un estimateur .....                           | 204        |
| VIII.4.1    | Risque quadratique et comparaison d'estimateurs ..... | 204        |
| VIII.4.2    | Score, information de Fisher, modèle régulier .....   | 207        |
| VIII.4.3    | Borne FDCR .....                                      | 210        |
| VIII.4.4    | Modèle gaussien .....                                 | 212        |
| VIII.5      | Amélioration d'estimateurs .....                      | 214        |
| VIII.5.1    | Statistiques exhaustives, statistiques totales .....  | 214        |
| VIII.5.2    | Estimateurs améliorés de Rao-Blackwell .....          | 216        |
| VIII.5.3    | Le modèle exponentiel .....                           | 218        |
| VIII.6      | Analyse asymptotique .....                            | 222        |
| VIII.6.1    | Estimateurs de substitution .....                     | 223        |
| VIII.6.2    | Estimateurs des moments .....                         | 223        |
| VIII.6.3    | Estimateurs du maximum de vraisemblance .....         | 224        |
| VIII.6.4    | Comparaison asymptotique .....                        | 226        |
| VIII.7      | Résumé .....  | 228        |
| VIII.8      | Exercices .....                                       | 231        |

---

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| <b>IX</b> | <b>Tests d'hypothèses</b>                              | <b>235</b> |
| IX.1      | Tests  | 236        |
| IX.2      | Erreurs  | 237        |
| IX.3      | Choix d'un test  | 238        |
| IX.4      | Test d'hypothèses simples                              | 239        |
| IX.5      | Statistique de test et $p$ -valeur                     | 242        |
| IX.6      | Hypothèses composites pour les modèles exponentiels    | 244        |
| IX.7      | Régression linéaire                                    | 248        |
| IX.7.1    | Modèle et estimation                                   | 248        |
| IX.7.2    | Test d'utilité des régresseurs                         | 251        |
| IX.8      | Tests asymptotiques                                    | 255        |
| IX.8.1    | Définitions et exemples                                | 255        |
| IX.8.2    | Hypothèse implicite : le test de Wald                  | 260        |
| IX.8.3    | Hypothèse explicite : le test de Hausman               | 264        |
| IX.9      | Test d'adéquation du $\chi^2$ et applications          | 267        |
| IX.9.1    | Test du $\chi^2$ empirique                             | 267        |
| IX.9.2    | Test d'adéquation à une loi                            | 270        |
| IX.9.3    | Test d'indépendance                                    | 271        |
| IX.9.4    | Test du $\chi^2$ empirique (démonstration)             | 273        |
| IX.10     | Autres tests asymptotiques                             | 275        |
| IX.10.1   | Test de Kolmogorov-Smirnov pour un échantillon         | 275        |
| IX.10.2   | Test de Kolmogorov-Smirnov pour deux échantillons      | 278        |
| IX.10.3   | Test de comparaison pour deux échantillons             | 279        |
| IX.11     | Résumé   | 282        |
| IX.12     | Exercices  | 289        |
| <b>X</b>  | <b>Régions de confiance, Intervalles de confiance</b>  | <b>293</b> |
| X.1       | Régions et intervalles de confiance de niveau exact    | 293        |
| X.2       | Régions et intervalles de confiance de niveau approché | 296        |
| X.2.1     | Niveau par excès                                       | 296        |
| X.2.2     | Niveau asymptotique                                    | 298        |
| X.3       | Régions de confiance et tests                          | 301        |
| X.4       | Résumé   | 302        |
| X.5       | Exercices  | 303        |
| <b>XI</b> | <b>Tables statistiques</b>                             | <b>305</b> |
| XI.1      | Quantiles de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$                | 305        |
| XI.2      | Fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$  | 306        |
| XI.3      | Quantiles de la loi du $\chi^2$                        | 307        |
| XI.4      | Quantiles de la loi de Student                         | 308        |
| XI.5      | Quantiles de la loi de Fisher-Snedecor                 | 309        |

|                   |            |
|-------------------|------------|
| <b>Références</b> | <b>311</b> |
| <b>Index</b>      | <b>313</b> |



## Première partie

---

### Calcul des probabilités





# I

---

## Espaces probabilisés

Ce chapitre est consacré à la définition et aux propriétés des probabilités (pour une introduction générale à la théorie de la mesure, le lecteur pourra consulter les ouvrages [12] ou [14]).

Après la brève introduction au vocabulaire usuel en probabilité du paragraphe I.1, on donne la définition et quelques propriétés des probabilités au paragraphe I.2. On étudie plus en détail le cas des probabilités sur un espace fini ou dénombrable aux paragraphes I.3 et I.5. La notion de probabilité conditionnelle est introduite au paragraphe I.6, et la notion importante de l'indépendance au paragraphe I.7. Les paragraphes I.9 et I.10 donnent quelques rappels sur les opérations d'ensemble et des compléments sur la théorie de la mesure. Enfin, les paragraphes I.4 et I.8 sont consacrés à la modélisation du lancer de deux dés à l'aide du formalisme des probabilités.

### I.1 Vocabulaire

Afin d'illustrer le vocabulaire et les notations probabilistes, on considère l'exemple du lancer d'un dé à 6 faces.

| Vocabulaire usuel                       | vocabulaire consacré                           | notation           | exemple                |
|---|--|--------------------|------------------------|
| un résultat possible                    | une réalisation                                | $\omega$           | 5                      |
| tous les résultats possibles            | l'espace des réalisations<br>ou espace d'états | $\Omega$           | $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ |
| un sous-ensemble de résultats possibles | un évènement                                   | $A \subset \Omega$ | $\{2, 4, 6\}$          |

On définit également le vocabulaire suivant.

|                                       |             |
|---------------------------------------|-------------|
| l'évènement certain                   | $\Omega$    |
| l'évènement impossible                | $\emptyset$ |
| l'évènement contraire de $A$          | $A^c$       |
| l'évènement $A$ et $B$                | $A \cap B$  |
| l'évènement $A$ ou $B$ (non exclusif) | $A \cup B$  |

On dit que les évènements  $A$  et  $B$  sont incompatibles si  $A \cap B = \emptyset$ .

## I.2 Probabilités

Intuitivement, pour estimer la probabilité d'obtenir un 5 ou un 6 lors d'un lancer d'un dé à 6 faces, i.e. la probabilité de l'évènement  $A = \{5, 6\}$  que l'on notera  $\mathbb{P}(A)$ , on effectue un grand nombre,  $N$ , de lancers du même dé, et on compte le nombre  $N(A)$  de fois où le résultat est 5 ou 6. La fréquence empirique des succès,  $\frac{N(A)}{N} \approx \frac{1}{3}$  (si le dé n'est pas biaisé), est une bonne approximation de  $\mathbb{P}(A)$ . La figure I.1 représente le résultat d'une simulation de 1000 lancers, où l'on a représenté chaque apparition de 5 ou 6 par un trait vertical. Enfin on observe que la fréquence empirique  $N(A)/N$  "converge" vers  $1/3$  quand  $N$  augmente.

On verra au chapitre V sur les théorèmes limites comment justifier cette approximation à l'aide de la loi forte des grands nombres. De cette approche intuitive, on peut induire des relations satisfaites par la probabilité  $\mathbb{P}$ . Comme  $N(\Omega) = N$  et  $N(\emptyset) = 0$ , on doit donc avoir  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$  et  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ . Si on considère des évènements disjoints (incompatibles)  $A$  et  $B$ , on a  $N(A \cup B) = N(A) + N(B)$ , il est donc naturel d'imposer  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$  si  $A \cap B = \emptyset$ .

Si  $\Omega$  est au plus dénombrable, on note dans ce cas  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  l'ensemble des sous-ensembles de  $\Omega$ . De manière plus générale on considère un ensemble  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  contenant  $\Omega$ , stable par passage au complémentaire et stable par réunion dénombrable (cf. définition I.12). On dit que  $\mathcal{F}$  est une tribu et  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace mesurable (voir le paragraphe I.10 pour des exemples). Dans une première lecture, on pourra supposer que les espaces que l'on manipule sont finis ou dénombrables. En fait les paragraphes I.2, I.6 et I.7 couvrent le cas général. On dit que  $A \subset \Omega$  est un **évènement** si  $A \in \mathcal{F}$ .

**Définition I.1.** Une **probabilité** (ou une mesure de probabilité) est une fonction  $\mathbb{P}$  de l'ensemble des évènements  $\mathcal{F}$  vers  $[0, 1]$  telle que :